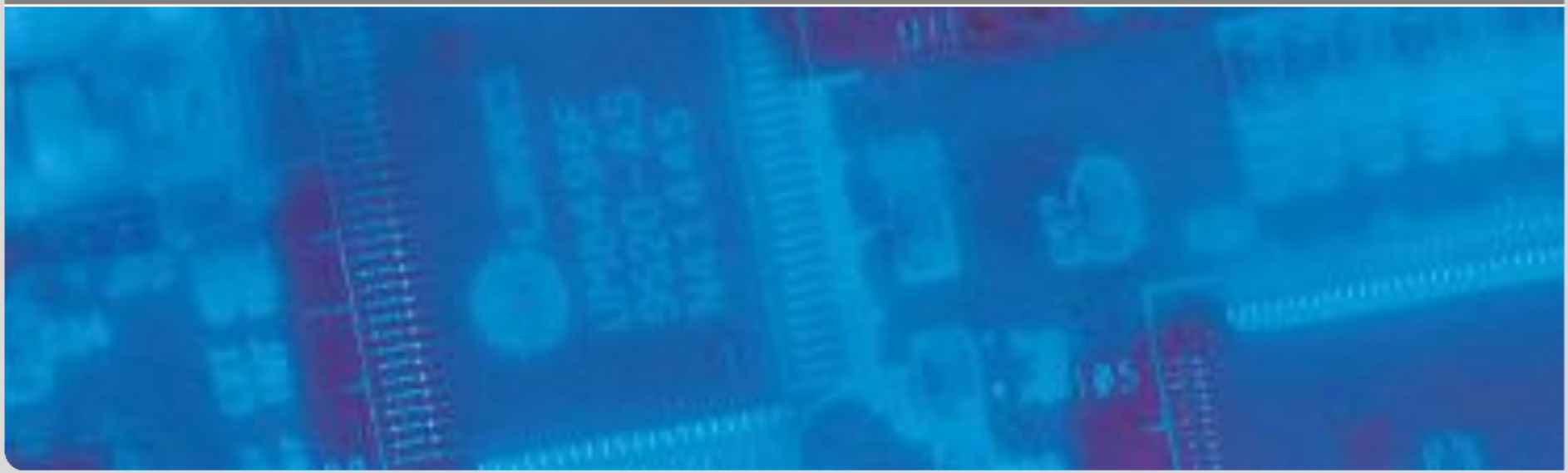
Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

1. Übung Digitaltechnik

Dipl.-Inform. Thomas Bruckschlögl

Institutsleitung
Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. J. Becker
Prof. Dr.-Ing. E. Sax
Prof. Dr. rer. nat. W. Stork



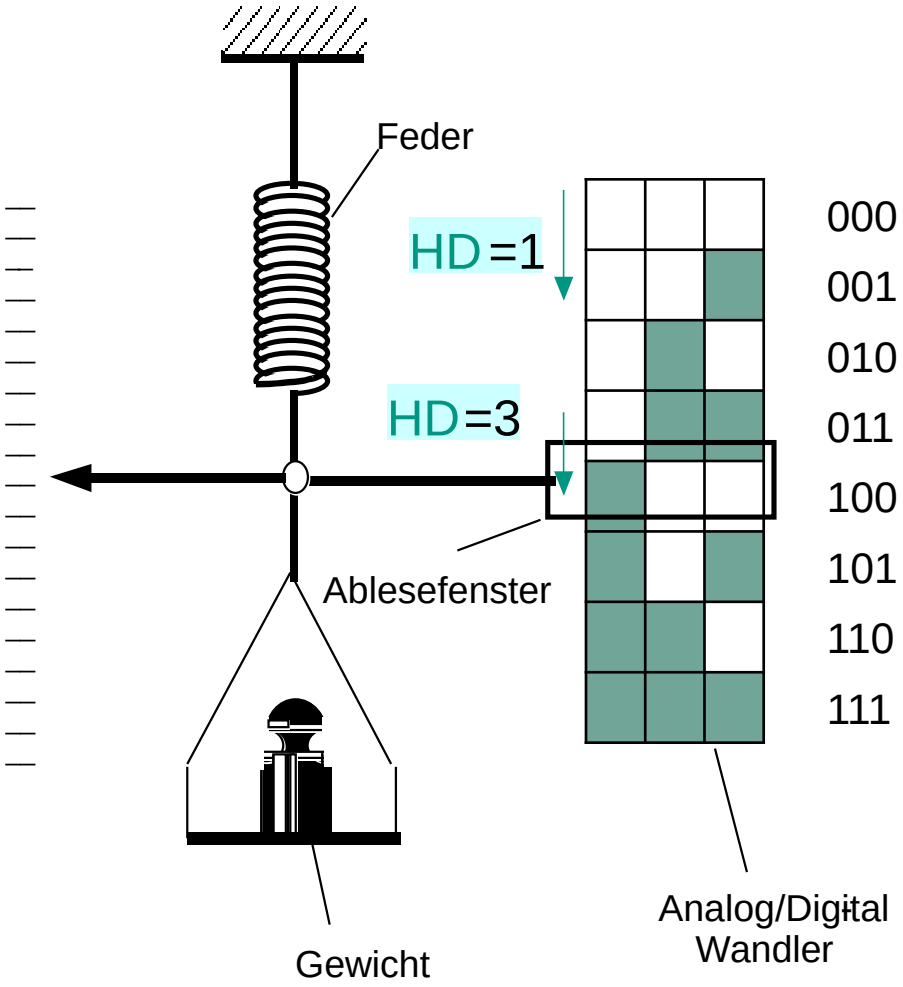
Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Institutsleitung
Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. J. Becker
Prof. Dr.-Ing. E. Sax
Prof. Dr. rer. nat. W. Stork

