

# Digitaltechnik

## Klausur Sommersemester 2014



Institut für Technik der Informationsverarbeitung – ITIV

Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. Jürgen Becker

### Digitaltechnik

Datum:  
Name:  
Matrikel-Nr.:  
ID:  
Hörsaal: Daimler

**Sitzplatznummer.:**

### Hinweise zur Klausur

#### Hilfsmittel

Als Hilfsmittel zur Prüfung sind vier Seiten vorgegebene und ein DIN A4 Blatt selbst geschriebene Formelsammlung zugelassen. Nicht erlaubt hingegen sind die Verwendung eines Taschenrechners, zusätzliche Unterlagen und jegliche Kommunikation mit anderen Personen.

#### Prüfungsdauer

Die Prüfungsdauer beträgt für die Klausur 120 Minuten.

#### Prüfungsunterlagen

Die Prüfungsunterlagen bestehen aus insgesamt 27 Seiten Aufgabenblättern (einschließlich diesem Titelblatt und zusätzlicher Lösungsblätter). Weiterhin sind 3 zusätzliche Seiten Formelsammlung enthalten.

**Bitte prüfen Sie vor der Bearbeitung der Aufgaben auf jeder Seite oben Ihren Namen sowie ihre Matrikelnummer.**

Auf jedes zusätzliche Lösungsblatt ist neben dem Namen auch die Aufgabennummer mit einzutragen. Vermeiden Sie das Beschreiben der Rückseiten.

Am Ende der Prüfung sind die 27 Seiten Aufgaben- und Lösungsblätter und alle verwendeten zusätzlichen Lösungsblätter abzugeben.

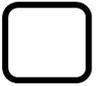
Verwenden Sie zum Bearbeiten der Aufgaben lediglich dokumentenechte Schreibgeräte – keinen Bleistift sowie Rotstifte!

#### Prüfungsaufgaben

Wenn nicht anders vorgegeben ist zu jeder Aufgabe ein detaillierter Rechenweg anzugeben.

Lösungen ohne Rechenweg können trotz richtigem Ergebnis zu Punktabzug führen.

Aufgabe 1	Information und Codierung	2	~12%
Aufgabe 2	Mengen, Relationen und Graphen	5	~11%
Aufgabe 3	Boolsche Algebra	8	~14%
Aufgabe 4	Zahlensysteme und Codierung	12	~15%
Aufgabe 5	Minimierung digitaler Funktionen	14	~13%
Aufgabe 6	Optimale Codes	17	~11%
Aufgabe 7	Schaltwerke und Automaten	20	~12%
Aufgabe 8	CMOS	23	~12%
		$\Sigma$	



# Aufgabe 1 Information und Codierung

## Aufgabe 1.1 Digitalisierung

Gegeben sei das in Abbildung 1-1 dargestellte analoge Signal. Angegeben sind außerdem die digitalen Wertebereiche sowie die undefinierten Bereiche.

