Klausur (SS 2019)
Digitaltechnik

Institut für Technik der Informationsverarbeitung
Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. Jürgen Becker

Klausur: Digitaltechnik
Datum: 10. September 2019

Teilnehmer:
Matr.-Nr.:
ID:

Hörsaal:
Platz:

Es gelten die folgenden Regelungen:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt, außer
  - einem doppelseitig und handschriftlich beschriebenen DIN-A4-Blatt.
- Nutzen Sie nur **dokumentenechte Schreibgeräte** – keine Bleistifte oder rote Farbe!
- Die Verwendung von eigenem Papier ist nicht zugelassen.
- Vermeiden Sie das Beschreiben der Rückseiten.
- Bei Bedarf erhalten Sie Zusatzblätter von der Aufsicht.
  - Versehen Sie solche Blätter unbedingt mit Ihrer Matrikelnummer.
  - Ordnen Sie jedes zusätzliche Lösungsblatt einer Aufgabe eindeutig zu.

Die vorliegende Klausur besteht aus **33 Blättern** und einer dreiseitigen Formelsammlung.

		Seite	≈ Pkt. in %	Punkte
Aufgabe 1:	Allgemeine Fragen	2	12	
Aufgabe 2:	Optimale Codes	6	12	
Aufgabe 3:	Zahlensysteme und Codierung	10	11	
Aufgabe 4:	Automaten	12	12	
Aufgabe 5:	Boolsche Algebra	17	13	
Aufgabe 6:	Minimierung	22	13	
Aufgabe 7:	CMOS und Gatter	25	12	
Aufgabe 8:	Mengen, Relationen und Graphen	30	12	
				$\sum$

Aufgabe 1: Allgemeine Fragen

Aufgabe 1.1: Codierung und Zahlensysteme

A) Konvertieren Sie die Zahl 1120021_3 mit dem Radix 3 in die entsprechende Zahl mit dem Radix 9.

B) Welche ist die kleinste darstellbare Zahl bei Verwendung der 2er-Komplementdarstellung mit 10 Bit?

C) Wie Lautet das Ergebnis einer IEEE-754-Floatingpoint Division von 0/0?

D) Welche minimale Hamming-Distanz weist der Gray-Code auf? Begründen Sie Ihre Antwort durch ein Beispiel.

E) Wie viele gültige Codewörter gibt es bei einem 1 aus 10 Code? Geben Sie zwei gültige Codewörter explizit an.

F) Geben Sie eine Definition des Begriffes Optimaler Code an.

G) Was beschreibt die Entropie der Quelle, in der Codierungstheorie? Geben Sie die entsprechende Formel an.

H) Zeichnen Sie eine stetige Funktion der Entropie für die Ereignisse eines Münzwurfs (Kopf, Zahl), mit der Wahrscheinlichkeit p (Kopf) und 1-p (Zahl) in die vorgegebene Abbildung 1.1 ein. Beschriften Sie die Achsen und bestimmen Sie zudem die Wahrscheinlichkeit, mit welcher die Entropie H maximal ist.

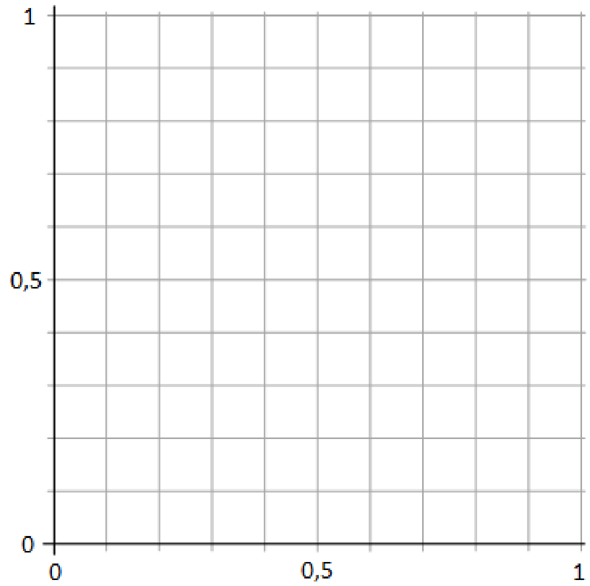


Abbildung 1.1: Funktion der Entropie

Aufgabe 1.2: Fehlererkennung, Fehlerkorrektur und Digitalisierung

A) Geben Sie die korrigierten Daten der nachfolgenden Blocksicherung an. Für die Blocksicherung werden die Zeilen mit einer gerade und die Spalten mit einer ungeraden Parität abgesichert.

0	1	1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	0	0

B) Wie viele Fehler können sicher mit Hilfe einer Blocksicherung erkannt werden?

C) Welche Verhfaren gibt es zur Erkennung von Bündelfehlern, wenn eine Paritätsicherung verwndet werden soll? Das Verfahren soll keinen weiteren Datenoverhead erzeugen. Geben Sie eines an.

D) Während der Übertragung eines Codewortes können in einem System können bis zu drei Fehler auftreten. Bestimmen Sie HD_{min1} für den Fall das Sie ein falsches Codewort erkennen können und HD_{min2} für den Fall das Sie ein falsches Codewort korrigieren können. Geben Sie jeweils die allgemeinen Formalen an.

E) Ein System verwendet zur Fehlerkorrektur Codewörter mit einer minimalen Hamming-Distanz von drei. Das System empfängt folgende Sequenz an Codewörtern:

000 101 010 001 111 100.