Signale und Digitalisierung

1. Aufgabe



- Annahme:

  Binärstellen schalten nicht völlig gleichzeitig um

- Mögliche fehlerhafte Binärdarstellungen während des Umschaltens:

- 011 ⇒ 100
- 111,001,010,101,110,000

1. Aufgabe

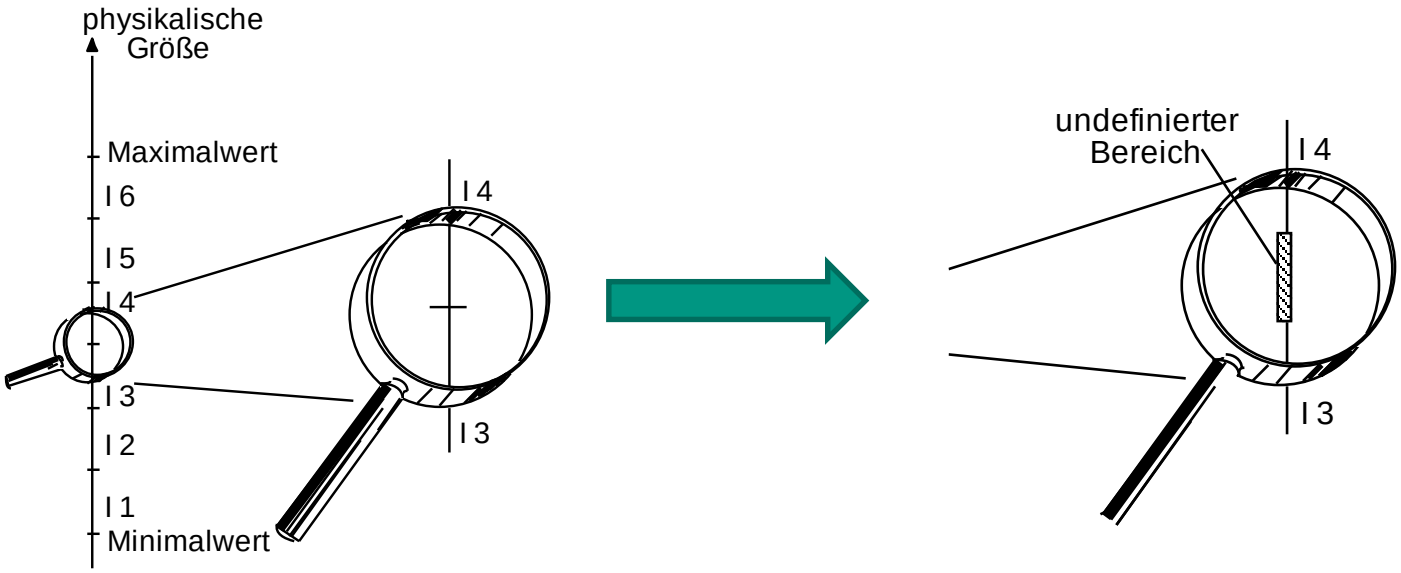
- Das Problem kann umschifft werden durch einschrittige Codes
- zwei benachbarte Codewörter besitzen stets eine Hammingdistanz von eins
- Beispiele für Gray-Codes (stetige, einschrittige Binärcodes):

linear, m=4		Zyklisch, m=3	
0:	0000	0:	000
1:	0001	1:	001
2:	0011	2:	011
3:	0010	3:	010
4:	0110	4:	110
5:	0111	5:	111
6:	0101	6:	101
7:	0100	7:	100
8:	1100	0:	000
9:	1101		

- Während des Umschaltens sind keine fehlerhaften Übergänge in andere Codewörter mehr möglich

1. Aufgabe

- An den Übergängen zweier Codewörter können undefinierte Bereiche eingefügt werden
- **keine Digitalwertzuordnung** in diesen Bereichen; sondern „Festhalten“ des alten Werts, bis der Bereich durchschritten wurde
- **„weiche“ Diskrimination** (Unterscheidung), kein hartes Umschalten

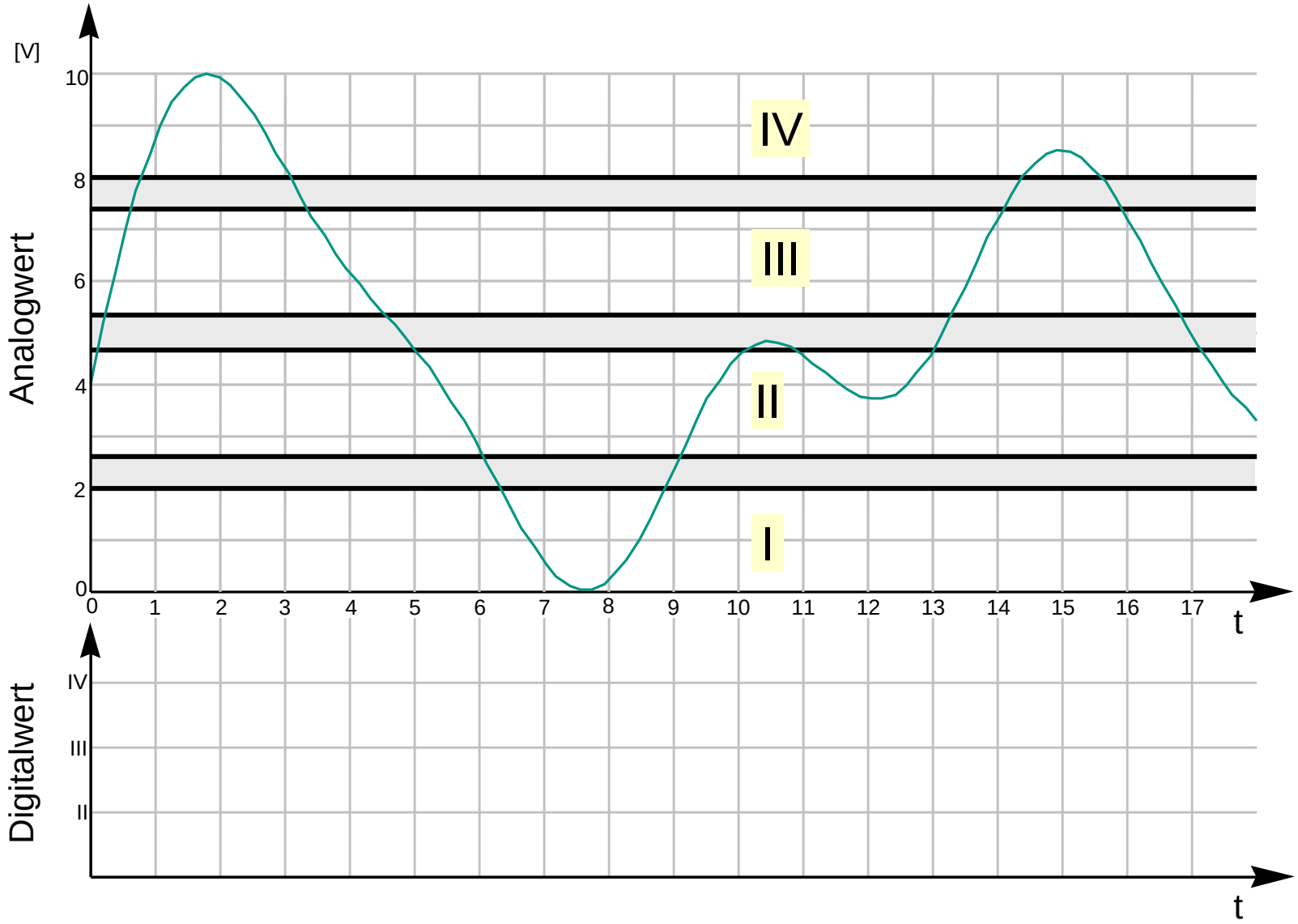


1. Aufgabe

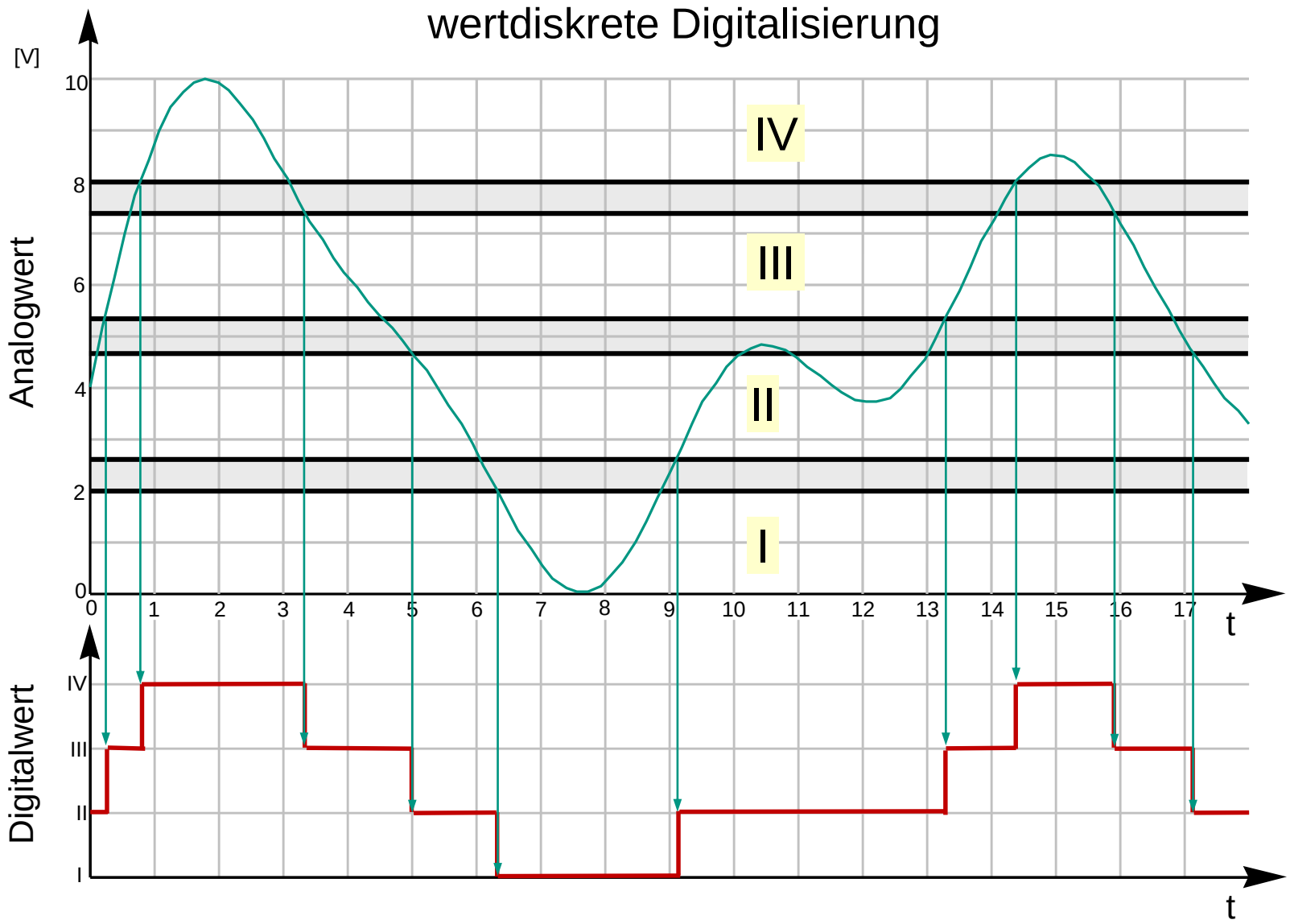
- Undefinierte Bereiche: Intervallgrenze (in °C) · 0,4% · 2

Anzeige	Intervalle	Code	Undefinierter Bereich
aus	< 18,5°	100	
19 °C	18,5° - 19,5°	000	0,148°
20 °C	19,5° - 20,5°	001	0,156°
21 °C	20,5° - 21,5°	011	0,164°
22 °C	21,5° - 22,5°	010	0,172°
23 °C	22,5° - 23,5°	110	0,180°
24 °C	23,5° - 24,5°	111	0,188°
25 °C	24,5° - 25,5°	101	0,196°
aus	> 25,5°	100	0,204°

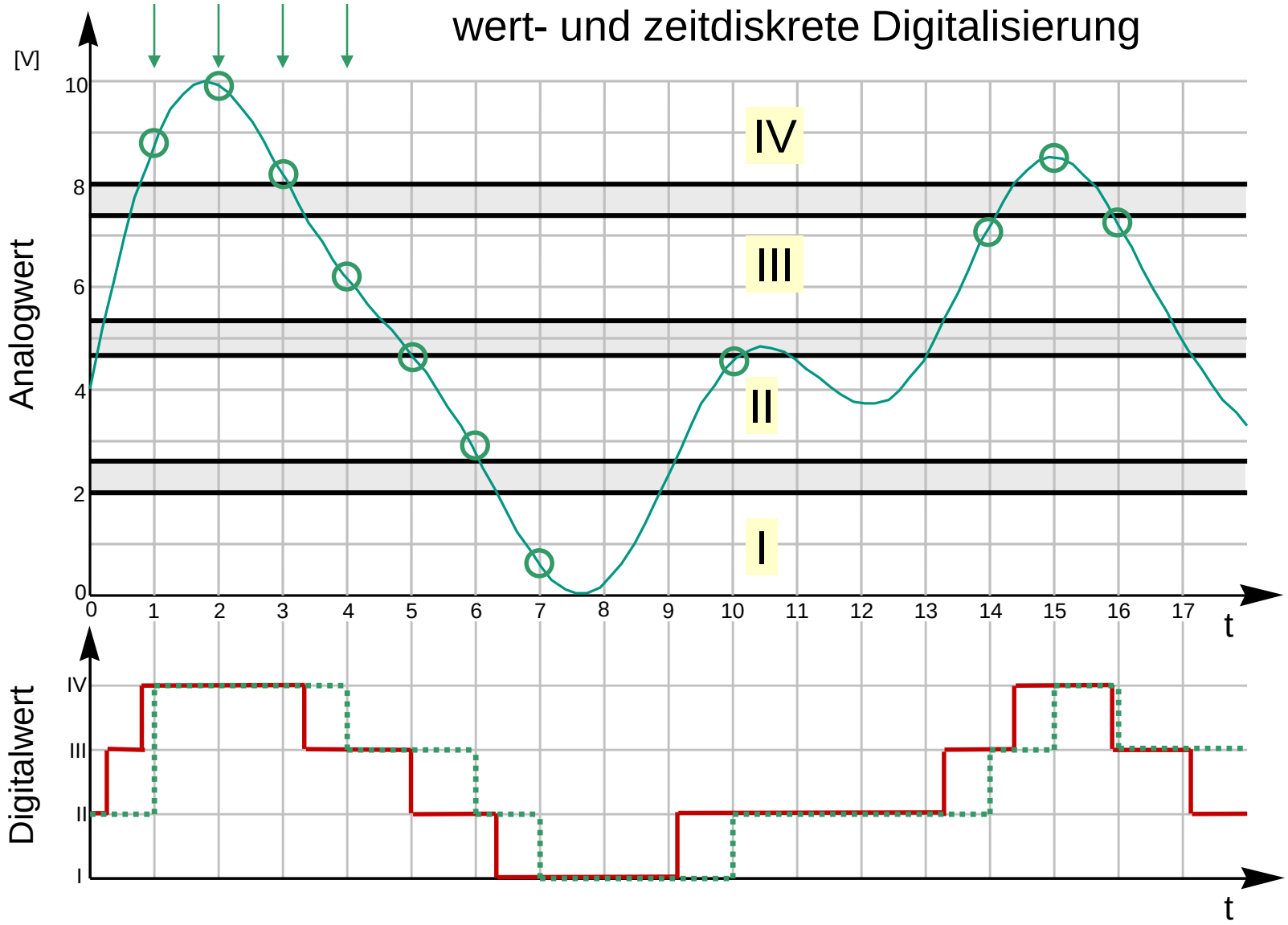
2.Aufgabe


[V]
10
8
6
4
2
0
Analogwert
IV
III
II
I
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17
t
Digitalwert
IV
III
II
t

2. Aufgabe


wertdiskrete Digitalisierung
[V]
Analogwert
10
8
6
4
2
0
IV
III
II
I
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17
t
Digitalwert
IV
III
II
I
t

2. Aufgabe


wert- und zeitdiskrete Digitalisierung
[V]
Analogwert
10
8
6
4
2
0
IV
III
II
I
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17
t
Digitalwert
IV
III
II
I
t

Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Institutsleitung
Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. J. Becker
Prof. Dr.-Ing. E. Sax
Prof. Dr. rer. nat. W. Stork

Fehlererkennung und -korrektur

(minimale) Hamming-Distanz

- **Definition**
  Hammingdistanz HD (auch Hammingabstand genannt)
  HD_{ij} = Anzahl der Stellen, an denen sich CW_i und CW_j unterscheiden.

- **Definition**
  Minimale Hammingdistanz Hdmin eines Codes

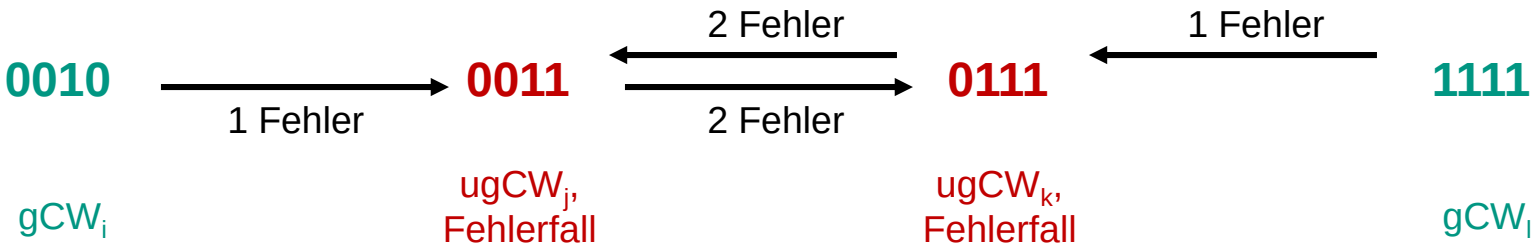
  $Hd_{min}(X) = \min\{Hd_{ij} \mid CW_i, CW_j \in X \wedge CW_i \neq CW_j\}$
  = minimale Hammingdistanz, die beim Vergleich aller Codewörter CW_i und CW_j (mit $CW_i \neq CW_j$) auftritt

- Die minimale Hammingdistanz ist eine entscheidende Eigenschaft eines Codes, um Übertragungsfehler erkennen und korrigieren zu können:
  - Bei gegebenem $h = Hd_{min}(X)$ sind
    - $h - 1$ Bitfehler erkennbar und
    - $k < h / 2$ Bitfehler korrigierbar

(minimale) Hamming-Distanz

- Beispiel: sei $HD_{min} = 3$:
  → Zweifachfehler erkennbar oder Einfachfehler korrigierbar

- 2-Fach Fehlererkennung (wegen h - 1=2):

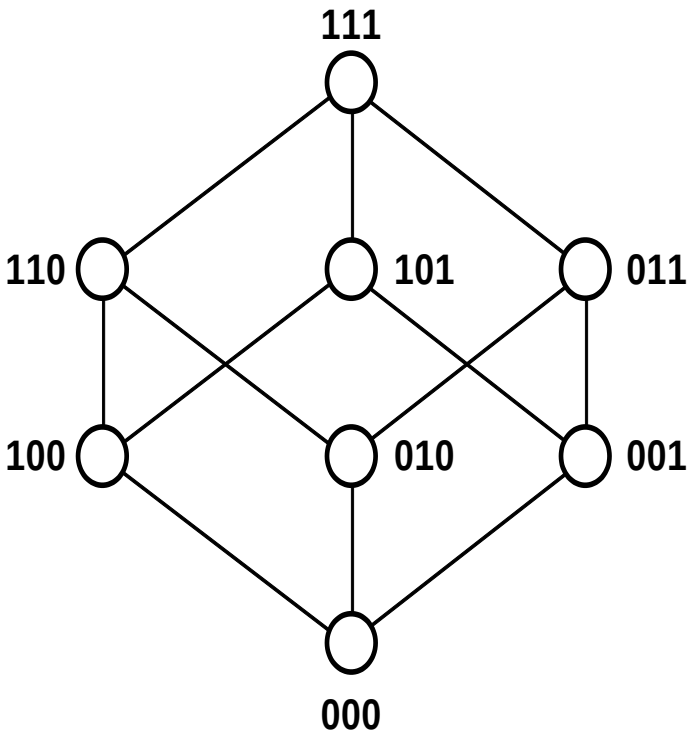


- 1-Fach Fehlerkorrektur (wegen h/2 = 1,5):

KIT – Universität des Landes Baden-Württemberg und nationales Forschungszentrum in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung

3. Aufgabe

- Das nachfolgende Bild zeigt ein Hasse-Diagramm, das die Nachbarschaftsbeziehungen für einen Code mit drei Binärstellen darstellt.



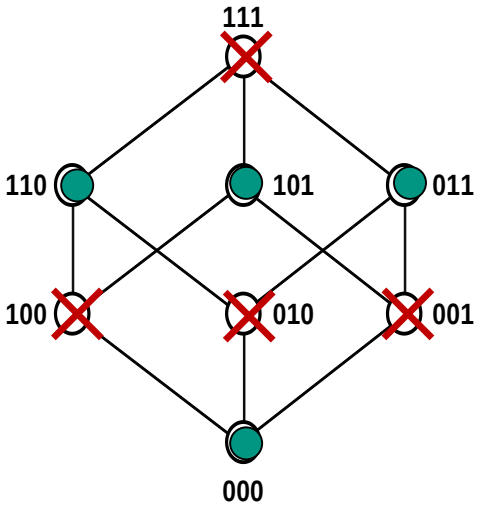
3. Aufgabe – 3.1

- Welche Hamming–Distanz müssen die gültigen Codeworte aufweisen, damit Einzelfehler erkannt werden können?

- $\Rightarrow$ Für die Erkennung wird eine Hamming–Distanz (HD) von 2 benötigt.

- Wie viele Zeichen können so mit drei Binärstellen maximal codiert werden?

N=3



- $\Rightarrow$ man erhält damit maximal 4 codierbare Zeichen.

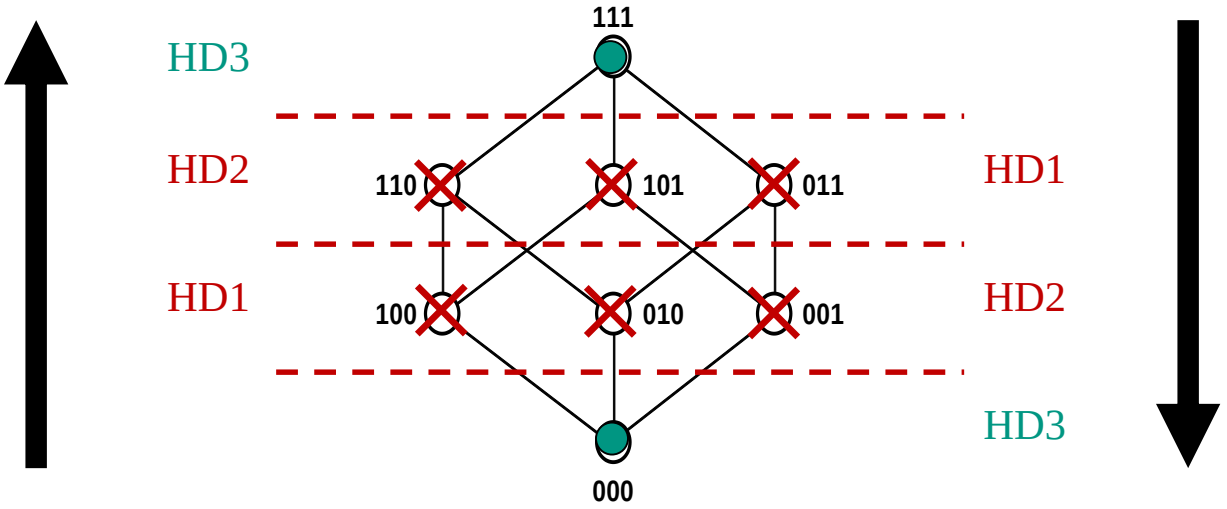
3. Aufgabe – 3.2

- Welche Hamming–Distanz müssen die gültigen Codeworte aufweisen, damit die Korrektur von Einzelfehlern möglich ist?

- $\Rightarrow$ Für die Korrektur wird eine Hamming–Distanz von 3 benötigt

- Wie viele Zeichen können jetzt maximal codiert werden?

N=3



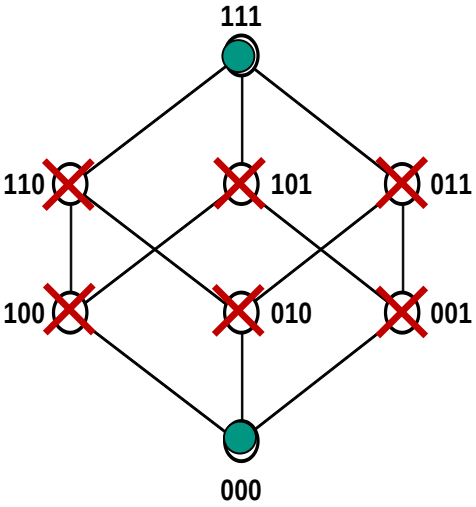
- $\Rightarrow$ man erhält maximal 2 codierbare Zeichen.

3. Aufgabe – 3.3

- Die beiden Zeichen A und B sollen so codiert werden, dass Einzelfehler korrigierbar sind.

- Wie viele Lösungen sind für die Codierung der beiden Zeichen mit drei Binärstellen möglich? Geben Sie eine Lösung an.

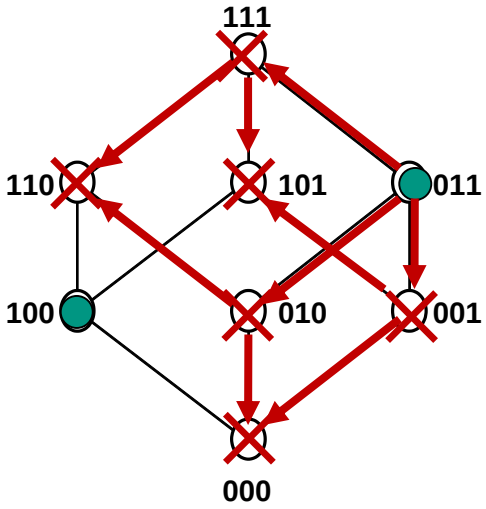
Eine mögliche Lösung:



HD = 3

z. B. **A=**000, **B=**111

Eine andere mögliche Lösung:

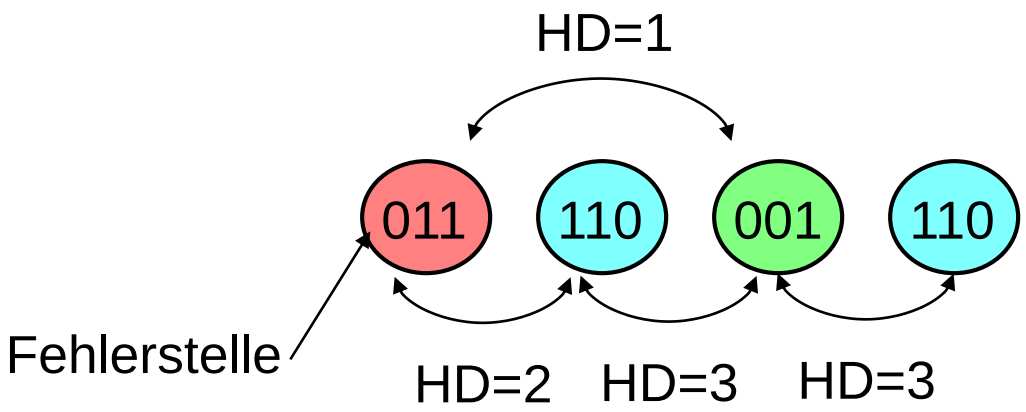


Es sind insgesamt 8 Lösungen möglich

3. Aufgabe – 3.4

- Bei der Datenübertragung mit einer Codierung nach 3.3 wurde genau eine Binärstelle falsch übertragen.

- Die folgenden Daten wurden empfangen: 011 110 001 110
- Korrigieren Sie den Fehler.



Korrektur: 011 $\Rightarrow$ 001

Fehlererkennung durch Parität

- **Beispiel** Ergänzung des Paritätsbit

Dezimal	Binär	gerade Parität	ungerade Parität
0	0000	0000 **0**	0000 **1**
1	0001	0001 **1**	0001 **0**
2	0010	0010 **1**	0010 **0**
3	0011	0011 **0**	0011 **1**
4	0100	0100 **1**	0100 **0**
5	0101	0101 **0**	0101 **1**
6	0110	0110 **0**	0110 **1**
7	0111	0111 **1**	0111 **0**
8	1000	1000 **1**	1000 **0**
9	1001	1001 **0**	1001 **1**
Fehler:	1001	10**1**1 **0**	10**1**1 **1**

KIT – Universität des Landes Baden-Württemberg und nationales Forschungszentrum in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Fehlererkorrektur durch Blocksicherung

- Zusammenfassung **mehrerer** Codeworte zu einem Block
- Hinzufügen eines **Prüfwortes** (Spaltenparitäten) an jeden Block

Ziffer	Codewörter mit gerader Parität				
5	0	1	0	1	0
4	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1
3	0	0	1	1	0
9	1	0	0	1	0
8	1	0	0	0	1
Prüfwort	0	0	1	0	1

Zeile mit Fehler
(ungerade Parität)

Spalte mit Fehler
(ungerade Parität)

- Einfachfehlerkorrektur: Spalte und Zeile **eindeutig** ermittelbar
- Mehrfachfehler: nicht ermittelbar oder erkennbar

Fehlererkorrektur durch Blocksicherung

- Beispiel Falsches Paritätsbit

Ziffer	Codewörter mit gerader Parität				
5	0	1	0	1	0
4	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
3	0	0	1	1	0
9	1	0	0	1	0
8	1	0	0	0	1
Prüfwort	0	0	1	0	1

Zeile mit Fehler
(ungerade Parität)

Spalte mit Fehler
(ungerade Parität)

KIT – Universität des Landes Baden-Württemberg und nationales Forschungszentrum in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Fehlererkorrektur durch Blocksicherung

- Beispiel Mehrfachfehler (erkennbar)

Ziffer	Codewörter mit gerader Parität				
5	0	1	0	1	0
4	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
3	0	0	1	1	0
9	1	0	0	1	0
8	1	1	0	0	1
Prüfwort	0	0	1	0	1

Zeilen mit Fehler (ungerade Parität)

Spalten mit Fehler (ungerade Parität)

KIT – Universität des Landes Baden-Württemberg und nationales Forschungszentrum in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Fehlererkorrektur durch Blocksicherung

- Beispiel Mehrfachfehler (nicht erkennbar)

Ziffer	Codewörter mit gerader Parität				
5	0	1	0	1	0
4	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
3	0	0	1	1	0
9	1	0	0	1	0
8	1	1	0	1	1
Prüfwort	0	0	1	0	1

Spalten mit 2 Fehlern
(gleichbleibende, gerade Parität)

Zeilen mit 2 Fehlern
(gleichbleibende, gerade Parität)

KIT – Universität des Landes Baden-Württemberg und nationales Forschungszentrum in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung