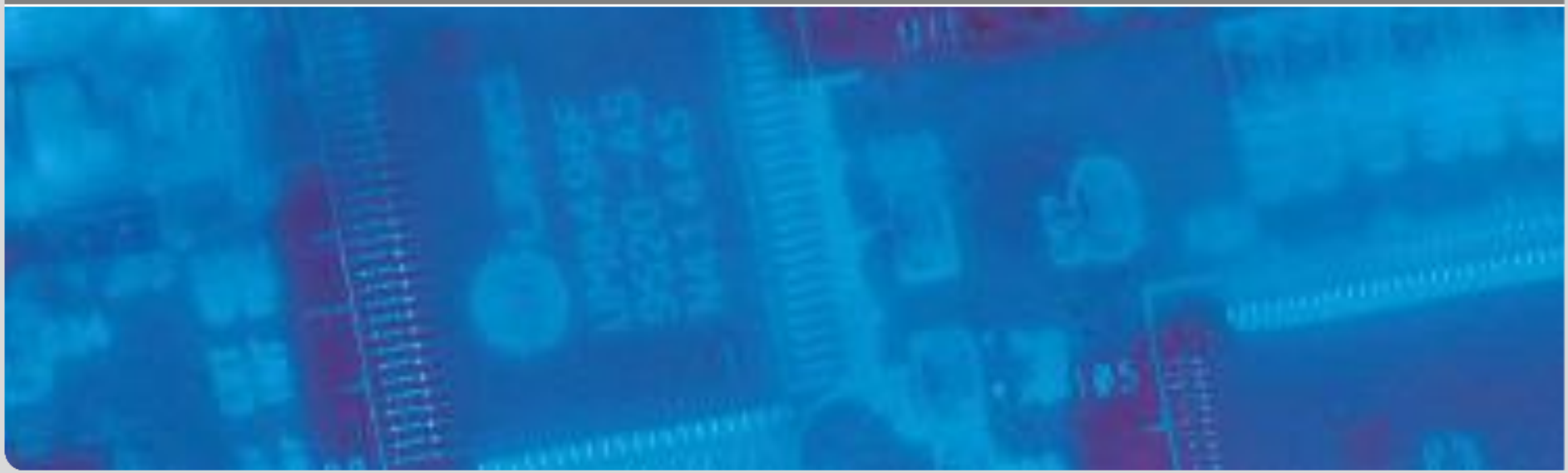
Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Institutsleitung
Prof. Dr.-Ing. K. D. Müller-Glaser
Prof. Dr.-Ing. J. Becker
Prof. Dr. rer. nat. W. Stork

3. Übung

Dipl.-Inform. Thomas Bruckschlögl



1. Aufgabe – 1.1

- 41 64 64 69 65 72 65 6E 20 53 69 65 20 69 6D 20 42 43 44 2D
  43 6F 64 65 3A 20 33 32 38 20 2B 20 37 33 39

- Obige Aufgabe ist hexadezimal im ASCII-Code codiert. Führen Sie die Aufgabe durch.

ASCII-Zeichentabelle

Karlsruher Institut für Technologie

ASCII-Zeichentabelle

HEX	00	10	20	30	40	50	60	70
00	NUL	DLE	SP	0	@	P	`	p
01	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
02	STX	DC2	"	2	B	R	b	r
03	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
04	EOT	DC4	$	4	D	T	d	t
05	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
06	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
07	BEL	ETB	´	7	G	W	g	w
08	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
09	HAT	EM	)	9	I	Y	i	y
0A	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
0B	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
0C	FF	FS	,	<	L	\	l	|
0D	CR	GS	-	=	M	]	m	}
0E	SO	RS	.	>	N	↑	n	~
0F	SI	US	/	?	O	→	o	DEL

z.B.:

