Prof. Dr.-Ing. J. Becker

Digitaltechnik

3. Tutorium - Lösung

Institut für Technik der Informationsverarbeitung, Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

1. Aufgabe: Zahlenkodierung

Eine Serie von drei mehrstelligen Zahlen ist im BCD-System gegeben.

Zahl a: 0010 0100 1000
Zahl b: 0101 0001 0101
Zahl c: 0001 0011 1001

1.1 Führen Sie eine Addition aller drei Zahlen durch (a + b + c).

Im BCD-System entsprechen je 4 Ziffern einer Ziffer im Dezimalsystem von 0 bis 9. Somit muss man die Pseudotetraden beachten und bei Werten über 1001 mit einer Addition von 0110 korrigieren.

	0010	0100	1000	248_D
+	0101	0001	0101	515_D
	0111	0101	1101	
+			0110	
			1	
	0111	0110	0011	763_D
+	0001	0011	1001	139_D
	1000	1001	1100	
+			0110	
			1	
	1000	1010	0010	
+		0110		
		1		
	1001	0000	0010	902_D

© ITIV

1.2 Wandeln Sie die Zahlen ins Hexadezimalsystem und führen Sie erneut die Addition a + b+ c durch.

Darstellen der BCD-Zeichen im Dezimalsystem und Umrechnen ins Hex.
Beim Addieren im Hex-System ist der Übertrag zu beachten bei einer Zahl größer als F(15). Bsp.: B + B = 11 + 11 = 22 = 16 + 6 -> Stelle = 6, Übertrag = 1

0010 0100 1000 = 248_D
0101 0001 0101 = 515_D
0001 0011 1001 = 139_D

248 : 16 = 15 R 8	515 : 16 = 32 R 3	139 : 16 = 8 R 11
15 : 16 = 0 R 15	32 : 16 = 2 R 0	8 : 16 = 0 R 8
	2 : 16 = 0 R 2	
$F8_H$	203_H	$8B_H$

```
  F8
+ 203
----
  2FB = 2 * 16² + 15 * 16 + 11 = 512 + 240 + 11 = 763
+  8B
  1 1
----
  386 = 3 * 16² + 8 * 16 + 6 = 768 + 128 + 6 = 902
```

1.3 Wandeln Sie die Zahlen a und b mithilfe des Stibitz-Codes um und führen Sie die Addition a + b durch.

(*Hinweis*: Gemäß Vorlesung gilt für das Zwischenergebnis der Stibitz-Addition: „bei Übertrag: Addition von $0011_{B,}$ ohne Übertrag: Addition von 1101_B **ohne** Übertrag“)

Umwandlung in den Stibitz-Code durch Addition von 0011 (=3_D) zur jeweiligen BCD-Zahl:

a:	0101 0111 1011	248_D
b:	1000 0100 1000	515_D

```
        0101 0111  1011
+       1000 0100₁1000
-------------------------
        1101 1100  0011     bei Übertrag: Addition von 0011B,
+    ₁1101₁1101  0011     ohne Übertrag: Addition von 1101B ohne Übertrag
-------------------------
        1010 1001  0110     763D
```

2. Aufgabe: Mengen & Relationen

2.1 Geben Sie die mathematische Definition für die folgenden Eigenschaften einer Relation an.

Reflexivität:	x α x, für alle x ε M
Symmetrie:	aus x α y folgt y α x, für alle x,y ε M
Antisymmetrie:	aus x α y und y α x folgt x = y, für alle x,y ε M
Transitivität:	aus x α y und y α z folgt x α z, für alle x,y,z ε M

2.2 Geben Sie an, welche der oben genannten Eigenschaften einer Relation auf die einzelnen Aussagen zutreffen.

“ist kleiner oder gleich“	reflexiv, antisymmetrisch, transitiv
“Gleichheit“	reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv
“ist ein Vielfaches von“	reflexiv, antisymmetrisch, transitiv

Gegeben sind die beiden abzählbaren Mengen A und B. Die Elemente der Menge A sind mit:

$$A = \{1, 5, 7\}$$

bekannt. Außerdem gelten die folgenden beiden Beziehungen:

$$|A \times B| = 6 \qquad C_{AUB}(A) = \{3\}$$

2.3 Geben Sie an, wie viele Elemente die gesuchte Menge B besitzen muss.

|A x B| = |A| * |B|, mit |A| = 3 folgt |B| = 2, damit besitzt die Menge B zwei Elementen.