Die Codewörter der empfangenen Sequence bestehend aus drei Bits. Geben Sie mindestens drei korrigierte Sequenzen und die dazugehörigen gültigen Codewörter an.

F) Geben Sie den Unterschied zwischen einem analogen und einem digitalen System an.

Aufgabe 2: Optimale Codes

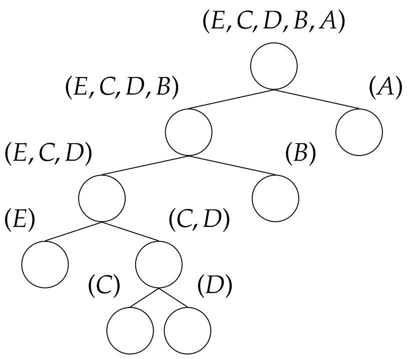
Aufgabe 2.1: Shannon-Fano-Verfahren

A) Gegeben seien die gedächtnislosen Quellen S_1, S_2, S_3 und S_4 sowie absolute Häufigkeiten für die von ihnen erzeugten Symbole. Entscheiden Sie für jede der Quellen, ob der zu ihr angegebene Codierbaum aus einer korrekten Anwendung des Shannon-Fano-Verfahrens entstanden ist. Benennen Sie **bei einem fehlerhaften Baum** den Knoten, der nicht korrekt in eine linke und eine rechte Teilmenge zerlegt wurde, und **korrigieren Sie diese Aufteilung**.

Hinweise: In jedem Codierungsbaum befindet sich maximal ein Fehler. Nehmen Sie an, dass die absoluten Häufigkeiten repräsentativ für die Auftrittswahrscheinlichkeiten der Symbole sind. Gehen Sie davon aus, dass die Symbole zu Beginn nach aufsteigender Auftrittswahrscheinlichkeit von links nach rechts sortiert werden.

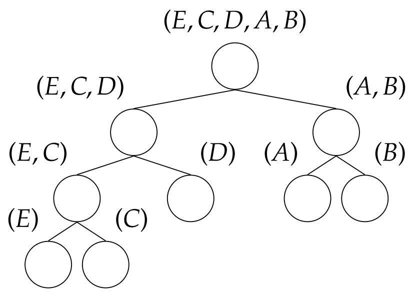
Quelle S_1

Symbol	A	B	C	D	E
Häufigkeit	36	13	5	11	3



Quelle S_2

Symbol	A	B	C	D	E
Häufigkeit	19	21	12	15	9



Antwort für S_1:

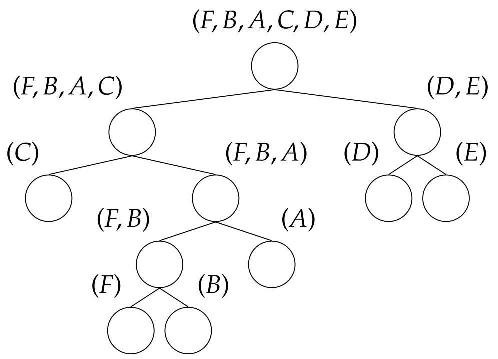
Antwort für S_2:

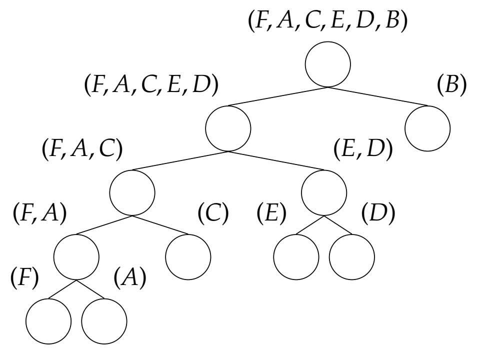
Quelle S_3

Symbol	A	B	C	D	E	F
Häufigkeit	7	4	8	12	17	2

Quelle S_4

Symbol	A	B	C	D	E	F
Häufigkeit	5	37	10	24	14	1





Antwort für S_3:

Antwort für S_4:

B) Eine gedächtnislose Quelle S generiert Symbole gemäß Tabelle 2.1. Abbildung 2.1 zeigt einen durch das Shannon-Fano-Verfahren erzeugten Codierungsbaum für S. Beschriften Sie die linken Äste des Baums mit einer „0“ und die rechten Äste mit einer „1“. Vervollständigen Sie Tabelle 2.1 mit den Codewörtern, die sich auf diese Weise ergeben.

Symbol	A	B	C	D	E	F	G
Wahrscheinlichkeit	0,13	0,4	0,06	0,06	0,06	0,1	0,19
Codewort							

Tabelle 2.1: Auftrittswahrscheinlichkeiten und Codewörter der von S erzeugten Quelle

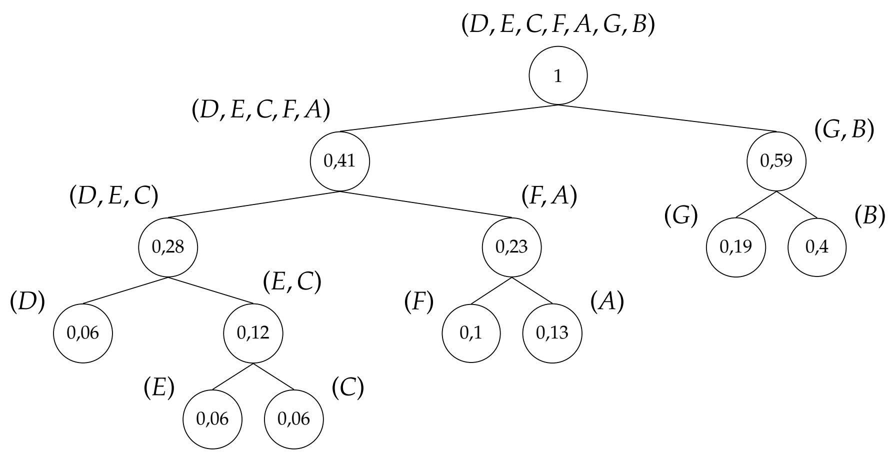


Abbildung 2.1: Codierungsbaum für die in Tabelle 2.1 beschriebene Quelle

C) Codieren Sie das Wort „DEGFDAB“ unter Verwendung der in B) erzeugten Codierung.

D) Bestimmen Sie die mittlere Codewortlänge der in B) erzeugten Codierung und geben Sie diese dezimal oder als vollständig gekürzter Bruch an.

Aufgabe 2.2: Huffman-Verfahren

A) Gegeben sei eine gedächtnislose Quelle S. Gemäß der in Tabelle 2.2 gegebenen Auftrittswahrscheinlichkeiten erzeugt sie Symbole aus dem Zeichenvorrat $Y = \{A, B, C, D, E\}$. Wenden Sie auf diese Quelle den Huffman-Algorithmus an und erzeugen Sie einen entsprechenden Codierungsbaum. Ordnen Sie den Knoten mit der niedrigeren Auftrittswahrscheinlichkeit dabei immer als linkes Kind an. Beschriften Sie die linken Äste des Baums mit einer „1“, die rechten Äste des Baums mit einer „0“ und die Blätter mit den entsprechenden Symbolen. Tragen Sie die daraus hervorgehenden Codewörter in Tabelle 2.2 ein.

Symbol	A	B	C	D	E
Wahrscheinlichkeit	0,12	0,10	0,29	0,41	0,08
Codewort					

Tabelle 2.2: Auftrittswahrscheinlichkeiten und Codewörter der von S erzeugten Quelle

B) Tabelle 2.3 zeigt eine alternative präfixfreie Codierung für die in A) definierte Quelle. Bei ihrer Erzeugung ist als Zielalphabet nicht das binäre Alphabet $T_2 = \{0, 1\}$, sondern das ternäre Alphabet $T_3 = \{0, 1, 2\}$ zur Anwendung gekommen. Wie lautet die Symbolfolge, die unter Verwendung des Codes in Tabelle 2.3 die Codewortfolge „1201110100" ergibt?

Symbol	A	B	C	D	E
Codewort	12	11	0	2	10

Tabelle 2.3: Codierung der Quelle für ein ternäres Zielalphabet

C) Welches informationstheoretische Maß dient bei der Codierung einer Quelle als größte untere Schranke der mittleren Codewortlänge $\bar{m}$? Geben Sie dessen Bezeichnung und eine allgemeingültige Formel zur Berechnung an. Benennen Sie dabei alle als Teil der Berechnungsvorschrift verwendeten Größen.

Aufgabe 3: Zahlensysteme und Codierung

Aufgabe 3.1: Umrechnung von Zahlensystemen

A) Vervollständigen Sie die Tabelle 3.1, indem Sie die offenen Felder durch die entsprechende Konvertierung ergänzen.

Dezimal	**Binär**	**Oktal**	**Hexadezimal**
1258_D			
	$101\ 1101\ 1101_B$		
		1247_O	
			$B42_H$

Tabelle 3.1: Umrechnung von Zahlensystemen

B) Wandeln Sie die Dezimalzahl 4541_D in eine Ternär- (Basis 3), Nonär- (Basis 9) und Oktavigesimalzahl (Basis 27) um. Geben Sie dabei die für die Umrechnung nötigen Zwischenschritte an.

Aufgabe 3.2: Rechenoperationen im Binärsystem

A) Abbildung 3.1 zeigt zwei normierte 16-Bit-Fließkommazahlen nach dem IEEE-754-2008-Standard. Das höchstwertige Bit stellt dabei das Vorzeichen V dar, die nachfolgenden fünf Bits den Exponenten E und die niederwertigsten zehn Bits die Mantisse M. Addieren Sie die zwei in der normierten 16-Bit-Fließkommazahlendarstellung gegebenen Zahlen miteinander und geben Sie das Ergebnis ebenfalls in dieser Darstellung an. Geben Sie die Zwischenschritte bei der Umrechnung an.

	V	E_4	E_3	E_3	E_1	E_0	M_9	M_8	M_7	M_6	M_5	M_4	M_3	M_2	M_1	M_0
	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
+	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0
=																

Abbildung 3.1: Addition von zwei 16-Bit-Fließkommazahlen

B) Subtrahieren Sie die Zahlen 22_D von der Zahl -191_D im STIBITZ-Code ($-191_D - 22_D$). Stellen Sie Ihren Lösungsweg ausführlich dar.

Aufgabe 4: Automaten

Aufgabe 4.1: Automatendarstellung

Ein allgemeiner Automat mit den Zuständen $S = \{S_1, S_2, S_3\}$, den Eingaben $E = \{E_1, E_2\}$ und den Ausgaben $A = \{A_1, A_2, A_3\}$ ist durch die folgende Automatentafel beschrieben (siehe Tabelle 4.1).