ASCII Code = 41 Hex

entspricht ‚A‘

1. Aufgabe – 1.1

- 41 64 64 69 65 72 65 6E 20 53 69 65 20 69 6D 20 42 43 44 2D
  43 6F 64 65 3A 20 33 32 38 20 2B 20 37 33 39

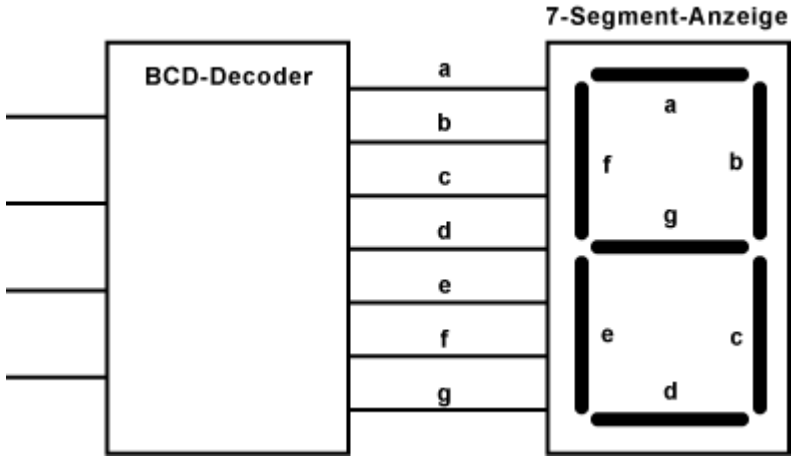
- Obige Aufgabe ist hexadezimal im ASCII-Code codiert. Führen Sie die Aufgabe durch.

- 41 64 64 69 65 72 65 6E 20 53 69 65 20 69 6D 20 42 43 44 2D
  A d d i e r e n S i e i m B C D -

- 43 6F 64 65 3A 20 33 32 38 20 2B 20 37 33 39
  C o d e : 3 2 8 + 7 3 9

BCD-Code

	BCD-Code		BCD-Code
0	0000	10	1010
1	0001	11	1011
2	0010	12	1100
3	0011	13	1101
4	0100	14	1110
5	0101	15	1111
6	0110		
7	0111		
8	1000		
9	1001		



Pseudotetrade

Dezimaler Zahlenbereich

Additionsvorschriften für STIBITZ und BCD

- Additionsvorschrift: Pseudotetraden werden durch Addition von 0110 korrigiert

STIBITZ				Dezimal		BCD			
	0111	0011	1010		407		0100	0000	0111
+	1011	0101	1010	+	827	+	1000	0010	0111
1	111	1111	1		1 1				111
	0001	0010	1001	0100				1100	0010	1110
	+0011	+0011	+1101	+0011				+0110		+0110
11	1	1				1			1	
0100	0101	0110	0111		1234	0001	0010	0011	0100	

- **Additionsvorschrift:**
  - **Ohne Übertrag →Subtraktion von 0011** (entspricht Addition von 1101 bei Streichung des Übertrags)
  - **Mit Übertrag oder Pseudotetrade → Addition von 0011**

1. Aufgabe – 1.1

- Die Aufgabe lautet: ”Addieren Sie im BCD-Code: 328 + 739”

	Dezimal	BCD-Code			
	328	0011	0010	1000	
+	739	0111	0011	1001	
		111	11	1	Ziffern-Übertrag
		1010	0110	0001	Zwischenergebnis
+		0110		0110	Korrektur
=	1067	0001	0000	0110	0111

wegen Pseudotetrade

wegen Übertrag

1. Aufgabe – 1.2

- Führen Sie das Gleiche nach Umwandlung in den STIBITZ–Code durch.

Dezimal	0	1	2	3	4
STIBITZ	0011	0100	0101	0110	0111
STIBITZ	1100	1011	1010	1001	1000
Dezimal	9	8	7	6	5

1. Aufgabe – 1.2

	Dezimal	STIBITZ-Code				
	328	0011	0110	0101	1011	
+	739	0011	1010	0110	1100	
		111	11	1111		Ziffern-Übertrag
		0111	0000	1100	0111	Zwischenergebnis
+		1101	0011	1101	0011	Korrektur
=	1067	0100	0011	1001	1010	

Übertrag : + 0011

Sonst: -0011 oder +1101

Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

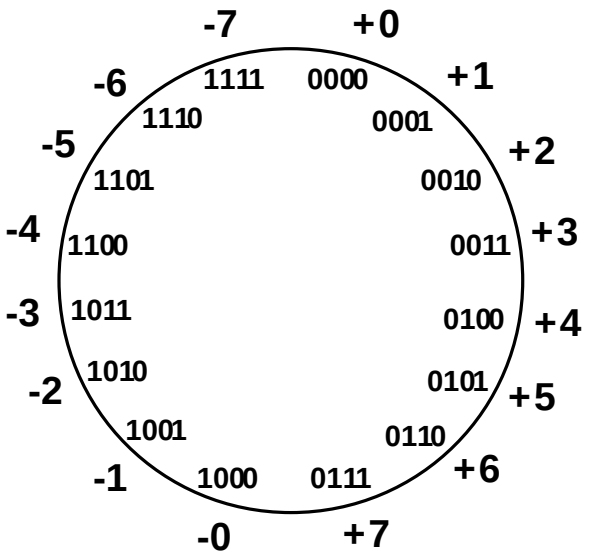
Institutsleitung
Prof. Dr.-Ing. K. D. Müller-Glaser
Prof. Dr.-Ing. J. Becker
Prof. Dr. rer. nat. W. Stork

Digitaltechnik

Zahlendarstellung und Komplement

Zahlendarstellung

- *Vorzeichen und Betrag*

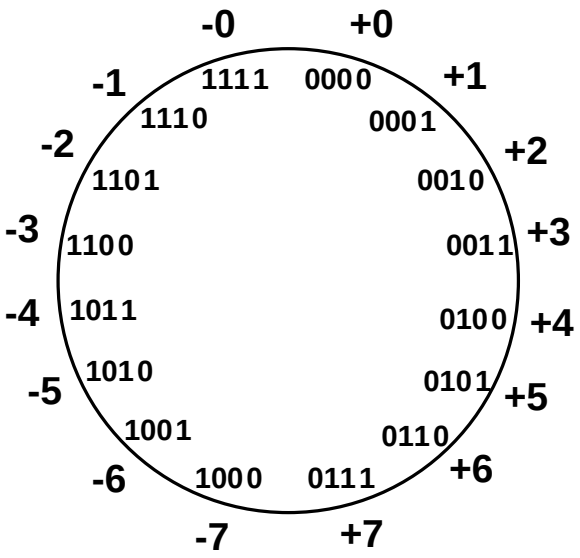


- Höchstes Bit ist Vorzeichen: 0 = positiv (oder NULL), 1 = negativ
- Die restlichen Bits der Betrag: 0 (000) bis 7 (111)
- Zahlenbereich für n Bits = +/- 2^{n-1}
- Darstellung der Null: 0000 und 1000

- Problematische Addition und Subtraktion => Vergleich von Beträgen und Vorzeichen

Zahlendarstellung

- *1er Komplement*

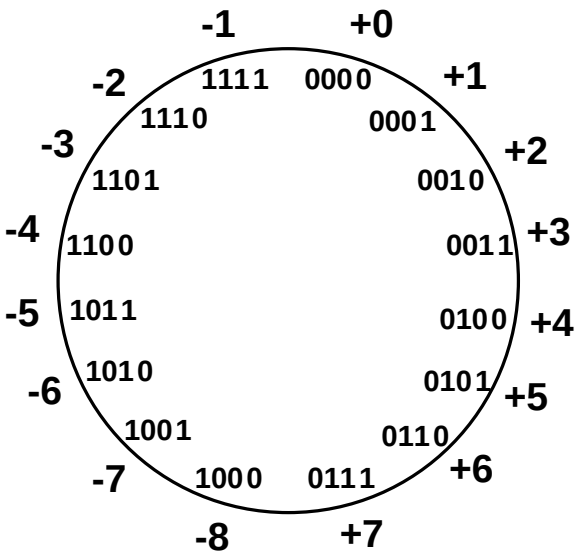


- Subtraktion realisiert durch Addition und 1er Komplement
- Zwei Darstellungen der Null: Macht Probleme !!!
- Addition ist nicht einfach durchzuführen !!!

Zahlendarstellung

- *2er Komplement (K2)*

- **wie 1er Komplement, zusätzlich jedoch um eine Position im Gegenuhrzeigersinn verschoben**



- Nur eine Darstellung der Null
- Eine negative Zahl mehr als positive

Zahlendarstellung

2er Komplement (K2) Zahlen

$N^* = 2^n - N$

$2^4 = 10000$

Bsp.: 2er Komplement von 7

sub 7 = 0111

1001 = -7 im 2er Kompl.

Bsp.: 2er Komplement von -7

$2^4 = 10000$

sub -7 = 1001

0111 = 7 im 2er Kompl.

Schnelle Methode:

2er Komplement = Bitweises Komplement + 1

0111 -> 1000 + 1 -> 1001 (Darstellung von -7)

1001 -> 0110 + 1 -> 0111 (Darstellung von 7)

Zahlendarstellung

Addition und Subtraktion

Vorzeichen und Betrag

Ergebnisvorzeichenbit entspricht den Vorzeichenbits der Operanden

4	0100	-4	1100
+ 3	0011	+ (-3)	1011
7	0111	-7	1111

Unterscheiden sich Die Vorzeichen, hängt das Ergebnis von den Beträgen der Operanden ab

4	0100	-4	1100
- 3	1011	+ 3	0011
1	0001	-1	1001

Zahlendarstellung

Addition und Subtraktion von binären Zahlen

2er Komplement Berechnungen

Wenn Carry-in = Carry-out dann ignoriere Carry

4	0100		-4	1100
+ 3	0011		+ (-3)	1101
7	0111		-7	11001

Wenn Carry-In ungleich Carry-Out dann Überlauf!

4	0100		-4	1100
- 3	1101		+ 3	0011
1	10001		-1	1111

Einfaches Vorgehen bei der Addition macht die 2er-Komplement-Darstellung zur ersten Wahl für Integer-Berechnung in digitalen Systemen

Zahlendarstellung

Überlauf Bedingungen:

	0 1 1 1	
5	0 1 0 1	
3	0 0 1 1	
-8	1 0 0 0	

Überlauf

	1 0 0 0	
-7	1 0 0 1	
-2	1 1 1 0	
7	1 0 1 1 1	

Überlauf

	0 0 0 0	
5	0 1 0 1	
2	0 0 1 0	
7	0 1 1 1	

Kein Überlauf

	1 1 1 1	
-3	1 1 0 1	
-5	1 0 1 1	
-8	1 1 0 0 0	

Kein Überlauf

Überlauf, wenn Carry-In ungleich Carry-Out!!!

2. Aufgabe

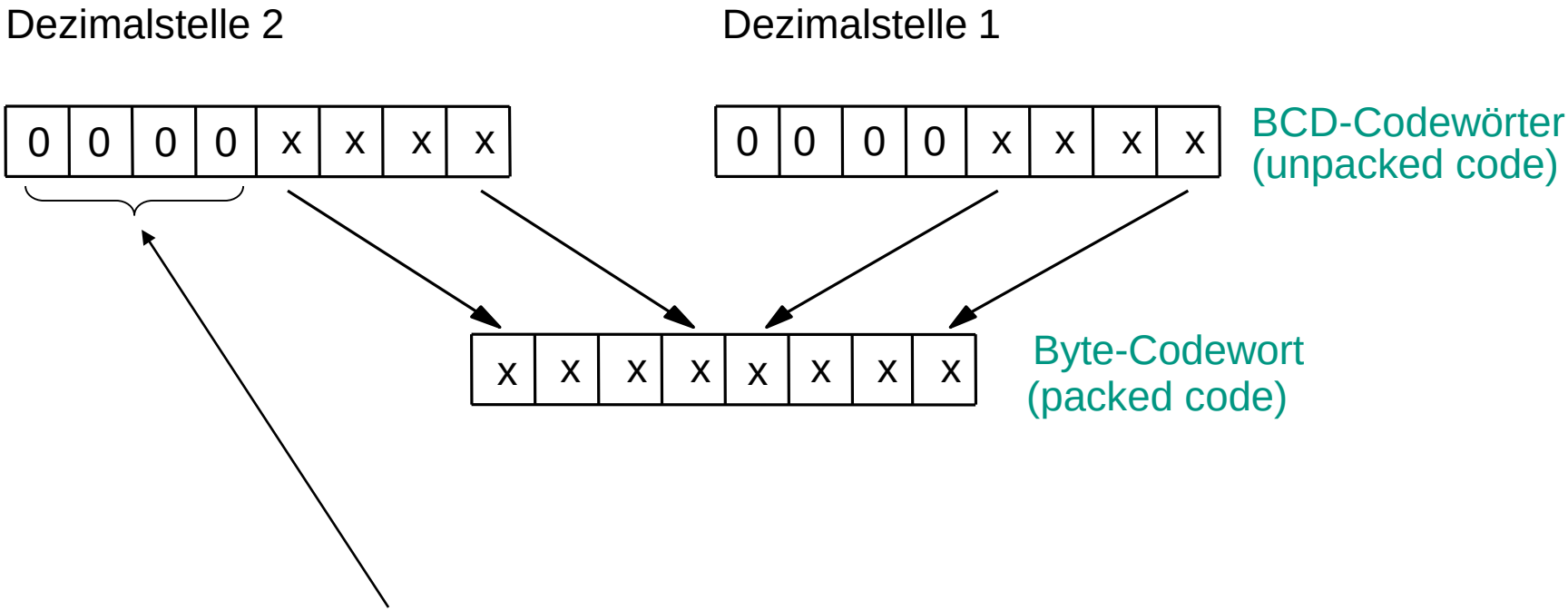
Im Speicher eines Digitalrechners ist folgende Bitkombination abgelegt:

00011001 01010100 10011000 00110000.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, diese Bitkombination zu interpretieren. Geben Sie die jeweils dazugehörenden Werte als Dezimalzahl an:

2.1 Interpretieren Sie die Bitkombination als BCD-Zahl. Handelt es sich um “packed code” oder “unpacked code”?

Kompaktere Darstellung von BCD-Zahlen



Bei unpacked BCD-Darstellung sind immer vier führende Nullen zu finden!!!

2. Aufgabe

Im Speicher eines Digitalrechners ist folgende Bitkombination abgelegt:

00011001 01010100 10011000 00110000.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, diese Bitkombination zu interpretieren. Geben Sie die jeweils dazugehörenden Werte als Dezimalzahl an:

2.1 Interpretieren Sie die Bitkombination als BCD-Zahl. Handelt es sich um “packed code” oder “unpacked code”?

00011001 01010100 10011000 00110000

Es kann sich hier nur um ”packed code” handeln, da bei keinem der vier Bytes vier führende Nullen vorhanden sind.

2. Aufgabe

Interpretation der Bitkombinationen:

0001	1001	0101	0100	1001	1000	0011	0000
1	9	5	4	9	8	3	0

Ergebnis: $19\,549\,830_D$

2. Aufgabe

2.2 Interpretieren Sie die Bitkombinationen als 16-bit Dualzahlen.

0001 1001 0101 0100 1001 1000 0011 0000

Zusammenfassen und umwandeln von jeweils 16 Bits zu einer dezimalen Zahl:

$\underbrace{0001\ 1001\ 0101\ 0100}$

$a_D = 2^{12} + 2^{11} + 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^2 = 6484_D$

$\underbrace{1001\ 1000\ 0011\ 0000}$

$a_D = 2^{15} + 2^{12} + 2^{11} + 2^5 + 2^4 = 38960_D$

Hier ist eine Interpretation als negative Zahl in K2-Darstellung möglich:

Komplementbildung:

1001 1000 0011 0000 $= 0110011111001111_B + 1_B =$

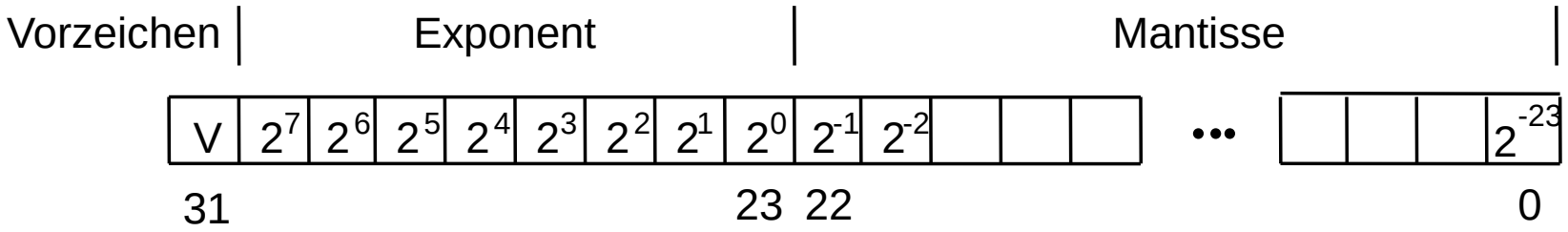
$= 0110011111010000_B$

$= 26\ 576_D \quad => \quad -26\ 576_D$

2. Aufgabe

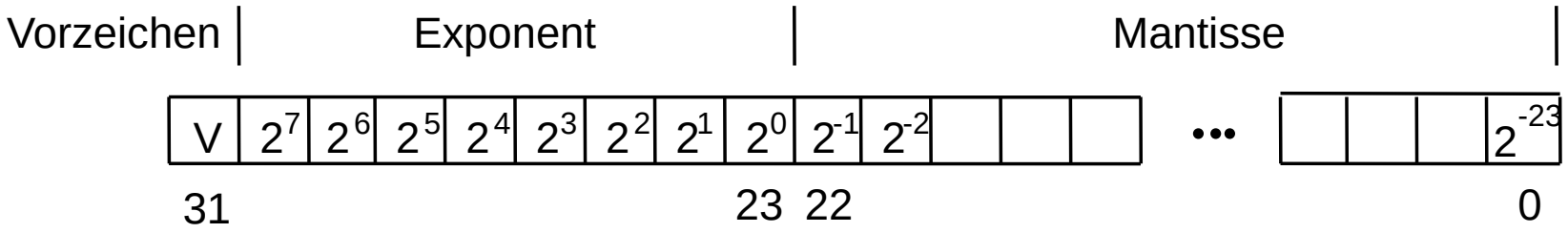
2.3 Interpretieren Sie die Bitkombination als IEEE-Fließkommazahl.

Zahlendarstellung gemäß IEEE- Standard



Exponent E	Mantisse M	Wert
255	≠ 0	ungültig
255	0	$-1^V \cdot \infty$
0 < E < 255	M	$-1^V \cdot 2^{E-127} \cdot (1,M)$
0	≠ 0	$-1^V \cdot 2^{-126} \cdot (0,M)$
0	0	$-1^V \cdot 0$

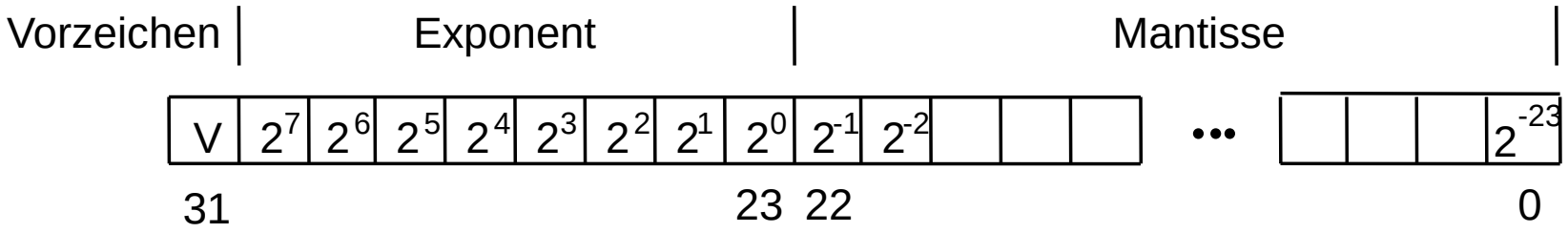
2. Aufgabe



Bitkombination

00011001 01010100 10011000 00110000

2. Aufgabe



Bitkombination

0 00110010 10101001001100000110000

Vorzeichen => V = 0 => positiv

Exponent => $E = 2^5 + 2^4 + 2^1 = 50$

Mantisse => $2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-5} + 2^{-8} + 2^{-11} + 2^{-12} + 2^{-18} + 2^{-19}$
$= 0{,}66089439392089843 75$

=> $(-1)^V \cdot 2^{E-127} \cdot 1{,}M = (-1)^0 \cdot 2^{50-127} \cdot 1{,}66089439392089843 75$
$= 1 \cdot 2^{-77} \cdot 1{,}66089439392089843 75$
$= 1{,}09908771371950273119850061 1483 \cdot 10^{-23}$

3. Aufgabe

Ein 16 bit Mikroprozessor verwendet zum Speichern großer Zahlen eine 16-Bit-Fließkommadarstellung.
Die Zahlendarstellung erfolgt mit 1-Bit-Vorzeichen, 6-Bit-Exponent und 9-Bit-Mantisse.
Berechnen Sie die Summe der beiden Fließkommazahlen, indem Sie beide Zahlen auf den selben Exponenten umrechnen und dann die Mantissen addieren.
Geben Sie das Ergebnis in 16-Bit-Fließkommadarstellung an und geben Sie auch alle Zwischenschritte an.

16-Bit-Exponentialzahl = $-1^{V} \cdot 2^{(E - 31)} \cdot (1,M)$

	V	E5	E4	E3	E2	E1	E0	M8	M7	M6	M5	M4	M3	M2	M1	M0
Zahl 1: $47E1_H$																
+																
Zahl 2: 4261_H																

3. Aufgabe

V	E5	E4	E3	E2	E1	E0	M8	M7	M6	M5	M4	M3	M2	M1	M0

Zahl 1: $47E1_H$

0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1

\+

Zahl 2: 4261_H

0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1

Zahl 1: $+ 2^{(35-31)} \cdot 1{,}111100001$

Zahl 2: $+ 2^{(33-31)} \cdot 1{,}001100001 = + 2^{(35-31)} \cdot 0{,}01001100001$

Addition der Mantissen:

$$1{,}111100001_B$$
$$+ \; 0{,}01001100001_B$$
$$= 10{,}00111100101_B = 2^1 \cdot 1{,}000111100_B$$

(Mantisse auf 9 Stellen gekürzt!)

Ergebnis: $\Rightarrow \quad + 2^{(35-31)} \cdot 2^1 \cdot 1{,}000111100$

$$= + 2^{(36-31)} \cdot 1{,}000111100$$

0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0

Bemerkung

Potenzmenge: Menge aller Untermengen inkl. der Menge ø

Kartesisches Produkt: S x T, Menge aller geordneten Paare (s,t) mit $s \in S$, $t \in T$, nicht kommutativ => $S \times T \neq T \times S$

Leere Menge ist Untermenge jeder beliebigen Menge

4. Aufgabe – 4.1

Auf der Grundmenge G = { a, b, c, d, e, 1, 2, 3 } seien zwei Mengen gegeben:
A = { x | x $\in$ G, x = a oder $(x-3)^2 = 1$ oder $x^3 = 27$ } und B = { a, b, c, 2 }

4.1 Wie lauten die Elemente x der Menge A?

$(x-3)^2 = 1$ => x = 2 oder 4 (nicht in G)
$x^3 = 27$ => x = 3

=> A = { a , 2 , 3 }

4. Aufgabe – 4.2

Auf der Grundmenge G = { a, b, c, d, e, 1, 2, 3 } seien zwei Mengen gegeben:
$A = \{ x \mid x \in G, x = a \text{ oder } (x-3)^2 = 1 \text{ oder } x^3 = 27 \}$ und B = { a, b, c, 2 }

4.2 Bilden Sie die Potenzmengen P(A) und P(B).

A = { a , 2 , 3 }

P(A) = { { } , { a } , { 2 } , { 3 } , { a,2 } , { a,3 } , { 2,3 } , { a,2,3 } }

B = { a, b, c, 2 }

P(B)={ { } , { a } , { b } , { c } , { 2 } , { a,b } , { a,c } , { a,2 } , { b,c } ,
{ b,2 } , { c,2 } , { a,b,c } , { a,b,2 } , { a,c,2 } , { b,c,2 } , { a,b,c,2 } }

4. Aufgabe – 4.3

Auf der Grundmenge G = { a, b, c, d, e, 1, 2, 3 } seien zwei Mengen gegeben:
A = { x | x $\in$ G, x = a oder $(x-3)^2 = 1$ oder $x^3 = 27$ } und B = { a, b, c, 2 }

4.3 Bilden Sie die kartesischen Produkte A x B und B x A.

A= { a , 2 , 3 } B = { a , b , c , 2 }

A x B = { (a, a), (a, b), (a, c), (a, 2), (2, a), (2, b),
(2, c), (2, 2), (3, a), (3, b), (3, c), (3, 2) }

B x A = { (a, a), (a, 2), (a, 3), (b, a), (b, 2), (b, 3), (c, a), (c, 2),
(c, 3), (2, a), (2, 2), (2, 3) }

4. Aufgabe – 4.4

- Auf der Grundmenge G = { a, b, c, d, e, 1, 2, 3 } seien zwei Mengen gegeben:
  $A = \{ x \mid x \in G, x = a \text{ oder } (x-3)^2 = 1 \text{ oder } x^3 = 27 \}$ und $B = \{ a, b, c, 2 \}$

- Bilden Sie bezüglich der Grundmenge G das Komplement $C_G (A \cup B)$.

$A = \{ a, 2, 3 \}, \quad B = \{ a, b, c, 2 \}$

$C_G(A \cup B) = C_G(\{a, b, c, 2, 3\}) = \{ d, e, 1 \}$

4. Aufgabe – 4.5

- Auf der Grundmenge G = { a, b, c, d, e, 1, 2, 3 } seien zwei Mengen gegeben:
  $A = \{ x \mid x \in G, x = a \text{ oder } (x-3)^2 = 1 \text{ oder } x^3 = 27 \}$ und $B = \{ a, b, c, 2 \}$

- Sind folgende Aussagen wahr oder falsch ?

  a) $\{ 2, a \} \in B$

  b) $a \in B \times A$

  c) $\{ 2, a \} \in A \times B$

  d) $\{ a, a \} \subseteq A \times B$

  e) $\emptyset \subseteq P(A)$

4. Aufgabe

f) $ø \in P(A)$

g) $\{ 2,a \} \subseteq P(B)$

h) $\{ 2,a \} \in P(B)$

i) $|A \times B| = |B \times A|$

j) $|P(A \cap B)| = 2^2$

k) $| ø | = 0$

l) $| P(ø) | = 0$

m) $| P(ø) | = ø$

Zweistellige Relationen α auf einer Menge M

Eigenschaften:

reflexiv:	$x \alpha x, \forall x \in M$
symmetrisch:	aus $x \alpha y$ folgt $y \alpha x, \forall x, y \in M$
antisymmetrisch:	aus $x \alpha y$ und $y \alpha x$ folgt $x = y, \forall x, y \in M$
transitiv:	aus $x \alpha y$ und $y \alpha z$ folgt $x \alpha z, \forall x, y, z \in M$

Ordnungsrelation (Zeichen: $\leq$)

- reflexiv
- antisymmetrisch
- transitiv

Äquivalenzrelation (Zeichen: $\equiv$)

- reflexiv
- symmetrisch
- transitiv

Verträglichkeitsrelation (Zeichen: $\sim$)

- reflexiv
- symmetrisch
- nicht transitiv

5. Aufgabe

- Zur Auswertung der letzten DT-Klausur wurden die untenstehenden Aussagen gemacht, wobei *a* und *b* Elemente der Menge M aller Teilnehmer/innen seien.

- Bestimmen Sie Eigenschaften und Art der Aussagen:

- ”*a* hat die gleiche Note wie *b*.”
- ”*a* ist mindestens so gut wie *b*.”
- ”*a* ist durchgefallen.”
- ”*a* und *b* liegen weniger als eine ganze Note auseinander.”
- ”*a* behauptet, die Klausur sei zu schwer gewesen.”

5. Aufgabe

- Zur Auswertung der letzten DT-Klausur wurden die untenstehenden Aussagen gemacht, wobei *a* und *b* Elemente der Menge M aller Teilnehmer/innen seien.

- Bestimmen Sie Eigenschaften und Art der Aussagen:

5.1

- ”*a* hat die gleiche Note wie *b*.”

reflexiv?	✓	a α a
symmetrisch?	✓	a α b = > b α a
transitiv?	✓	a α b, b α c => a α c

=> Äquivalenzrelation

5. Aufgabe

5.2

- ”*a* ist mindestens so gut wie *b*.”

reflexiv?	✓	$a \alpha a$
symmetrisch?	✗	$a \alpha b \not\Rightarrow b \alpha a$
transitiv?	✓	$a \alpha b, b \alpha c \Rightarrow a \alpha c$

=> Quasiordnung

5.3

- ”*a* ist durchgefallen.”

- Es handelt sich um eine Mengenoperation: Teilmenge von M.

5. Aufgabe

5.4

- ”*a* und *b* liegen weniger als eine ganze Note auseinander.”

reflexiv?	✓	a α a
symmetrisch?	✓	a α b = > b α a
transitiv?	✗	a α b, b α c ~~=>~~ a α c

=> Verträglichkeitsrelation

5.5

- ”*a* behauptet, die Klausur sei zu schwer gewesen.”
- Es handelt sich um eine Mengenoperation:

6. Aufgabe – 6.1

- Führen Sie die folgenden Berechnungen im angegebenen Zahlensystem aus, ohne die Zahlen ins Dezimalsystem umzuwandeln:

- Addition im Dualsystem

$$
\begin{array}{rcccccccccccccc}
 & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \\
+ & & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \leftarrow \text{Übertrag} \\
\hline
= & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

6. Aufgabe – 6.2

- Führen Sie die folgenden Berechnungen im angegebenen Zahlensystem aus, ohne die Zahlen ins Dezimalsystem umzuwandeln:

- Multiplikation im Dualsystem

1 1 1 0 1 0 1 0 x 1 0 1 1

=

6. Aufgabe – 6.2

- Führen Sie die folgenden Berechnungen im angegebenen Zahlensystem aus, ohne die Zahlen ins Dezimalsystem umzuwandeln:

- Multiplikation im Dualsystem

					1	1	1	0	1	0	1	0	
					1	1	1	0	1	0	1	0	1
+				1	1	1	0	1	0	1	0		1
+			0	0	0	0	0	0	0	0			0
+		1	1	1	0	1	0	1	0				1
	1	1	1 1	1 1	1 1	1	1						
=	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	

Verknüpfung entspricht:

$\cdot 2^0$ UND - Operation

$\cdot 2^1$ UND + LShift um eine Stelle

$\cdot 2^2$ UND + LShift um zwei Stellen

$\cdot 2^3$ UND + LShift um drei Stellen

6. Aufgabe – 6.3

- Subtraktion im Dualsystem

		1	1	0	1	0	0	1	0	a
		1	0	1	1	0	1	0	1	b
		1	1	0	1	0	0	1	0	a
+		0	1	0	0	1	0	1	1	Zweierk. von b
	1	1					1			Übertrag
=	1	0	0	0	1	1	1	0	1	
=		0	0	0	1	1	1	0	1	c

6. Aufgabe – 6.3

- Subtraktion im Dualsystem

	0	1	1	1	0	1	1	0	a
	1	0	0	1	1	0	0	1	b
	0	1	1	1	0	1	1	0	
+	0	1	1	0	0	1	1	1	Zweierk. von b
	1	1			1	1			Übertrag
=	1	1	0	1	1	1	0	1	c
	0	0	1	0	0	0	1	1	Zweierk. von c

6. Aufgabe – 6.4

- Addition im Hexadezimalsystem

	B	6	7	4	F	C	1	2
+	2	D	A	9	D	4	B	2
	1	1		1	1			
=	E	4	1	E	D	0	C	4

Dez	Bin	Hex
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7

Dez	Bin	Hex
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F