2.4 Nennen Sie alle Lösungsmöglichkeiten für die Menge B.

B = {1,3} B = {5,3} B = {7,3}

3. Aufgabe: Rechnungen in verschiedenen Zahlenformaten

3.1 Führen Sie die folgenden Rechnungen im Binärsystem durch und wandeln Sie erst abschließend das Ergebnis in das Dezimalsystem. Stellen Sie ihren Lösungsweg ausführlich dar.

i. Subtrahieren Sie die Zahl 139_D von der Zahl 71_D.

Hinweis: Nutzen Sie das 2er-Komplement von 139_D und addieren Sie die Binärzahlen.

$71_D = 01000111_B$

$139_D = 10001011_B$

Bilden des Zweierkomplements von $139_{D:}$

$01110100_B + 1_B = 01110101_B$

Addieren des Zweierkomplements von 139_D zu 71_D:

$$\begin{array}{rcccccccc} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ + & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & & & & & 1 & 1 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Das Ergebnis ist negativ. Den Betrag des Ergebnisses erhält man durch Bilden des Zweierkomplements des Ergebnisses:

$| 71_D - 139_D | = 01000011_B + 1_B$

$= 01000100_B$

$= 68_D$

Das Endergebnis lautet somit -68_D

ii. Multiplizieren Sie die Zahl 19_D mit der Zahl 23_D.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \bullet & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline + & & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ + & & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ + & & & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \quad = 23_D \bullet 19_D$$

$$= 437_D$$

Zur Verwendung in einem Microcontroller wurde eine platzsparende Darstellung von Fließkommazahlen in einem einzigen Byte entwickelt. Das höchstwertige Bit stellt das Vorzeichen V dar, die vier niederwertigsten Bits die Mantisse M und die drei Bits in der Mitte den Exponenten E (siehe Abbildung 1).

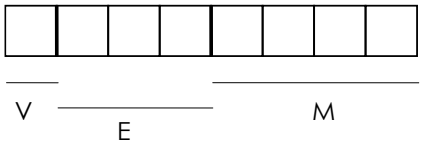

Abbildung 1: 8-bit-Fließkommazahl

Für alle möglichen binären Belegungen ergibt sich der Dezimalwert Z aus nachstehender Formel (vgl. IEEE-Fließkommazahl):

$$Z_D = (-1)^V \cdot 2^{E-3} \cdot (1,M)$$

3.2 Berechnen Sie den Dezimalwert der Belegung 10011000.

Z = (-1) • $2^{(1-3)}$ • 1,5 = (-1) • $2^{(-2)}$ • 1,5

= (-1) • 0,25 • 1,5

= - 0,375

3.3 Geben Sie die größte Dezimalzahl an, die mit dieser 8-Bit-Fließkommazahl dargestellt werden kann. Geben Sie die Zahl in 8-Bit-Fließkomma- und Dezimaldarstellung an! Geben Sie Ihren Rechenweg an!

Z=(+1) • $2^{(7-3)}$ • (1,0+$2^{(-1)}$+$2^{(-2)}$+$2^{(-3)}$+$2^{(-4)}$) = (+1) • $2^{(4)}$ • (1,0+0,5+0,25+0,125+(1/16))

→ V = 0 $_D$; E = 7 $_D$; M = 1,0+ (1/2) +(1/4)+(1/8)+(1/16) $_D$

→ V = 0 $_B$; E = 111 $_B$; M = 1111 $_B$

Z_{8Fkz} = 01111111 **Z_{Dez}** = $2^{(4)}$ • 1+(15/16) =16 • 31/16 = 31

3.4 Geben Sie die **größte negative** Dezimalzahl an, die mit dieser 8-Bit-Fließkommazahl dargestellt werden kann. Geben Sie Ihren Rechenweg an!

Z=(-1) • $2^{(0-3)}$ • 1,0 = (-1) • $2^{(-3)}$ • 1,0

→ V = 1 $_D$; E = 0 $_D$; M = 0 $_D$

→ V = 1 $_B$; E = 000 $_B$; M = 0000 $_B$

Z_{8Fkz} = 10000000 **Z_{Dez}** = -$2^{(-3)}$ • 1,0 = -(1/8) = - 0,125

3.5 Welche elementare Zahl kann mit der oben vereinbarten Interpretation der acht Bits nicht dargestellt werden?

Die Zahl 0 kann nicht dargestellt werden.

4. Aufgabe (*Zusatzaufgabe)*: Rechnungen in verschiedenen Zahlenformaten

4.1 Im Folgenden sollen alle Ziffern größer als 9_D, sofern sie im jeweiligen Zahlensystem vorkommen, in Anlehnung an die Schreibweise des Hexadezimalsystems dargestellt werden, also Ziffer „A“ entspricht 10_D, Ziffer „B“ entspricht 11_D, Ziffer „J“ entspricht 19_D usw.

A) wandeln Sie die Zahl $311A0_{11}$ in das Nonalsystem (Basis 9) um

Zwischenschritt über das Dezimalsystem:

$311A0_{11} = [0\cdot11^0 + 10\cdot11^1 + 1\cdot11^2 + 1\cdot11^3 + 3\cdot11^4]_D = [110+121+1331+43923]_D$

$= 45485_D;$

Umwandlung in das Nonalsystem (der Index „D“ für das Dezimalsystem wird im folgenden vernachlässigt):

45489 : 9 = 5053 Rest 8;

5053 : 9 = 561 Rest 4;

561 : 9 = 62 Rest 3;

62 : 9 = 6 Rest 8;

6 : 9 = 0 Rest 6;

Damit ergibt sich: $311A0_{11} = 68348_9$.

B) wandeln Sie die Zahl $7EF73_{20}$ in jenes Zahlensystem mit der Basis 35 um

Gemäß Aufgabenstellung gilt $E_{20} = 14_D$ und $F_{20} = 15_D$.

Zwischenschritt über das Dezimalsystem:

$7EF73_{20} = [3\cdot20^0 + 7\cdot20^1 + 15\cdot20^2 + 14\cdot20^3 + 7\cdot20^4]_D$

$= [3 + 140 + 6000 + 112000 + 1120000]_D$

$= 1238143_D;$

Umwandlung in das Zahlensystem mit Basis 35 (der Index „D“ für das Dezimalsystem wird im folgenden vernachlässigt):

1238143 : 35 = 35375 Rest 18 → „I“;

35375 : 35 = 1010 Rest 25 → „P“;

1010 : 35 = 28 Rest 30 → „U“;

28 : 35 = 0 Rest 28 → „S“;

Damit ergibt sich: $7EF73_{20} = SUPI_{35}$.

4.2 Subtrahieren Sie nun die Zahl 861_D von der Zahl 977_D

A) im Dualsystem,

$977_D = 001111010001$
$861_D = 001101011101$
$-861_D = 111111111111 – 001101011101 + 1 = 110010100011$

001111010001
+110010100011

000001110100 $= 116_D$

B) im Oktalsystem,

$977_D = 1721_O$
$861_D = 1535_O$

1721_O
-1535_O

164_O

Eine andere Möglichkeit zur Subtraktion ist die Komplementbildung. Bei Oktalzahlen das K7 und bei Hexzahlen das K15. Dieses berechnet man jeweils durch die Invertierung der Zahl (d.h. bei K7 7 minus der Wertigkeit der aktuellen Stelle) und Addition von +1. Also z.B. 1535O in K7 Schreibweise ist gleich 6242O + 1O, also 6243O. Danach addiert man einfach das Komplement zur anderen gegebenen Zahl. Dabei muss man die gleichen Rechenregeln wie bei Binärzahlen beachten, wie z.B. den Übertrag betreffend.

C) im Hexadezimalsystem und 0001 0001 0110 $= 116_D$

$977_D = 3D1_H$
$861_D = 35D_H$

$3D1_H$
$- 35D_H$

074_H

D) im BCD-Code.

$977_D = 1001\ 0111\ 0111$
$861_D = 1000\ 0110\ 0001$