S^ν	$S^{\nu+1}$	
	E_1	E_2
S_1	S_1/A_1	S_2/A_2
S_2	S_1/A_2	S_3/A_3
S_3	S_3/A_3	S_1/A_2

Tabelle 4.1: Vorgegebene Automatentafel

A) Welchen Typ hat der Automat aus Tabelle 4.1? Begründen Sie Ihre Antwort.

B) Nennen Sie zwei weitere Automatentypen, und geben Sie jeweils dafür die entsprechende Ausgabefunktion. Benennen Sie dazu die einzelnen Parameter der Ausgabefunktionen.

C) Zeichnen Sie den Graphen zur Darstellung des Automaten aus Tabelle 4.1. Benutzen Sie hierfür die unten vorgegebene Struktur (Abbildung 4.1) und die Beschriftung wie bekannt aus der Vorlesung.

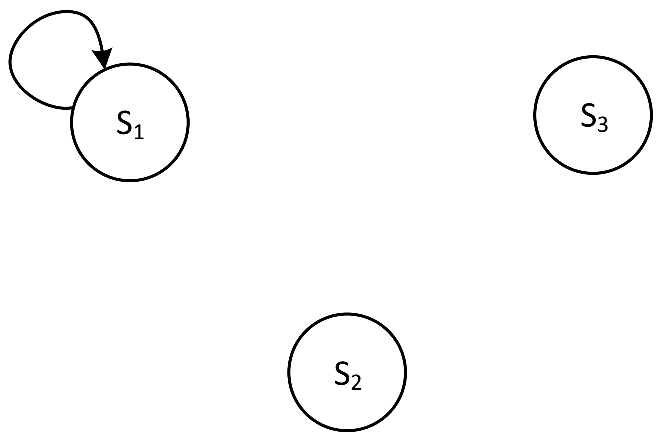


Abbildung 4.1: Automatengraph

Aufgabe 4.2: Automatenanalyse

Gegeben sei folgendes Ablaufdiagramm eines Automaten (Abbildung 4.2).

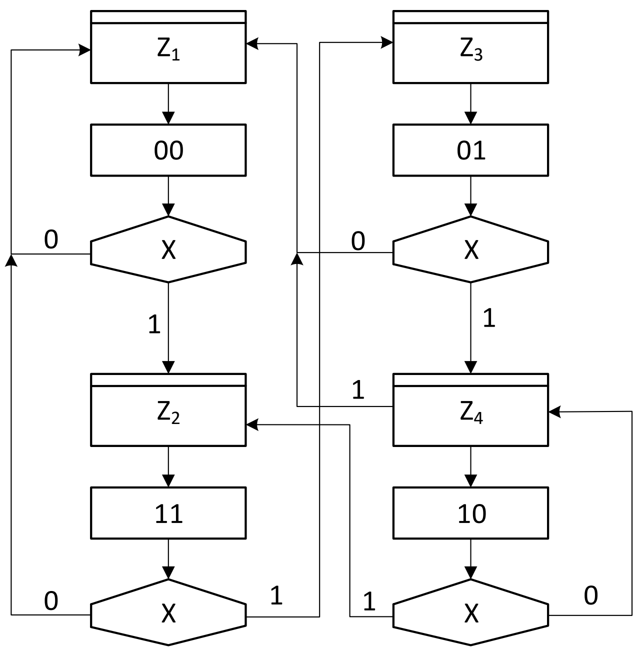


Abbildung 4.2: Ablaufdiagramm eines Automaten

A) Füllen Sie nun die Ablauftabelle (Tabelle 4.2) für den gegebenen Automaten aus. Tragen Sie hierzu für jeden Zustand und jede mögliche Eingabe den Folgezustand sowie die Ausgabe ein.

Zustand S^ν	Eingabe $E^\nu = X$	Folgezustand $S^{\nu+1}$	Ausgabe A^ν
Z_1	0		
	1		
Z_2	0		
	1		
Z_3	0		
	1		
Z_4	0		
	1		

Tabelle 4.2: Ablauftabelle des Automaten in Abb. 4.2

B) Welchen Typ hat der Automat aus Abbildung 4.2? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4.3: Realisierung von Automaten mit FlipFlops

A) Der Zustandsautomat aus Tabelle 4.3 soll mit einem *RS-FlipFlop* (mit den Eingängen r_0 und s_0) für das erste Bit S_0 und einem *T-FlipFlop* (mit dem Eingang t_1) für das zweite Bit S_1 realisiert werden. Ergänzen Sie in der Ablauftabelle die fehlenden Ansteuerbits für die Eingänge r_0 und t_1 der FlipFlops. Verwenden Sie nach Möglichkeit "don't care" Stellen.

Zustand	Eingabe	Folgezustand	FlipFlop Ansteuerung		
$S^v = (S_0^v, S_1^v)$	$E^v = (E_0^v, E_1^v)$	S^{v+1}	s_0	r_0	t_1
0,0	0,0	0,0	0		
	0,1	0,1	0		
	1,0	0,1	0		
	1,1	1,1	1		
0,1	0,0	0,1	0		
	0,1	0,1	0		
	1,0	0,0	0		
	1,1	1,0	1		
1,0	0,0	0,1	0		
	0,1	0,1	0		
	1,0	1,1	-		
	1,1	1,1	-		
1,1	0,0	1,0	-		
	0,1	1,0	-		
	1,0	0,0	0		
	1,1	1,1	-		

Tabelle 4.3: Ablauftabelle eines unbekannten Zustandsautomaten

B) Die Ansteuerfunktionen für die FlipFlops sollen nun minimiert werden. Geben Sie mit Hilfe des in Abbildung 4.3 vorgegebenen Symmetriediagramms eine disjunktive minimale Ansteuerfunktion für den Eingang s_0 an.

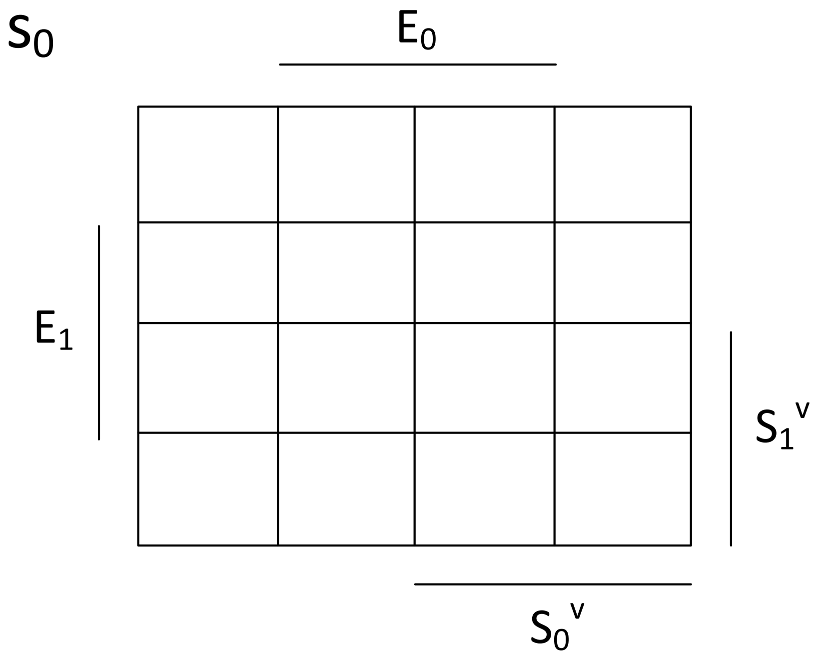


Abbildung 4.3: Symmetriediagramm für Ansteuerfunktion

C) Welchen Vorteil hat ein JK-FlipFlop bei der Minimierung der Ansteuerfunktion gegenüber dem RS-FlipFlop? Begründen Sie ihre Antwort.

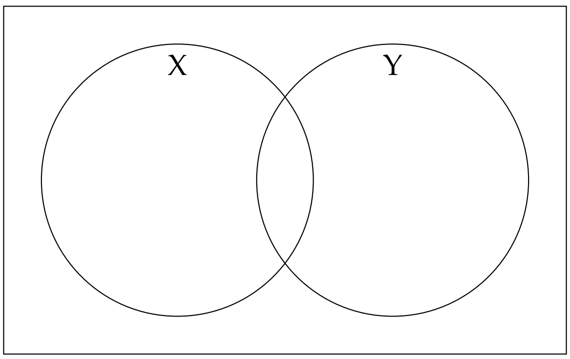
Aufgabe 5: Boolsche Algebra

Aufgabe 5.1: Huntingtonsche Axiome

A) Nennen Sie **zwei** Beispiele für Algebren bzw. Verknüpfungsgebilde, in denen die Huntingtonschen Axiome gelten.

B) Geben Sie den zu R12a (*De Morgansche Regel*) analogen Satz in der Mengenalgebra $MA = [P(M), \cap, \cup, C_M, \emptyset, M]$ an.

C) Gegeben sei die Beziehung $Z = \big(C_M(X) \cap Y\big) \cup \big(X \cap C_M(Y)\big)$ in der Mengenalgebra MA. Zeichnen Sie die zu der Menge Z gehörige Fläche in das untenstehenden Mengendiagramm ein. Wie nennt man die Entsprechung dieser Beziehung in der Schaltalgebra?



Aufgabe 5.2: Beweis eines Satzes mittels Boolscher Algebra

Im folgenden soll die Gültigkeit der Gleichung

$$\left(\overline{(a \wedge b)} \wedge (\overline{a} \vee \overline{b})\right) \vee \left(a \wedge b \wedge \overline{\left(\overline{a} \vee \overline{b}\right)}\right) = 1 \tag{5.1}$$

mittels der Huntingtonschen Axiome (H1 - H5) und der Regeln (R1 - R12) aus dem Formelblatt bewiesen werden. Für den Nachweis soll die linke Seite der Gleichung auf die rechte Seite (d.h. auf 1) zurückgeführt werden.

A) Führen Sie den Beweis für Gleichung (5.1) indem Sie die Einzelschritte zeilenweise in die vorgedruckte Tabelle eintragen. Geben Sie jeweils die Nummer des verwendeten Satzes gemäß Formelblatt an. In jedem Einzelschritt darf **genau eine** Regel/Axiom auf beliebig viele Teilausdrücke angewendet werden. (*Hinweis:* Die Verwendung des Kommutativgesetzes H2 sowie des Assoziativitätsgesetzes R10a/R10b muss nicht explizit angegeben werden.)

Regel	Term
-	$\left(\overline{(a \wedge b)} \wedge (\overline{a} \vee \overline{b})\right) \vee \left(a \wedge b \wedge \overline{\left(\overline{a} \vee \overline{b}\right)}\right)$

Weitere Zeilen auf der nächsten Seite →

Regel	Term

Aufgabe 5.3: Schaltfunktionen und Entwicklungssatz

A) Die Schaltfunktion $F(c, b, a) = ac \vee \bar{a}b\bar{c}$ soll durch NAND-Gatter realisiert werden. Wandeln sie die Funktion dazu so um, dass sie ausschließlich aus Negierungen und NAND Operationen mit **zwei** Eingängen besteht. Zeichnen Sie anschließend das zugehörige NAND-Schaltnetz.

B) Nennen Sie zwei aus der Vorlesung bekannte kanonische Darstellungen von Schaltfunktionen.

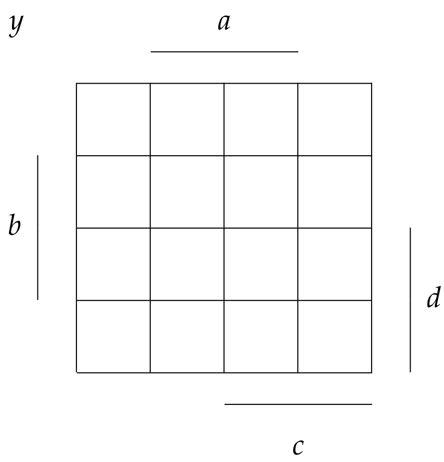
C) Gegeben sei die Logikfunktion $G(c, b, a) = (a \wedge \bar{c}) \vee (b \wedge (c \oplus a))$. Entwickeln Sie diese Funktion mit Hilfe des Entwicklungssatzes der Schaltalgebra sukzessive nach den drei Variablen und vervollständigen Sie die nachfolgende Tabelle mit den Restfunktionen.

$G_{DNF}(c, b, a) = [\,\bar{c} \wedge G(0, b, a)\,] \vee [\,c \wedge G(1, b, a)\,]$ mit	
$G(0, b, a) =$	$G(1, b, a) =$
$G(0, b, a) = [\bar{b} \wedge G(0, 0, a)] \vee [b \wedge G(0, 1, a)]$	$G(1, b, a) = [\bar{b} \wedge G(1, 0, a)] \vee [b \wedge G(0, 1, a)]$
$G(0, 0, a) =$	$G(1, 0, a) =$
$G(0, 1, a) =$	$G(1, 1, a) =$
$G(0, 0, a) = [\bar{a} \wedge G(0, 0, 0)] \vee [a \wedge G(0, 0, 1)]$	$G(1, 0, a) = [\bar{a} \wedge G(1, 0, 0)] \vee [a \wedge G(1, 0, 1)]$
$G(0, 0, 0) =$	$G(1, 0, 0) =$
$G(0, 0, 1) =$	$G(1, 0, 1) =$
$G(0, 1, a) = [\bar{a} \wedge G(0, 1, 0)] \vee [a \wedge G(0, 1, 1)]$	$G(1, 1, a) = [\bar{a} \wedge G(1, 1, 0)] \vee [a \wedge G(1, 1, 1)]$
$G(0, 1, 0) =$	$G(1, 1, 0) =$
$G(0, 1, 1) =$	$G(1, 1, 1) =$

Aufgabe 6: Minimierung

Aufgabe 6.1: Symmetriediagramme

A) Gegeben sei eine Schaltfunktion y wie folgt:
$y = (a \vee b) \wedge (a \vee d) \wedge (b \vee c) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b} \vee \overline{c})$
Füllen Sie das leere Symmetriediagramm anhand der gegebenen Schaltfunktion y aus. Es sollen dabei alle Kästchen ausgefüllt werden. Das Symmetriediagramm muss am Ende vollständig definiert sein.



B) Liegt die Schaltfunktion y aus Aufgabenteil A) in minimaler Form vor? Begründen Sie.

C) Bestimmen Sie aus dem folgenden Symmetriediagramm die disjunktive Minimalform (DMF) der dargestellten Schaltfunktion y in Abhängigkeit der Variablen a, b, c, d und e.

y

					e	e	e	e	
		a	a			a	a		
	0_{0}	1_{1}	$-_{5}$	1_{4}	$-_{20}$	$-_{21}$	0_{17}	0_{16}	
b	0_{2}	$-_{3}$	1_{7}	1_{6}	1_{22}	$-_{23}$	1_{19}	1_{18}	
b	1_{10}	1_{11}	1_{15}	0_{14}	0_{30}	$-_{31}$	$-_{27}$	1_{26}	d
	0_{8}	$-_{9}$	1_{13}	0_{12}	0_{28}	1_{29}	0_{25}	0_{24}	d
			c	c	c	c			

D) Welche Ordnung besitzt das Symmetriediagramm aus Aufgabe C)?

E) Um die Schaltfunktion aus Aufgabe C) effizient in Hardware zu realisieren, kann sie in ein anderes Basissystem überführt werden. Nennen Sie ein solches Bassissystem der Schaltalgebra, das mit einem einzigen Operator auskommt.

Aufgabe 6.2: Nelson/Petrick Verfahren

A) Im folgenden sei eine Überdeckungstabelle gegeben:

	A	B	C	D	E	F	G
p_1		X	X			X	
p_2	X	X			X		
p_3			X				X
p_4	X		X				X
p_5				X			
p_6		X			X	X	

Tabelle 6.1: Überdeckungstabelle des Petrick-Verfahrens

Wenden Sie die Regeln zur Streichung von Kernen sowie die Spalten- und Zeilendominanzregeln des Petrick-Verfahrens auf Tabelle 6.1 an. Gehen Sie dabei wie in der Vorlesung vorgestellt jedes Mal in der Reihenfolge: **Kerne** → **Spalten** → **Zeilen** vor, d.h. die Regel zur Spaltendominanz kann nur angewendet werden wenn es aktuell keinen Kern gibt und Zeilendominanz nur wenn sich weder die Regeln zur Kern- noch zur Spaltendominanz anwenden lassen. Die Kosten jedes Terms beträgt 1, demnach ist die Lösung mit den wenigsten Termen zu bevorzugen. Tragen sie in die unten stehende Tabelle alle Schritte mit der jeweils angewendeten Regel und der streichbaren Spalten und Zeilen an. Geben Sie unter "Begründungän wieso die von Ihnen genannten Zeilen oder Spalten gestrichen werden können, also welche andere Zeile/Spalte sie dominiert bzw. von welcher sie dominiert werden.

Regel	Streichbar	Begründung

Welches Ergebnis erhalten Sie, nachdem Sie die Minimierung vollständig durchgeführt haben?

Aufgabe 7: CMOS und Gatter

Aufgabe 7.1: Allgemeine Fragen

A) Welches grundsätzliche Prinzip unterscheidet NMOS-Schaltungen (nach dem Einschalterprinzip) von CMOS Schaltungen?

B) Zeichnen Sie eine NAND-Schaltung mit den zwei Eingängen a und b und dem Ausgang y in CMOS Technologie. Verwenden Sie **positive Logik**, d.h. der CMOS-Pegel V_{DD} entspricht einer logischen '1'.

C) Zeichnen Sie erneut eine NAND-Schaltung mit den zwei Eingängen a und b und dem Ausgang y in CMOS Technologie. Verwenden Sie nun **negative Logik**, d.h. der CMOS-Pegel V_{DD} entspricht einer logischen '0'.

Aufgabe 7.2: Schaltungsanalyse

Hinweis: Verwenden Sie für die folgenden Aufgaben eine **positive Logik**, d.h. der CMOS-Pegel V_{DD} entspricht einer logischen '1'.

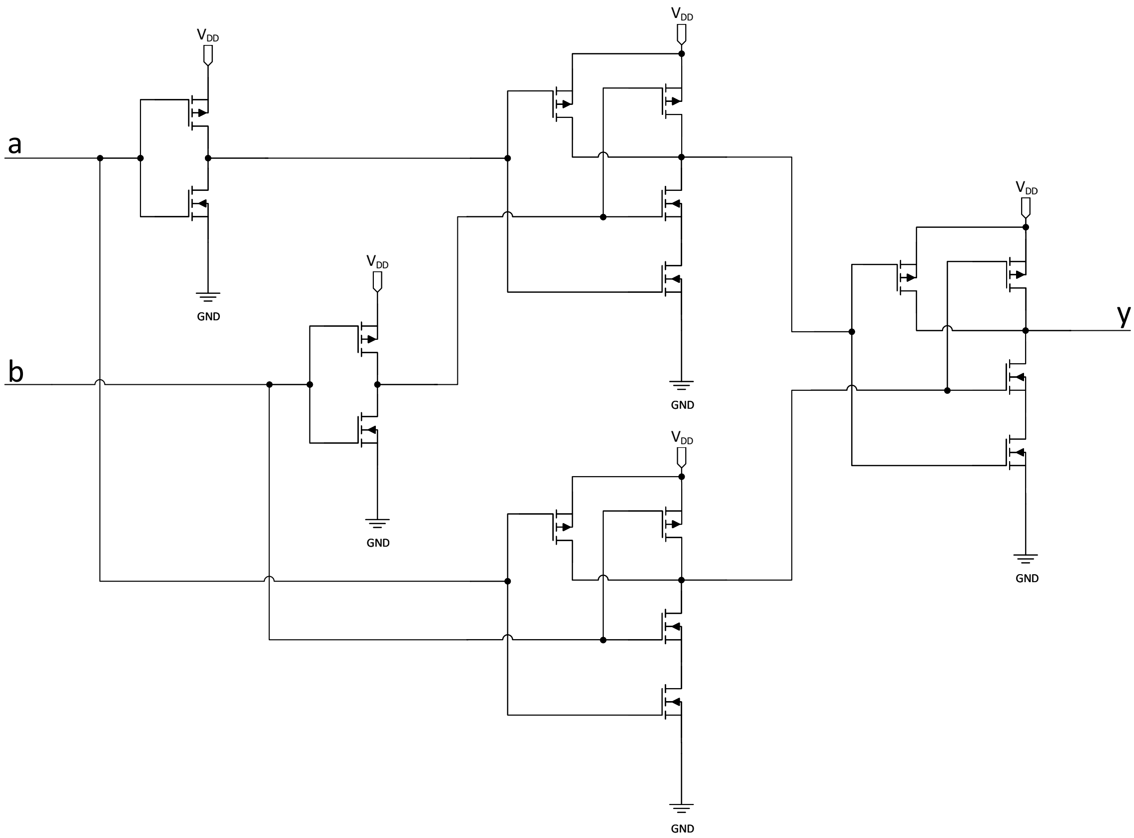


Abbildung 7.1: Schaltung 1

A) Zeichnen Sie einen Schaltplan aus Gattern zu der CMOS-Schaltung in Abbildung 7.1. Inverter dürfen als Inverterkreise am Eingang eines Gatters dargestellt werden.

B) Geben Sie die Schaltfunktion $y = f(a, b)$ zur Schaltung in Abbildung 7.1 an und formen Sie diese auf die minimale DNF um.

C) Um welche aus der Vorlesung bekannte Funktion handelt es sich?

Für die folgenden Teilaufgaben soll angenommen werden, dass die Eingangskombination $(a, b) = (0, 0)$ nicht auftreten kann.

D) Wie können Sie diese Information nutzen, um die Schaltung zu optimieren?

E) Geben Sie die mit dieser Information reduzierte, neue DNF an.

F) Wie viele Transistoren weniger werden für die CMOS-Realisierung der neuen DNF im Vergleich zu Abbildung 7.1 benötigt?

Aufgabe 7.3: Schaltungssynthese

Hinweis: Verwenden Sie für die folgenden Aufgaben eine **positive Logik**, d.h. der CMOS-Pegel V_{DD} entspricht einer logischen '1'.

A) Geben Sie die charakteristische Gleichung eines RS-Flipflops an.

B) Formen Sie diese Gleichung um, sodass nur NAND-, NOR- und NOT-Operationen verwendet werden.

C) Zeichnen Sie den dazugehörigen Schaltplan aus NAND-, NOR- und Inverter-Gattern.

D) Zeichnen Sie die dazugehörige CMOS-Schaltung.

E) Wie könnten Sie mit der Schaltung aus Aufgabe D) auf einfache Weise ein RS-FlipFlop in CMOS realisieren?

Aufgabe 8: Mengen, Relationen und Graphen

Aufgabe 8.1: Mengen

Gegeben sind die folgenden Mengen:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, a, w, u\}$$
$$B = \{2, 3, 8\}$$
$$C = \{6, a, 9\}$$
$$D = \left\{x \mid x^2 = 4\right\}$$

A) Bestimmen Sie die Ergebnisse der folgenden Mengenoperationen

$$B \cup D =$$

$$B \times C =$$

$$\mathcal{P}(B) =$$

$$A \cap D =$$

$$\mid B \mid =$$

$$\mid C \cap C_C(C) \mid =$$

B) Gesucht ist eine Menge E. Bekannt sind die folgenden Relationen: $\mid B \times E \mid = 3$ und $B \cup E = \{2, 3, 8\}$. Gegeben Sie die Elemente der Menge E an. Begründen Sie Ihre Antwort kurz mit dem Lösungsweg.

Aufgabe 8.2: Graphentheorie und Relationen

Gegeben ist der folgende Graph G (Abbildung 8.2)

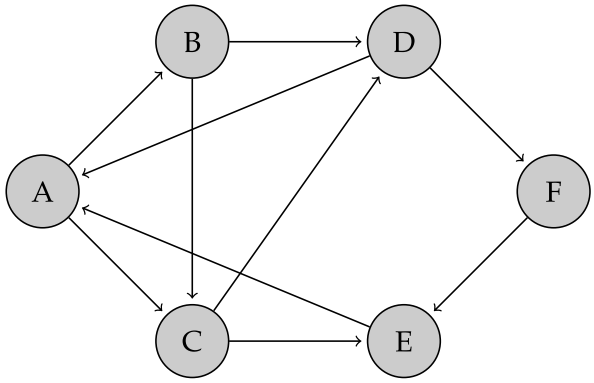


Abbildung 8.1: Gerichteter Graph G

A) Ist der Graph G planar? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

B) Bestimmen Sie die Adjazenzmatrix des Graphen G

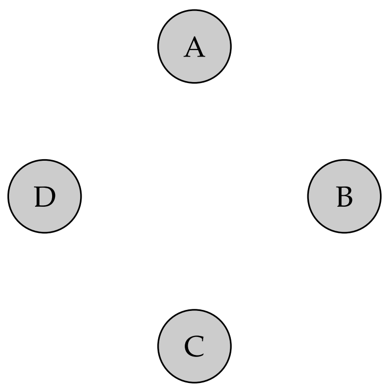
	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
A						
B						
C						
D						
E						
F						

Tabelle 8.1: Adjazenzmatrix von G

C) Geben Sie die jeweils eine Kantenfolge mit den folgenden Eigenschaften an: Zyklusprogression mit der Länge 3, Wegprogression mit der Länge 3. Starten Sie Ihre Kantenfolge jeweils beim Knoten `A`

D) Nennen Sie eine Art von Kantenprogression die in einem gerichteten Baum nicht vorkommen darf.

E) Vervollständen Sie den unten abgebildeten Graphen, sodass er die folgenden Eigenschaften erfüllt: 4 Knoten, 5 Kanten, transitiv und gerichtet



F) Was müssen Sie am Graph aus Aufgabenteil E verändern, damit sie einen reflexiven Graphen erhalten. Geben Sie dazu auch die Definion der Reflexivität an.

Zusatzblatt zu Aufgabe $\boxed{}$: