Prof. Dr.-Ing. J. Becker

Digitaltechnik

4. Tutorium - Lösung

Institut für Technik der Informationsverarbeitung, Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

1. Aufgabe: Graphentheorie

1.1 Gegeben ist die unten abgebildete Schaltung. Erstellen Sie einen gerichteten Graphen für diese Schaltung:

Unterschiedliche Potentiale der Schaltung → Knoten des Graphen

Bauelemente der Schaltung → gerichtete Kanten, wobei die Richtung einem möglichen Stromfluss entspricht.

Hinweis: Der Feldeffekttransistor kann vereinfacht als gesteuerter Widerstand zwischen D und S betrachtet werden, wobei der Wert von der Spannung am Knoten G abhängt.

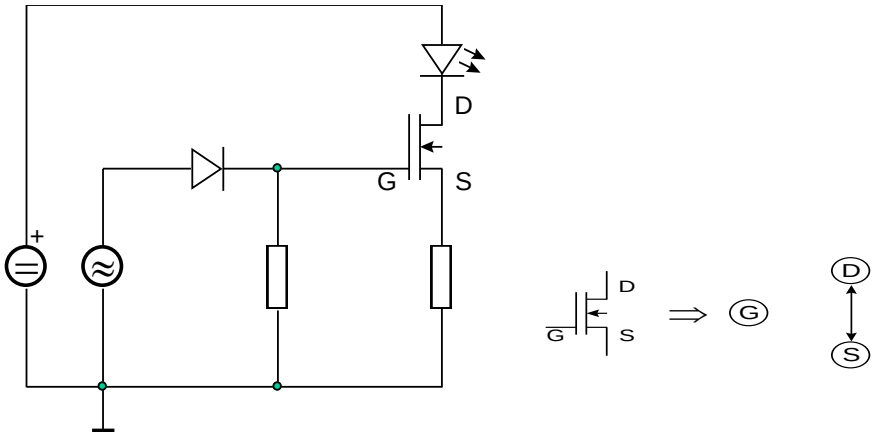
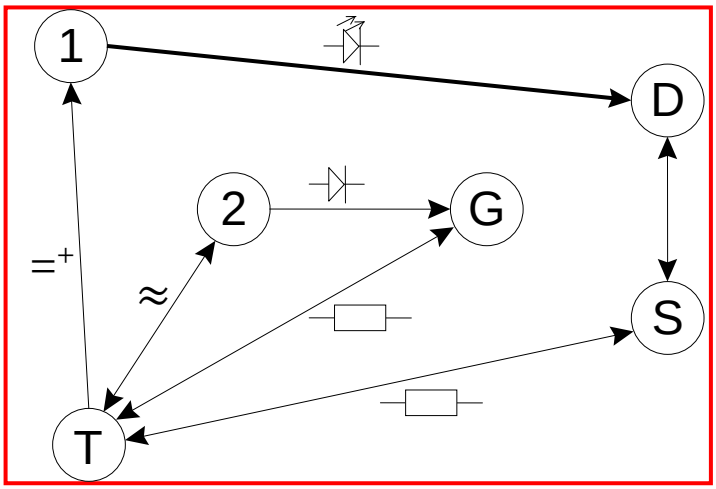


Abbildung 1: Diskrete Schaltung



1.2 Ist der entstandene Graph streng zusammenhängend?

ja, Begründung: Es kann jeder Knoten über einen Kantenzug erreicht werden.

1.3 Gegeben ist das Blockschaltbild eines digitalen Systems mit den Baugruppen B1 bis B6. Um die Platzierung der Baugruppen auf der Platine zu optimieren, soll das Schaltbild in einen ungerichteten Graphen abgebildet werden. Die Baugruppen B1 bis B6 werden auf die Knoten 1 bis 6 abgebildet, die Verbindungen zwischen den Baugruppen sollen die Kanten des Graphen bilden. Die Eingangs- und Ausgangsvariablen sollen hierbei unberücksichtigt bleiben. Vervollständigen Sie dazu den Graphen G in Bild 2.3.

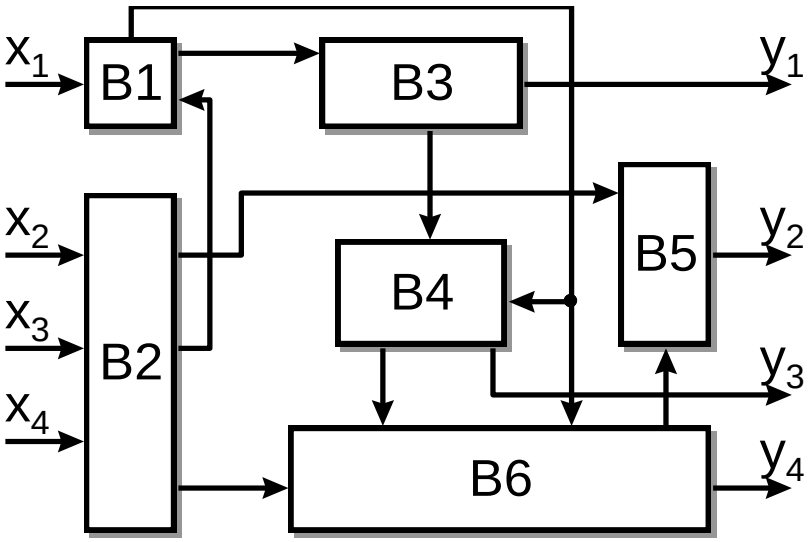


Abbildung 2: Blockschaltbild

© ITIV

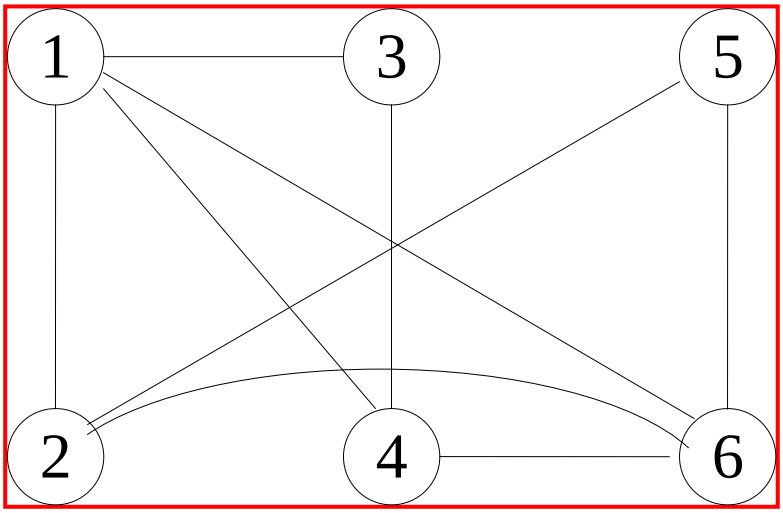


Abbildung 3: Graph G

© ITIV

Der Graph G soll nun in einen isomorphen planaren Graphen H umgeformt werden. Zeichnen Sie anschließend die optimierte Blockanordnung des Systems.

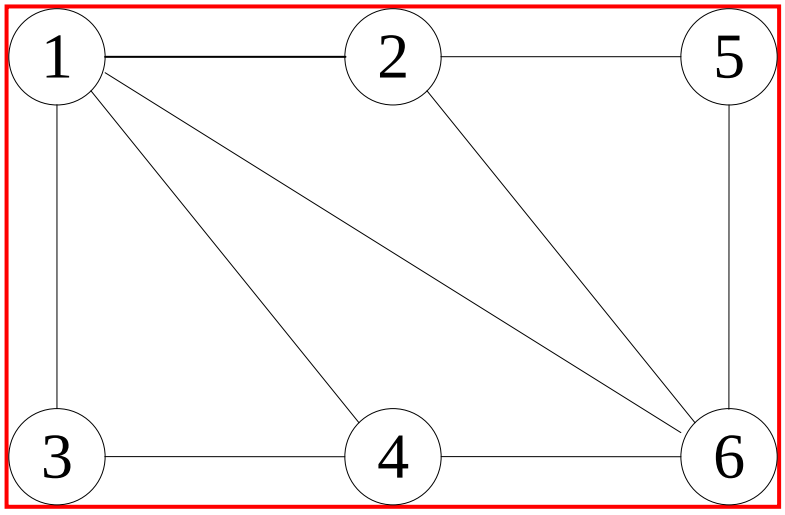
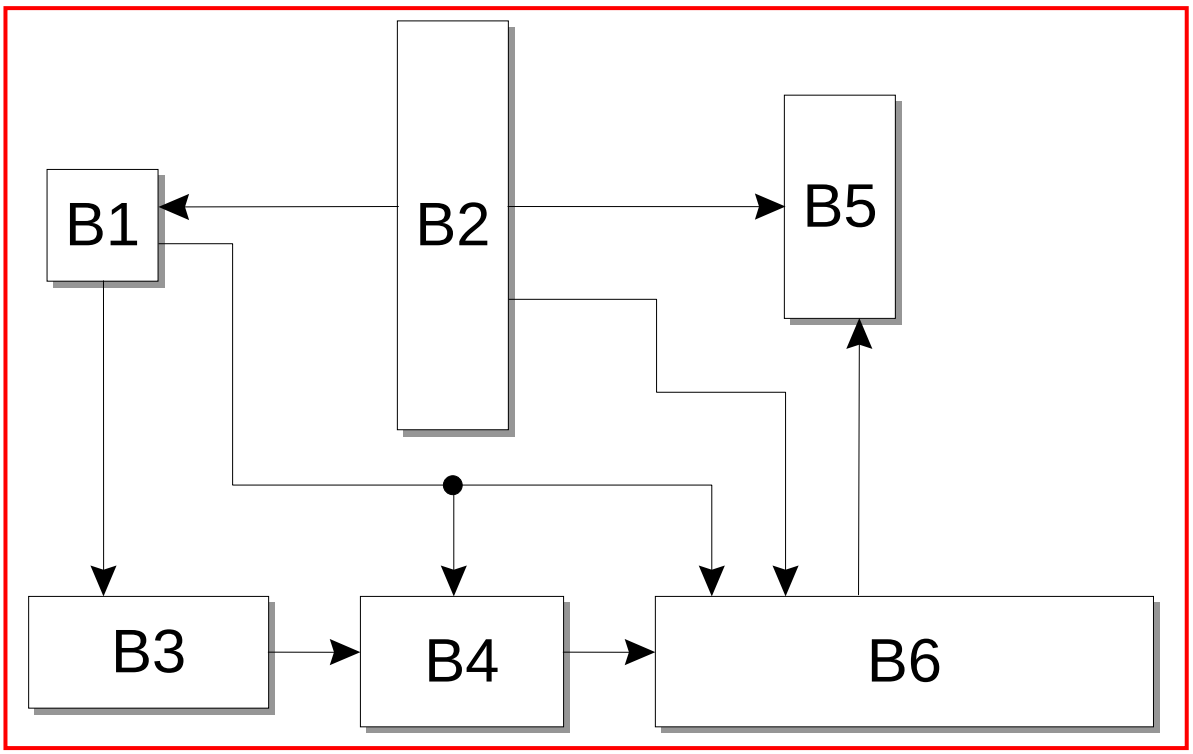


Abbildung 4: Graph H

Neue Blockanordnung:



© ITIV

2. Aufgabe: Relationen

Durch die unten dargestellte Matrix sei die Relation Y γ Z definiert.

Y\Z	a	b	c	d	e	f	g	h
a	X			X				
b	X	X	X	X	X	X	X	X
c			X					
d				X				
e			X		X		X	X
f				X		X		
g							X	
h			X					X

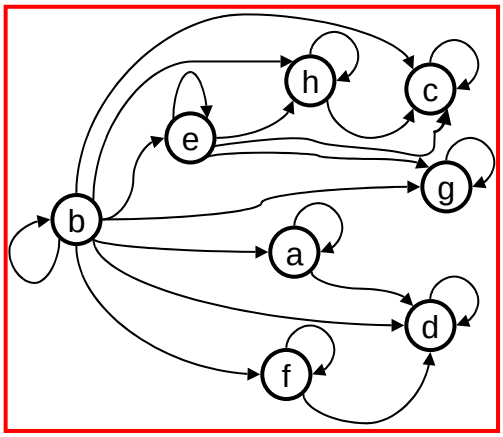
2.1 Welche Eigenschaften weist die Relation γ auf? Begründen Sie ihre Antworten.

Eigenschaft		Begründung
Reflexiv	ja	Hauptdiagonale vollständig besetzt.
Symmetrisch	nein	Die Hauptdiagonale ist für kein einziges Paar an Kreuzen Symmetrieachse ⇔ es gibt kein einziges Wertepaar (x,y), für das sowohl x γ y als auch y γ x gilt
Transitiv	ja	Es gilt z.B. e γ h und h γ c => e γ c (für alle Elemente erfüllt).

2.2 Um welche spezielle Relation handelt es sich? Begründen Sie ihre Antwort.

Antwort: Ordnungsrelation

2.3 Zeichnen Sie den gerichteten Graphen, der diese Relation darstellt.



© ITIV

3. Aufgabe: Relationen

3.1 Ein Aquarienfreund möchte sich neue Fische anschaffen und bittet Sie daher um Mithilfe. In der Tabelle sind verschiedenen Fischsorten und deren Eigenschaften angegeben. Stellen Sie eine Relationsmatrix für die Fischsorten auf, wobei ein X in der Matrix bedeutet, dass diese Sorten zusammen in einem Aquarium gehalten werden können.

Tier	**Temperatur**	**Süßwasser**	**Salzwasser**	**Bemerkungen**
Guppy	18°C – 30°C	X		Nicht mit Hechten zusammen
Skalar	24°C – 28°C	X		
Feuerfisch	24°C – 30°C		X	
Krebs	18°C – 28°C	X	X	Nicht mit Schnecken zusammen
Kugelfisch	22°C – 30°C		X	
Wels	18°C – 26°C	X		
Hecht	17°C – 22°C	X		Nicht mit Guppys zusammen
Schnecken	18°C – 28°C	X		Nicht mit Krebsen zusammen

Relation γ	G	Sk	F	Kr	Ku	W	H	Sc
Guppy	X	X		X		X		X
Skalar	X	X		X		X		X
Feuerfisch			X	X	X			
Krebs	X	X	X	X	X	X	X	
Kugelfisch			X	X	X			
Wels	X	X		X		X	X	X
Hecht				X		X	X	X
Schnecken	X	X				X	X	X

Hecht und Skalar nicht verträglich wg. Wassertemperatur!

3.2 Weist die Relation γ die Eigenschaften einer Verträglichkeitsrelation auf? Begründen Sie Ihre Antwort.

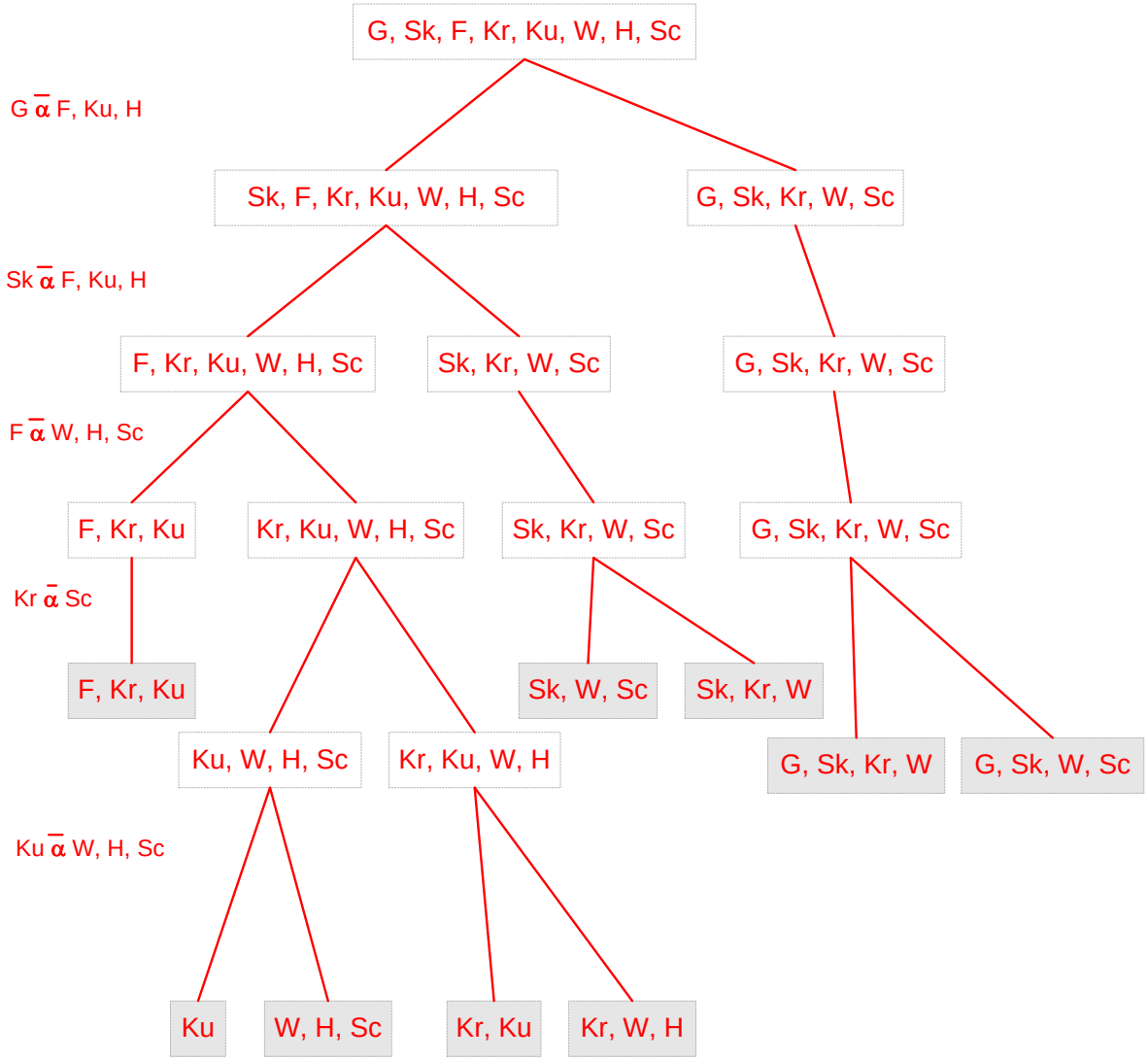
Eigenschaften: reflexiv, intransitiv, symmetrisch -> Verträglichkeitsrelation

© ITIV

3.3 Wie viele Aquarien müssen mindestens aufgestellt werden um alle Fische gleichzeitig und in jedem Aquarium eine maximale Anzahl an Fischarten gemeinsam zu halten? Und welche Fischarten kommen zusammen in diesen Aquarien vor? (*Hinweis:* Zur Lösung dieser Aufgabe bietet sich der Weg über die aus der Vorlesung bekannte Überdeckungstabelle an)

Unverträglichkeiten aus der Tabelle ablesen:

G $\overline{\alpha}$ F, Ku, H / Sk $\overline{\alpha}$ F, Ku, H / F $\overline{\alpha}$ W, H, Sc / Kr $\overline{\alpha}$ Sc / Ku $\overline{\alpha}$ W, H, Sc



© ITIV

Überdeckungstabelle bilden:

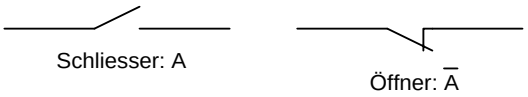
γ	G	Sk	F	Kr	Ku	W	H	Sc
F, Kr, Ku			X	X	X			
Sk, W, Sc		X				X		X
Sk, Kr, W		X		X		X		
G, Sk, Kr, W	X	X		X		X		
G, Sk, W, Sc	X	X				X		X
Ku					X			
W, H, Sc						X	X	X
Kr, Ku				X	X			
Kr, W, H				X		X	X	

Gestrichelte Linien : Zeilendominanz; Schraffierte Flächen: Wahlmöglichkeit

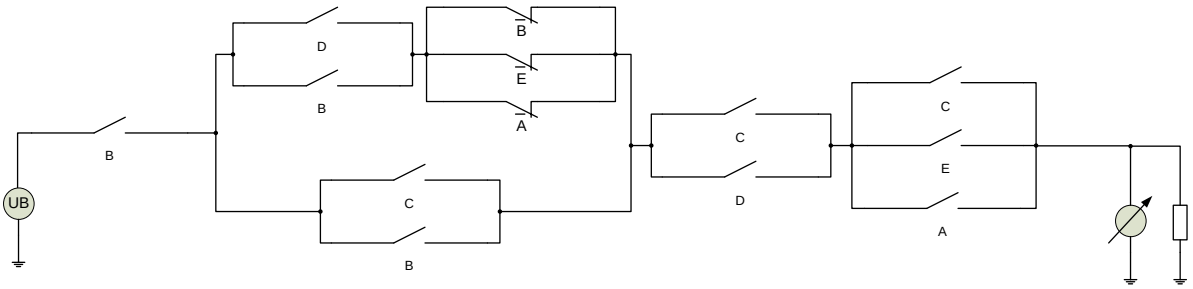
3 separate Aquarien sind minimal nötig!

4. Aufgabe: Schaltalgebra, Rechenregeln

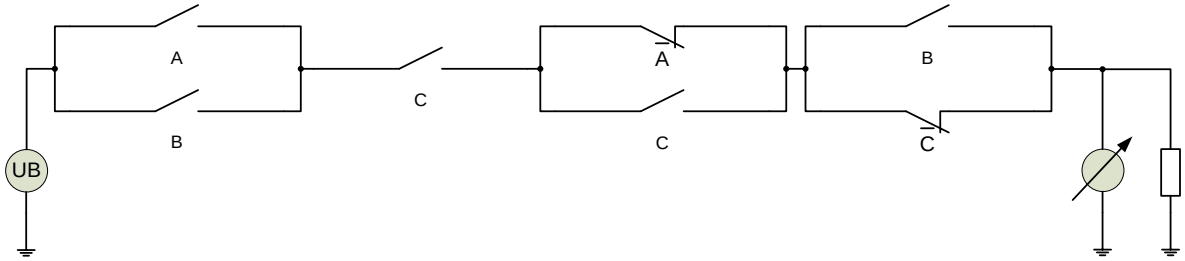
4.1 Formen Sie die nachfolgenden Relaisschaltnetze in schaltalgebraische Ausdrücke um



Y_1:



Y_2:



© ITIV

Schaltalgebraischer Ausdruck:

$$Y_1 = B \,\&\, [(B \vee D)\&(\bar{B} \vee \bar{E} \vee \bar{A}) \vee (B \vee C)] \,\&\, (C \vee D) \,\&\, (C \vee E \vee A)$$

$$Y_2 = (A \vee B) \,\&\, C \,\&\, (\bar{A} \vee C) \,\&\, (B \vee \bar{C})$$

4.2 *Zusatzaufgabe*: Vereinfachen Sie die entstandenen Ausdrücke nach den bekannten Formeln aus der Vorlesung

Vereinfachungsergebnis:

$$Y_1 = B \,\&\, [(B \vee D)\&(\bar{B} \vee \bar{E} \vee \bar{A}) \vee (B \vee C)] \,\&\, (C \vee D) \,\&\, (C \vee E \vee A)$$

$= B \,\&\, [(B \vee D)\&(\bar{B} \vee \bar{E} \vee \bar{A}) \vee B \vee C] \,\&\, (C \vee D) \,\&\, (C \vee E \vee A)$ R10a

$= B \;\&\; (C \vee D) \,\&\, (C \vee E \vee A)$ R11b (Absorptionsgesetz)

$= B \;\&\; [C \vee D\&(E \vee A)]$ H3 (Distributivgesetz)

$= BC \vee BD \,\&\, (E \vee A)$ H3 (Distributivgesetz)

$$Y_2 = (A \vee B) \,\&\, C \,\&\, (\bar{A} \vee C) \,\&\, (B \vee \bar{C})$$

$= (A \vee B) \,\&\, C \,\&\, (B \vee \bar{C})$ R11b (Absorptionsgesetz)

$= (A \vee B) \,\&\, (C\&B \vee C\&\bar{C})$ H3 (Distributivgesetz)

$= (A \vee B) \,\&\, C\&B$ R8b

$= C\&B$ R11b (Absorptionsgesetz)

© ITIV