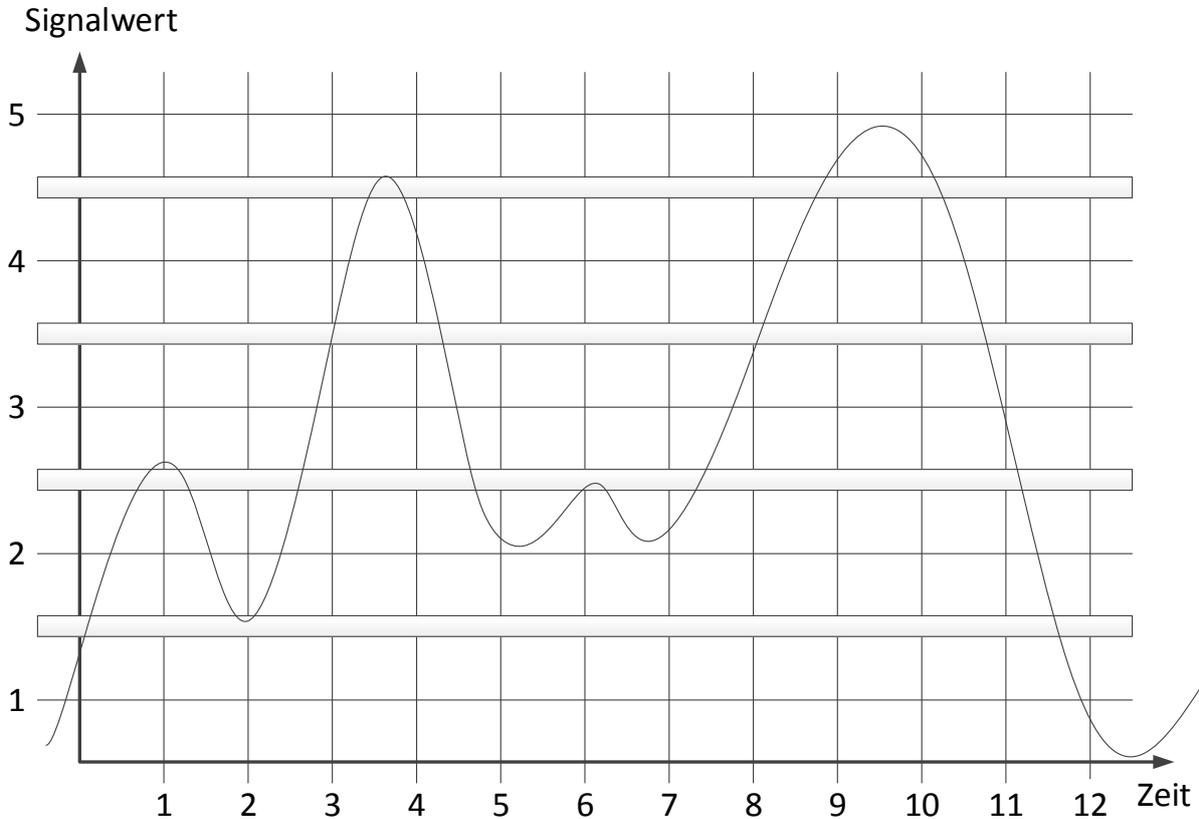


Abbildung 1-1: Analoges Signalverlauf

- A) Warum verwendet man bei der Digitalisierung undefinierte Bereiche. Geben Sie kurz an, was ein undefinierter Bereich ist und welche Aufgabe er erfüllt.




---



---



---



---



---

- B) Digitalisieren Sie das Signal aus Abbildung 1-1 und zeichnen Sie den digitalisierten Signalverlauf in das Diagramm ein.



**Aufgabe 1.2 Codierung und Hammingdistanzen**

- A) Bestimmen Sie die Anzahl möglicher Codewörter eines (N aus M)-Codes. Geben Sie dazu die allgemeine Formel zur Berechnung der Anzahl an Codewörtern an.

- B) Was versteht man unter der Hammingdistanz sowie der Minimalen Hammingdistanz? Geben Sie jeweils eine Definition an.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

- C) Welche Möglichkeiten zur Fehlererkennung und Fehlerkorrektur bietet eine Codierung mit einer minimalen Hammingdistanz  $HD_{\min} = 5$ ? Geben Sie jeweils die allgemeine Formel und das konkrete Ergebnis zur Fehlererkennung und zur Fehlerkorrektur an.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Aufgabe 1.3 Fehlererkennung und –korrektur**

Es wurde folgender Bitstrom empfangen:

0110100101111000001001011100

Es ist bekannt, dass zur Fehlererkennung „Scrambling“ mit gerader Parität verwendet wurde. Die Wortlänge beträgt 6 Bit.

- A) Ermitteln Sie die übersendeten Codewörter und die zugehörigen Paritätsbits aus dem Bitstrom.

---

---

---

---

---

---

---

- B) Ist die Übertragung korrekt? Geben Sie die Anzahl der Fehler an und begründen Sie Ihre Angaben.

---

---

---

---

- C) Wie lange darf eine Bündelstörung bei dem oben verwendeten Scrambling maximal sein, wenn der Bitstrom einen gesamten Block darstellt?

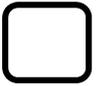
---

---

---

---

## Aufgabe 2 Mengen, Relationen und Graphen



### Aufgabe 2.1 Mengen

- A) Geben Sie den Durchschnitt der folgenden Mengen  $M_1$  und  $M_2$  an

$$M_1 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist eine Primzahl}\}$$

$$M_2 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist gerade}\}$$

---



---



---

- B) Wie viele Elemente hat die Potenzmenge der Menge  $M = \{0, 1, 2\}$ ? Geben Sie sie alle an.




---



---

- C) Leiten Sie eine Formel her, mit der sich die Mächtigkeit der Potenzmenge  $P_M$  einer Menge  $M$  mit  $n$  Elementen berechnen lässt.



### Aufgabe 2.2 Graphendarstellung einer Relation

Gegeben sei der Graph in Abbildung 2-1.

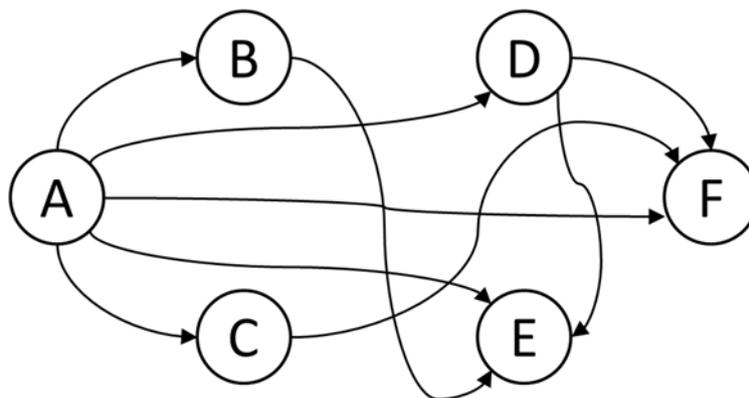


Abbildung 2-1: Graphendarstellung einer Relation

- A) Welche Eigenschaften einer Relation werden im Graphen aus Abbildung 2-1 dargestellt?

---



---



---

- B) Ergänzen Sie den Graph in Abbildung 2-2 so, dass die Relation reflexiv wird. Benennen Sie die Relation, die im resultierenden Graphen dargestellt wird.

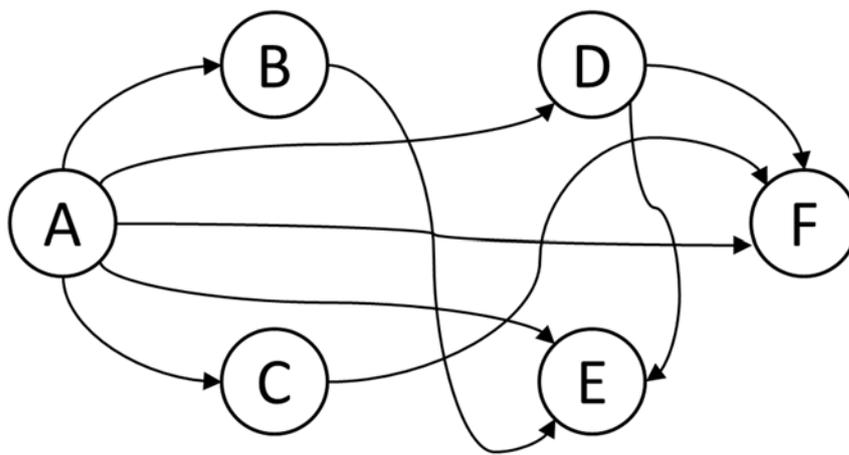


Abbildung 2-2: Graphendarstellung zur Erweiterung

### Aufgabe 2.3 Graphen

Gegeben sei der Graph in Abbildung 2-3.

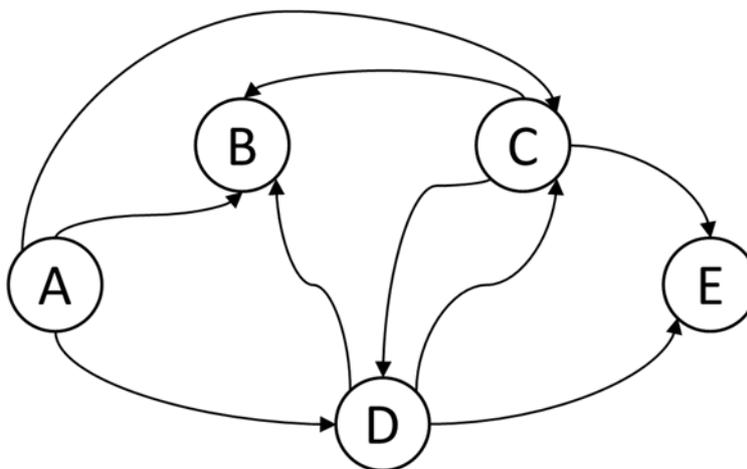


Abbildung 2-3 gerichteter Graph

A) Geben Sie die Adjazenzmatrix des in Abbildung 2-3 gegebenen Graphen an.

		Zielknoten				
		A	B	C	D	E
Quellknoten	A					
	B					
	C					
	D					
	E					

B) Konstruieren Sie aus dem Graph in Abbildung 2-4 einen dualen Graphen. Zeichnen Sie Ihr Ergebnis direkt in Abbildung 2-4 ein.

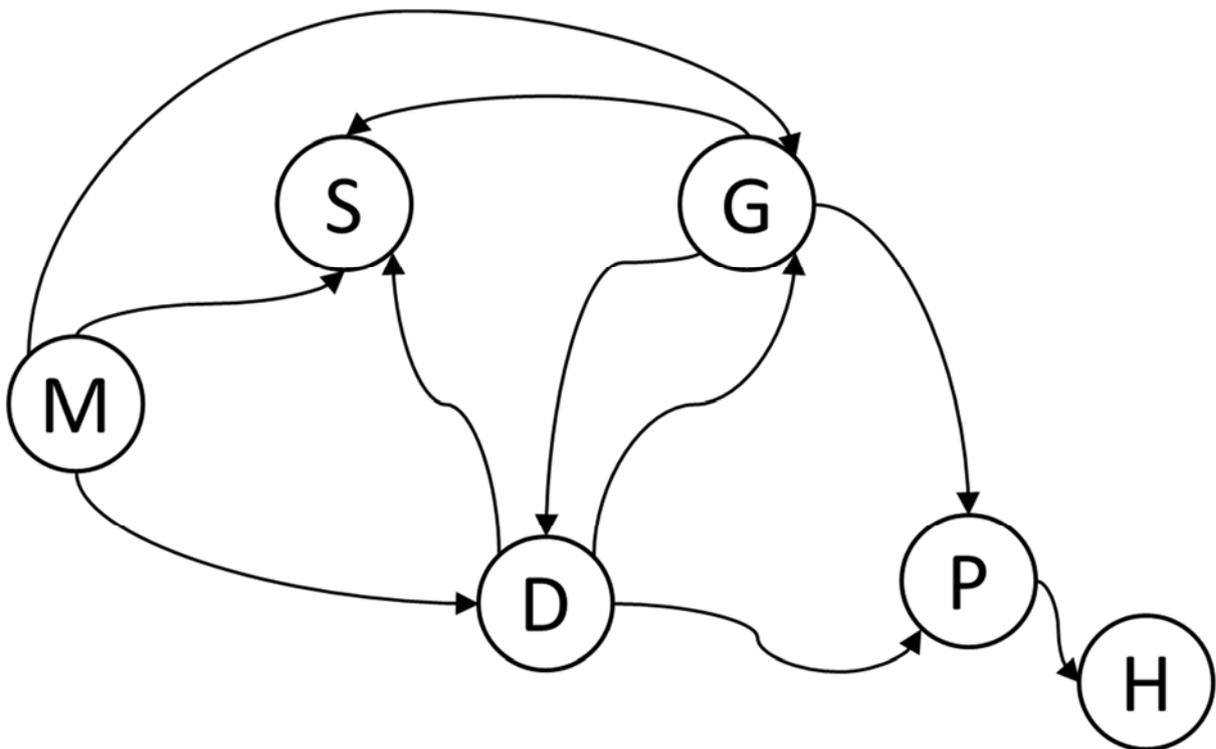


Abbildung 2-4: Graph zur Erstellung des dualen Graphen

**Aufgabe 3      Boolesche Algebra****Aufgabe 3.1      Entwicklungssatz**

Gegeben sei folgende boolesche Funktion:

$$x(d, c, b, a) = (a \oplus b) c \bar{d} \vee (\overline{c \vee \bar{d}}) \vee \bar{a} b (c \equiv d) \vee (\overline{a \vee \bar{b} \vee \bar{c}})$$

- A) Formen Sie die Funktion  $x(d,c,b,a)$  so um, dass er sich mit dem Entwicklungssatz nach Shannon entwickeln lässt. Also so, dass nur noch UND, ODER und NICHT Gatter verwendet werden.




---



---

Gegeben sei folgende boolesche Funktion:

$$y(d, c, b, a) = \bar{a} b (\bar{c} \bar{d} \vee c d) \vee (\bar{a} \bar{b}) \vee (\bar{a} b \vee a \bar{b}) c \bar{d} \vee (\bar{b} \bar{c} \bar{d})$$

- B) Entwickeln Sie den Ausdruck  $y$  mit Hilfe des Booleschen Entwicklungssatzes in der Reihenfolge  $d, c, b, a$ . Geben Sie alle Zwischenergebnisse an. Hinweis: Bringen Sie den Funktionsausdruck zuerst in eine geeignete Form.



Matr.-Nr.

Name:

ID:

---

## Aufgabe 3.2 Multiplexerschaltungen

Gegeben sei die Funktion  $z(d,c,b,a)$  in den beiden Formen:

1. Restfunktionen:

$$z(0,0,b,a) = (\bar{a} \vee \bar{b}) \quad z(0,0,0,a) = 1 \quad z(0,0,1,0) = 1$$

$$z(0,1,b,a) = (\bar{a} \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) \quad z(0,0,1,a) = \bar{a} \quad z(0,0,1,1) = 0$$

$$z(1,0,b,a) = 1 \quad z(0,1,0,a) = a \quad z(0,1,0,0) = 0$$

$$z(1,1,b,a) = 0 \quad z(0,1,1,a) = \bar{a} \quad z(0,1,0,1) = 1$$

$$z(0,1,1,0) = 1$$

$$z(0,1,1,1) = 0$$

2. Algebraische Entwicklung

$$z(d,c,b,a) = \bar{d} \left( \bar{c} \left( \bar{b}(1) \vee b(\bar{a}(1) \vee a(0)) \right) \vee c \left( \bar{b}(\bar{a}(0) \vee a(1)) \vee b(\bar{a}(1) \vee a(0)) \right) \right) \vee d(\bar{c}(1) \vee c(0))$$

- A) Die bereits entwickelte Funktion  $z$  soll für eine Field Programmable Gate Array (FPGA) Realisierung mit 4:1 Multiplexern umgesetzt werden. Die Eingangsliterale  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  sollen dabei ausschließlich als Steuersignale genutzt werden. Zeichnen Sie die minimale Multiplexerschaltung. Hierzu sind in Abbildung 3-1 bereits drei 4:1 Multiplexern vorgegeben.

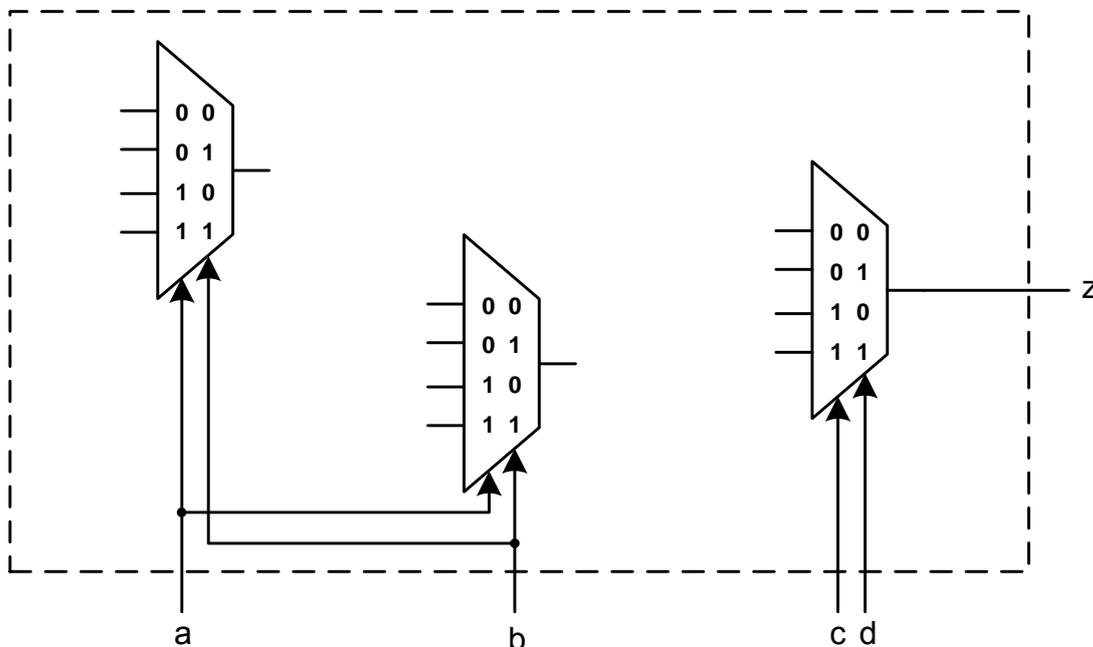


Abbildung 3-1: 4:1 Multiplexer-Schaltung

### Aufgabe 3.3 Boolesche Funktionen

Gegeben sei die Funktion  $u(c, b, a) = \bar{a}\bar{b}c \vee \bar{a}b\bar{c} \vee a\bar{b}\bar{c} \vee abc$

- A) Vervollständigen Sie die Wahrheitstabelle in Tabelle 3-1 anhand der gegebenen Funktion  $u(c, b, a)$ :

a	b	c	u

Tabelle 3-1: Wahrheitstabelle

- B) Geben Sie an, welche Grundschaltung durch die Funktion  $u(a, b, c)$  in Tabelle 3-1 realisiert wird.

---



---

- C) Für die Realisierung der Funktion  $u(a, b, c)$  stehen nur NOR-Gatter und NOT-Gatter zur Verfügung. Formen Sie daher die ermittelte DNF in eine NOR-Form um bei der nur NOR Gatter und NOT-Gatter verwendet werden.

---



---



---



---



---



---

**Aufgabe 4 Zahlensysteme und Codierung****Aufgabe 4.1 Binary Coded Decimal**

- A) Addieren Sie die beiden im Dezimalsystem gegebenen Zahlen  $2713_D$  und  $9546_D$  im BCD System und im Dezimalsystem Geben Sie sowohl den Lösungsweg als auch alle notwendigen Korrekturschritte an.



BCD	Dec
	2713
	+9546

- B) Gegeben sei die folgende Bitkombination: 00101001 01010111 00011001



Interpretieren Sie die gegebene Bitkombination als BCD-Zahl. Erläutern Sie, ob es sich „packed code“ oder „unpacked code“ handelt.

---

---

- C) Welchen Vorteil bietet der Stibitz-Code im Vergleich zur BCD-Codierung in Bezug auf Rechenoperationen? Wie unterscheidet sich der Stibitz-Code vom BCD-Code?



---

---

---

---

## Aufgabe 4.2 Polyadische Zahlensysteme



Vervollständigen Sie die offenen Felder in Tabelle 4-1 indem Sie jeweils die entsprechenden Konvertierungen durchführen.

Dezimal	Binär	Oktal	Hex
4862 <sub>D</sub>			
	1011001100 <sub>B</sub>		
		275 <sub>O</sub>	
			18 <sub>H</sub>

Tabelle 4-1: Konvertierung von Zahlensystemen.

## Aufgabe 4.3 Rechenoperationen im Binärsystem

- A) Welche beiden Rechenoperationen lassen sich im Binärsystem durch Verschieben einer Binärzahl um 3 Stellen nach links bzw. nach rechts realisieren?




---



---



---

- B) Stellen Sie die Zahl **-13,375<sub>D</sub>** in der angegebenen normierten 16-Bit-Fließkommazahlendarstellung dar. Geben Sie die Zwischenschritte bei der Umrechnung an.



V	E <sub>7</sub>	E <sub>6</sub>	E <sub>5</sub>	E <sub>4</sub>	E <sub>3</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>1</sub>	E <sub>0</sub>	M <sub>6</sub>	M <sub>5</sub>	M <sub>4</sub>	M <sub>3</sub>	M <sub>2</sub>	M <sub>1</sub>	M <sub>0</sub>

**Aufgabe 5 Minimierung digitaler Funktionen****Aufgabe 5.1 Symmetriediagramm**

A) Aus welchem Grund versucht man die Anzahl an Primtermen zu minimieren?

B) Minimieren Sie die folgende Schaltfunktion mittels eines Symmetriediagramms. Geben Sie das Symmetriediagramm und die entsprechende disjunktive Minimalform an.

$$y = f(a, b, c, d) = \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} \vee \bar{a}\bar{b}c\bar{d} \vee \bar{a}b\bar{c}\bar{d} \vee \bar{a}b\bar{c}d \vee \bar{a}b\bar{c}d \vee \bar{a}b\bar{c}d \vee \bar{a}b\bar{c}d \vee \bar{a}b\bar{c}d$$

— a —				
	0	1	5	4
	2	3	7	6
b	12	13	17	16
	10	11	15	14
	— c —			
		d		

C) Zeichnen Sie das Symmetriediagramm einer Antivalenz (XOR) von drei Variablen. Geben Sie die Zwischenschritte Ihrer Lösung in Form einer Funktionsstabelle an.

$$y = f(x_3, x_2, x_1) = x_3 \text{ XOR } x_2 \text{ XOR } x_1$$

**Aufgabe 5.2 Verfahren nach Nelson 4**

Gegeben ist die Boolesche Funktion  $f(a,b,c,d)$  in Abbildung 5-1.

— a —			
<b>0</b> <sub>0</sub>	<b>0</b> <sub>1</sub>	<b>1</b> <sub>5</sub>	<b>0</b> <sub>4</sub>
<b>1</b> <sub>2</sub>	<b>1</b> <sub>3</sub>	-	<b>0</b> <sub>6</sub>
<b>1</b> <sub>12</sub>	-	<b>1</b> <sub>17</sub>	<b>1</b> <sub>16</sub>
<b>0</b> <sub>10</sub>	<b>1</b> <sub>11</sub>	<b>1</b> <sub>15</sub>	<b>0</b> <sub>14</sub>
— c —			

b | d

Abbildung 5-1: Symmetriediagramm der Boolesche Funktion  $f$

A) Stellen Sie die Einsvervollständigung  $f^E$  der Funktion als konjunktiven Ausdruck dar.

B) Ermitteln Sie mit Hilfe des Nelson-Verfahren alle Primimplikanten der Funktion  $f^E$ .

### Aufgabe 5.3 Verfahren nach Petrick

A) Geben Sie mögliche Kernprimimplikanten aus Tabelle 5-1 an. Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

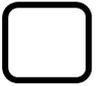
B) Wenden Sie nun die Spaltendominanzregel auf Tabelle 5-1 an. Welche Spalte(n) können gestrichen werden? Streichen Sie die entsprechende(n) Spalte(n) und geben Sie die dominierte(n) und zugehörigen dominierende(n) Spalte(n), sowie die streichbare(n) Spalte(n) an.

$p_i/E_i$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$	$E_6$	$E_7$	$E_8$	$E_9$	$E_{10}$
<b>a</b>		X	X	X	X					
<b>b</b>						X	X		X	X
<b>c</b>			X		X			X		
<b>d</b>							X	X		X
<b>e</b>									X	X
<b>f</b>				X	X					
<b>g</b>	X	X								
<b>h</b>	X					X				

Tabelle 5-1: Überdeckungstabelle

<b>Dominierende Spalte(n):</b>					
<b><u>Dominierte</u> Spalte(n):</b>					
<b>Streichbare Spalte(n):</b>					

## Aufgabe 6 Optimale Codes - Shannon-Fanø Codierung



Um die Bestückung eines Süßigkeitenautomaten optimieren zu können, soll die Steuerung des Automaten um eine Speicherung der getätigten Ausgaben erweitert werden. Im Speicher stehen für diesen Zweck noch 2000 Byte zur Verfügung. Um möglichst viele Daten sammeln zu können, soll eine optimale Codierung entwickelt werden. In Tabelle 6-1 ist die Anzahl der Produktausgaben des letzten Monats angegeben.

Produkt	Anzahl Ausgaben	Ermittelte Codierung
<b>A:</b> Schokolade hell	180	
<b>B:</b> Schokolade dunkel	160	
<b>C:</b> Müsliriegel	70	
<b>D:</b> Schokoriegel 1	170	
<b>E:</b> Schokoriegel 2	220	
<b>F:</b> Fruchtgummi	130	
<b>G:</b> Cola	40	
<b>H:</b> Mineralwasser	30	

Tabelle 6-1

- A) Zuerst soll untersucht werden, welche mittlere Codewortlänge sich für eine Codierung ergibt, bei der alle Codewörter binär und mit gleicher Länge codiert würden. Geben Sie dafür die minimale mittlere Codewortlänge an.




---



---

- B) Bestimmen Sie die optimale Codierung nach dem Shannon-Fanø Verfahren für die Auftrittshäufigkeiten aus Tabelle 6-1 und tragen Sie diese anschließend in die Tabelle ein. Der Lösungsweg muss nachvollziehbar und der Baum angegeben sein!



Matr.-Nr.

Name:

ID:

---

- C) Geben Sie die Formel zur Berechnung der mittleren Codewortlänge an. Berechnen Sie anschließend die mittlere Codewortlänge für die im Aufgabenteil B) entwickelte Codierung.

---

---

---

---

---

- D) Welche Eigenschaft der Shannon Codierung erlaubt die eindeutige Decodierung eines Shannon Codes?

---

---

- E) Welche Anzahl an Ausgaben kann im Mittel im Speicher abgelegt werden, bevor dieser voll ist?

---

---

---

---

---

## Aufgabe 7 Schaltwerke und Automaten

### Aufgabe 7.1 Automatenentwurf



Für hungrige ITIV-Mitarbeiter soll ein Süßigkeiten Automat am Institut aufgestellt werden, der Mars und Snickers für je 1 € verkauft. Die Ausgabe der Süßigkeiten erfolgt mit Hilfe je eines Motors pro Fach nach Anforderung durch eine entsprechende Wahl Taste.

Zur Süßigkeiten Ausgabe muss der passende Motor so lange laufen, bis ein Fall-Sensor die erfolgreiche Ausgabe feststellt. Bevor eine Ausgabe stattfinden kann, muss ein weiterer Sensor den Einwurf einer 1 € Münze festgestellt haben.

Zur Steuerung soll nun ein Automat mit den vier Zuständen entworfen werden.

**Sensoren:**

SA Wahl Taste A  
SB Wahl Taste B  
SF Fall-Sensor  
SG Geldeinwurf-Sensor

**Aktuatoren:**

MA Motor Fach-A  
MB Motor Fach-B

**Zustände:**

Warten  
Geldeinwurf  
Ausgabe-A  
Ausgabe-B

A) Zeichnen Sie das Ablaufdiagramm des Automaten



B) Um was für einen Automatentyp handelt es sich?



---



---

### Aufgabe 7.2 Schaltwerke

Tabelle 7-1 zeigt die Ablauftabelle einen anderen Automaten.

	Qv		Eingabe		Qv+1		Ausgabe		RS FF (q1)		JK FF (q0)	
	q1	q0	e1	e0	q1	q0	a1	a0	r1	s1	k0	j0
S0	0	0	0	-	0	0	0	0				
			1	0	1	1	0	1				
			1	1	0	1	1	0				
S1	0	1	0	-	0	1	1	0				
			1	0	0	0	0	0				
			1	1	1	0	1	1				
S2	1	0	0	-	1	0	1	1				
			1	0	0	1	1	0				
			1	1	1	1	0	1				
S3	1	1	0	-	1	1	0	1				
			1	0	1	0	1	1				
			1	1	0	0	0	0				

Tabelle 7-1: Ablauftabelle eines Automaten mit vier Zuständen

A) Vervollständigen Sie die Ansteuerung der Flip-Flops für die Zustandsvariablen q0 und q1.

B) Welche Funktion erfüllt der Automat in Tabelle 7-1?



---



---



---

- C) In Abbildung 7-1 ist ein Symmetriediagramm zur Ermittlung einer minimalen Ansteuerfunktion von  $a_0$  des Ausgabe-Schaltnetzes gegeben. Vervollständigen Sie das Symmetriediagramm.

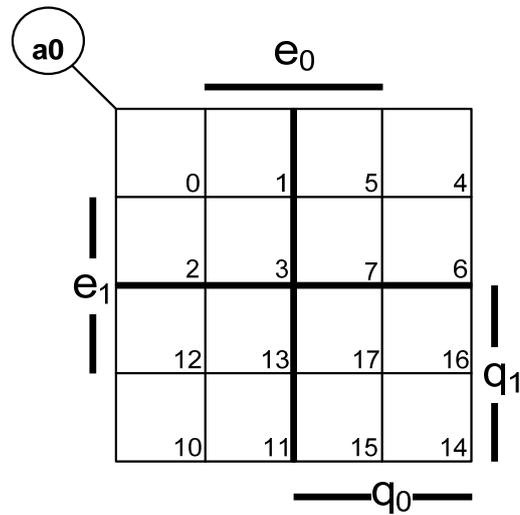
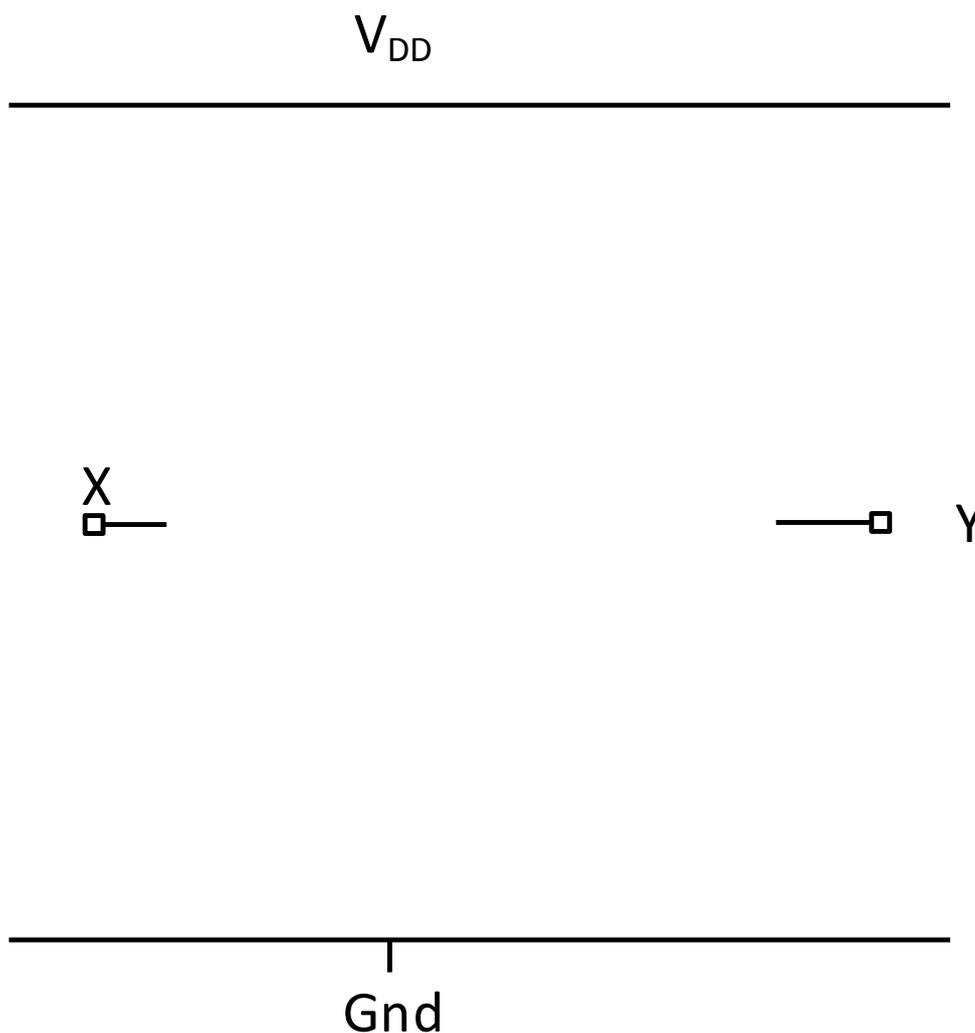


Abbildung 7-1: Symmetriediagramm

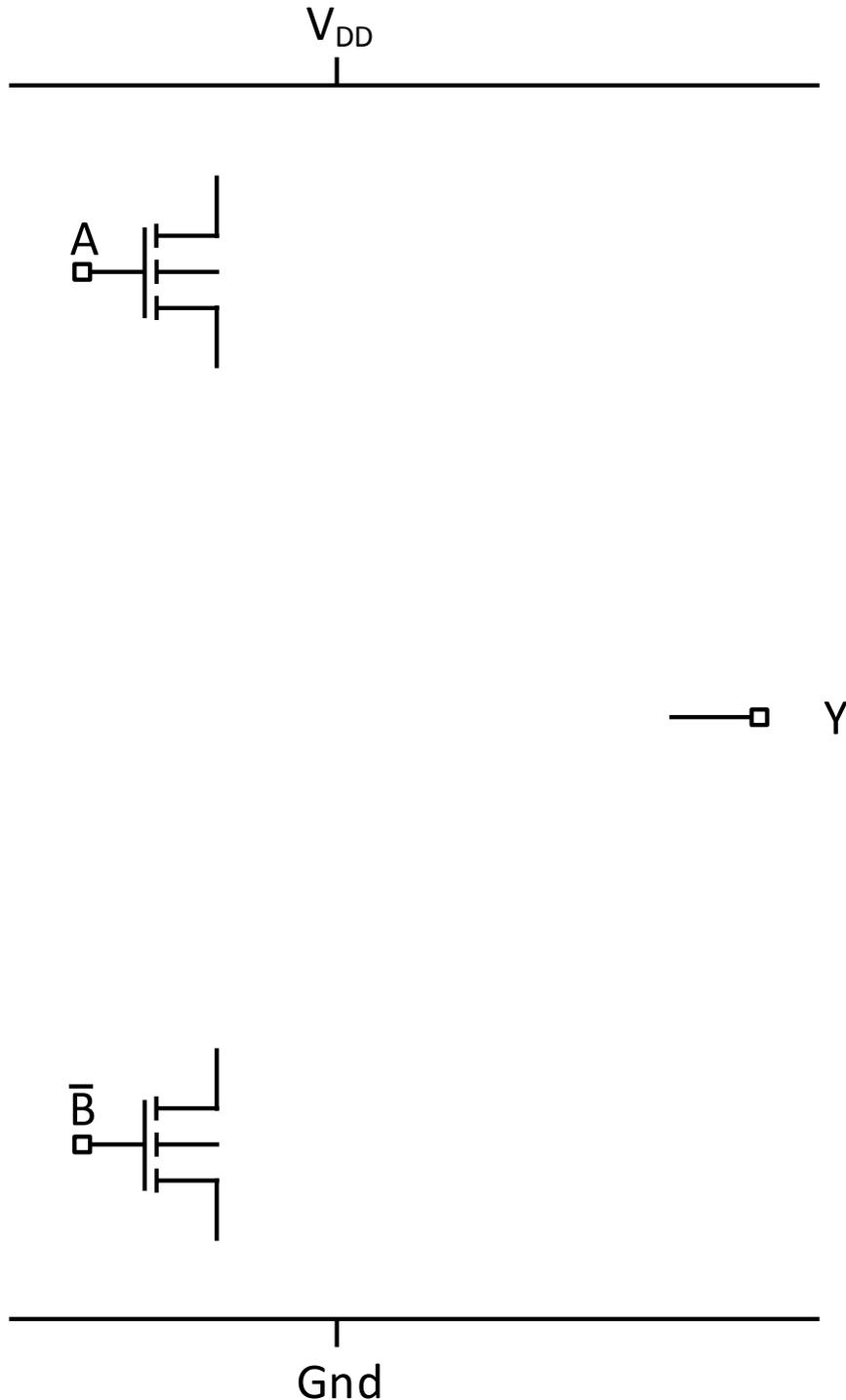
- D) Geben Sie die Ansteuerfunktion von  $a_0$  in disjunktiver Minimalform an.

**Aufgabe 8 CMOS****Aufgabe 8.1**

- A) Zeichne einen CMOS-Inverter mit X als Eingang und Y als Ausgang. Achte darauf dass man NMOS und PMOS Transistoren unterscheiden kann. Kennzeichne das Gate jedes Transistors mit dem Buchstaben G, den Drain-Anschluss mit D und den Source-Anschluss mit S.



- B) Vervollständige die CMOS Schaltung, so dass sie ein XOR Logikgatter realisiert. Die Eingänge heißen A und B, der Ausgang Y. Achte darauf, dass man NMOS und PMOS Transistoren unterscheiden kann. Zur besseren Übersicht dürfen die Buchstaben der Eingänge A und B direkt an den jeweiligen Transistoranschluss geschrieben werden. Dabei dürfen sie auch direkt durch einen Überstrich negiert werden.



---

**Aufgabe 8.2**

Gegeben ist die pull-up-Funktion F sowie die pull-down-Funktion G eines CMOS Schaltnetzes:

$$F = \bar{A}(\bar{B} + C\bar{D})$$

$$G = (\bar{A}\bar{B} + AC)(\bar{C} + B + \bar{D})$$

- A) Ist die Schaltung Kurzschlussfrei? Falls nein, welche Kombinationen führen zu einem Kurzschluss?

- B) Zeichne das zugehörige Schaltnetz der Funktionen aus A), ohne Umformungen oder Optimierungen. Achte darauf, dass man NMOS- und PMOS-Transistoren unterscheiden kann.


$$V_{DD}$$
$$|$$
$$\text{---} \square \text{ Y}$$
$$\text{-----}$$
$$|$$
$$\text{Gnd}$$

- C) Fülle die Wahrheitstabelle für die Schaltung aus. Nutze hierfür die Funktionen aus Aufgabe A). Falls notwendig, verwende den Buchstaben **K** für einen Kurzschluss und **Z** für einen hochohmigen Zustand.



a	b	c	d	y
0	0	0	0	
0	0	0	1	
0	0	1	0	
0	0	1	1	
0	1	0	0	
0	1	0	1	
0	1	1	0	
0	1	1	1	
1	0	0	0	
1	0	0	1	
1	0	1	0	
1	0	1	1	
1	1	0	0	
1	1	0	1	
1	1	1	0	
1	1	1	1	