Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Dipl.-Ing. J. Heißwolf

heisswolf@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

Digitaltechnik

4. Übung

Die Verträglichkeitsrelation „~“

- Folgende Eigenschaften der Relation müssen nachgewiesen werden:
  - **Reflexivität:** $x \sim x$
    - „jedes Element ist mit sich selbst verträglich“
  - **Symmetrie:** aus $x \sim y$ folgt $y \sim x$
    - „die Verträglichkeit zweier Elemente ist immer **paarweise** erfüllt“
  - **Nichttransitivität:** aus $[(x \sim y) \wedge (y \sim z)]$ folgt nicht $[x \sim z]$
    - „es gibt keine „Verträglichkeits-Kette“ mehrerer, sondern immer nur **„Verträglichkeits-Tupel“** zweier Elemente“
- Relationen lassen sich anschaulich als **Graphen** darstellen

1. Aufgabe

Auf der Menge M = { 2, 3, 4, 5, 6, 7 } sei eine Verträglichkeitsrelation folgendermaßen definiert: a α b wenn a und b ein kgV (kleinstes gemeinsames Vielfaches) besitzen, das kleiner als 15 ist. (a,b $\in$ M)

1.1 Weisen Sie für α die Eigenschaften einer Verträglichkeitsrelation nach!

1. Aufgabe

kgV	2	3	4	5	6	7
2						
3						
4						
5						
6						
7						

1. Aufgabe

kgV	2	3	4	5	6	7
2	2					
3		3				
4			4			
5				5		
6					6	
7						7

1. Aufgabe

kgV	2	3	4	5	6	7
2	2					
3	6	3				
4	4	12	4			
5	10	15	20	5		
6	6	6	12	30	6	
7	14	21	28	35	42	7

1. Aufgabe

kgV	2	3	4	5	6	7
2	2	6	4	10	6	14
3	6	3	12	15	6	21
4	4	12	4	20	12	28
5	10	15	20	5	30	35
6	6	6	12	30	6	42
7	14	21	28	35	42	7

1. Aufgabe

kgV	2	3	4	5	6	7
2	2	6	4	10	6	14
3	6	3	12	15	6	21
4	4	12	4	20	12	28
5	10	15	20	5	30	35
6	6	6	12	30	6	42
7	14	21	28	35	42	7

1. Aufgabe

kgV	2	3	4	5	6	7
2	2	6	4	10	6	14
3	6	3	12	15	6	21
4	4	12	4	20	12	28
5	10	15	20	5	30	35
6	6	6	12	30	6	42
7	14	21	28	35	42	7

reflexiv ?

ja, wegen der Hauptdiagonale

symmetrisch?

ja, da kommutativ

transitiv?

nein, weil z.B. aus 3 α 2 und 2 α 7 nicht folgt 3 α 7

$\rightarrow$ Verträglichkeitsrelation

1. Aufgabe

1.2 Ist α für beliebige natürliche Zahlen eine Verträglichkeitsrelation, oder nur für die Menge M?

Für beliebige natürliche Zahlen ist die Relation α nicht mehr reflexiv, da Zahlen, die größer als 15 sind, mit sich selbst ein kgV besitzen, das ebenfalls größer als 15 ist.

z.B.: $17 \rightarrow 17 \not\alpha 17$

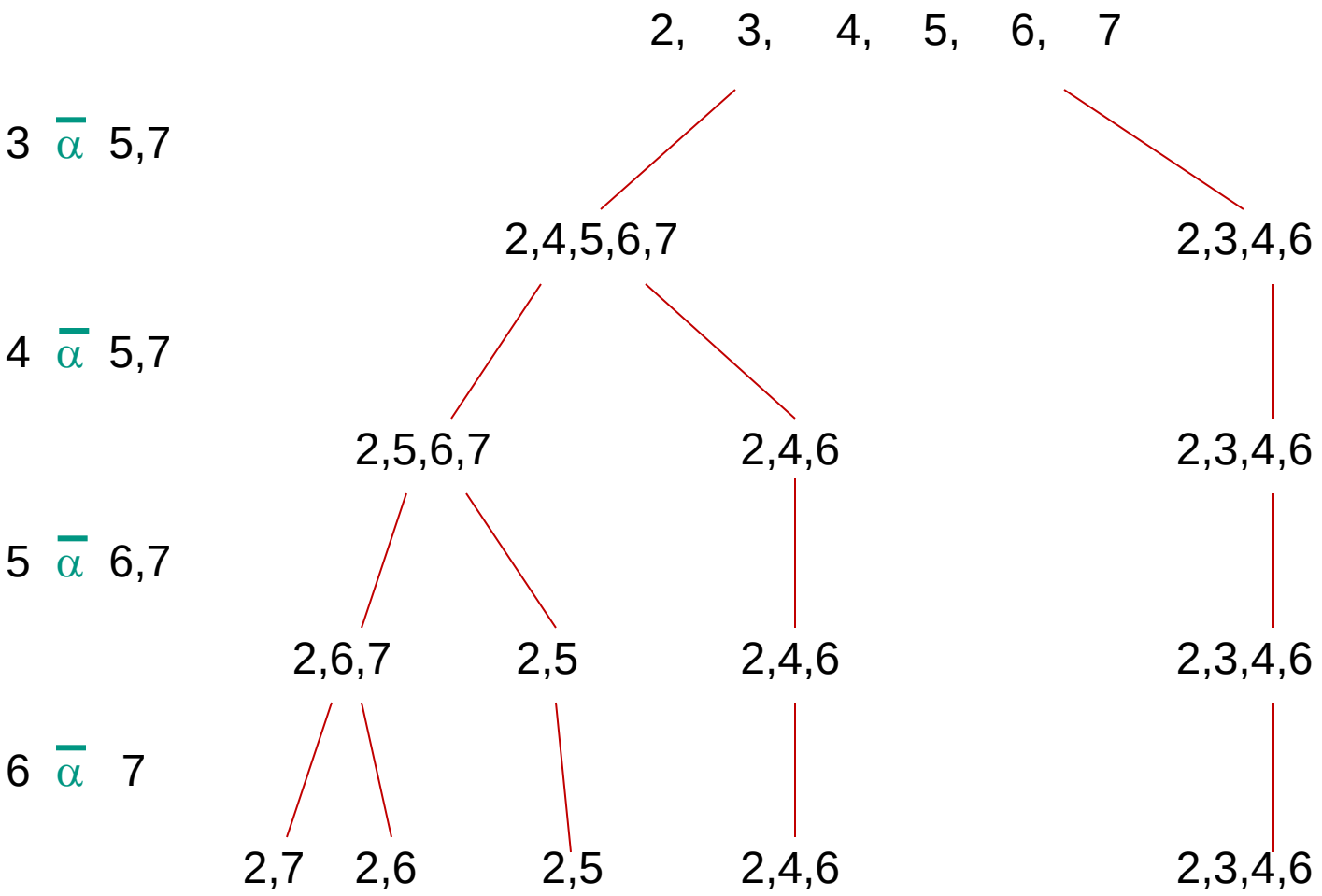
1. Aufgabe

1.3 Geben Sie eine Überdeckung von M an

kgV	2	3	4	5	6	7
2	2	6	4	10	6	14
3	6	3	12	15	6	21
4	4	12	4	20	12	28
5	10	15	20	5	30	35
6	6	6	12	30	6	42
7	14	21	28	35	42	7

$3 \overline{\alpha} 5,7$	$4 \overline{\alpha} 5,7$	$5 \overline{\alpha} 6,7$	$6 \overline{\alpha} 7$

1. Aufgabe


2, 3, 4, 5, 6, 7
3 α 5,7
4 α 5,7
5 α 6,7
6 α 7
2,4,5,6,7
2,3,4,6
2,5,6,7
2,4,6
2,3,4,6
2,6,7
2,5
2,4,6
2,3,4,6
2,7
2,6
2,5
2,4,6
2,3,4,6

1. Aufgabe

Überdeckungstabelle

	2	3	4	5	6	7
2,7						
2,6						
2,5						
2,4,6						
2,3,4,6						

1. Aufgabe

Überdeckungstabelle

	2	3	4	5	6	7
2,7	x					x
2,6	x				x	
2,5	x			x		
2,4,6	x		x		x	
2,3,4,6	x	x	x		x	

1. Aufgabe

Überdeckungstabelle

	2	3	4	5	6	7
2,7	x					x
2,6	x				x	
2,5	x			x		
2,4,6	x		x		x	
2,3,4,6	x	x	x		x	

1. Aufgabe

Überdeckungstabelle

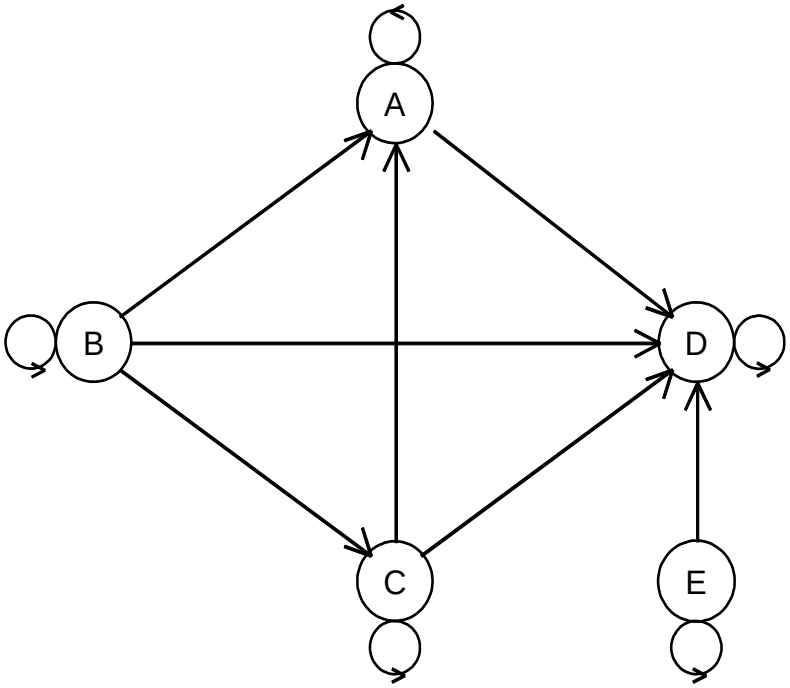
	2	3	4	5	6	7
2,7	x					x
2,6	x				x	
2,5	x			x		
2,4,6	x		x		x	
2,3,4,6	x	x	x		x	

Überdeckung: $\tau = \{ \{ 2, 3, 4, 6 \}, \{ 2, 5 \}, \{2, 7 \} \}$

2. Aufgabe

Der Graph in folgendem Bild repräsentiere eine Relation

2.1 Welche Eigenschaften hat die Relation?



2. Aufgabe

reflexiv?

ja, Schleifen an allen Knoten

symmetrisch?

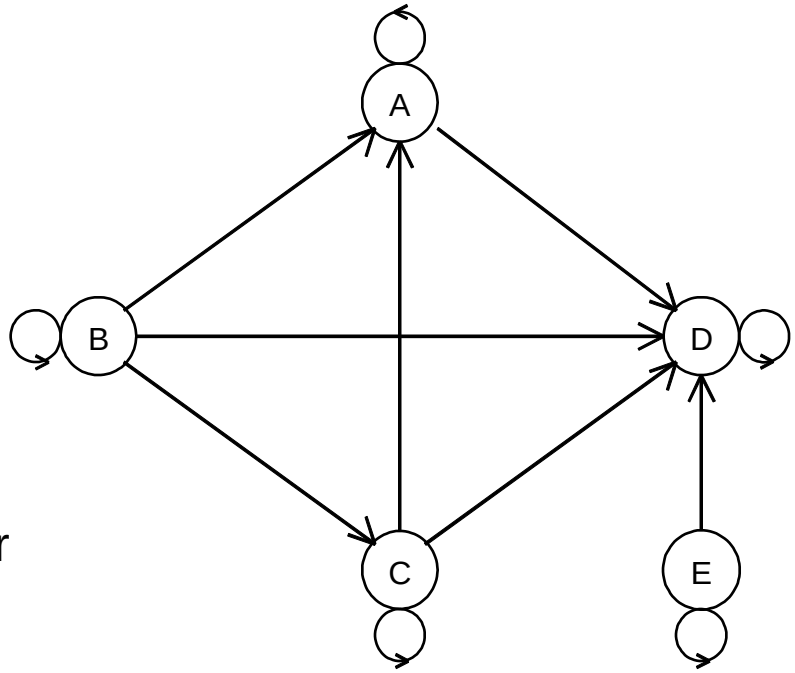
nein, keine antiparallelen Kanten

antisymmetrisch?

ja, wenn (a,b) zur Relation gehört, dann gehört (b,a) nicht zur Relation; unter der Bedingung, daß a und b verschiedene Elemente aus einer Menge A sind;
$x \alpha y$ und $y \alpha x \Rightarrow x = y$

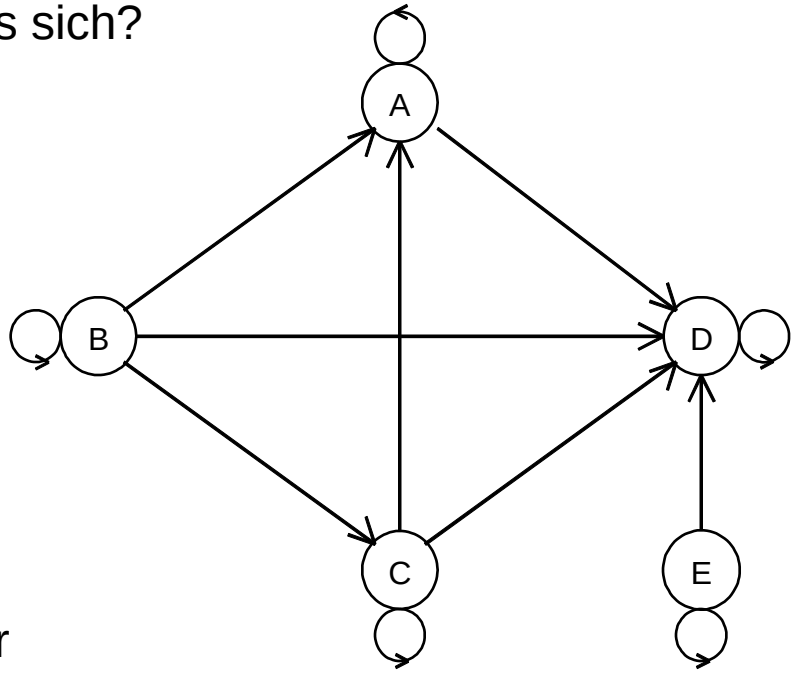
transitiv?

ja, $x \alpha y$ und $y \alpha z \Rightarrow x \alpha z$



2. Aufgabe

2.2 Um welche spezielle Relation handelt es sich?



reflexiv?

ja, Schleifen an allen Knoten

symmetrisch?

nein, keine antiparallelen Kanten

antisymmetrisch?

ja, wenn (a,b) zur Relation gehört, dann gehört (b,a) nicht zur Relation; unter der Bedingung, daß a und b verschiedene Elemente aus einer Menge A sind;
$x \alpha y$ und $y \alpha x \Rightarrow x = y$

transitiv?

ja, $x \alpha y, y \alpha z \Rightarrow x \alpha z$

$\Rightarrow$ Es handelt sich hier um eine Ordnungsrelation.
(antisymmetrische Quasiordnung = Halbordnung)

3. Aufgabe

In der Vorweihnachtszeit stellt sich die Frage, was besser ist: ewiges Glück oder ein Lebkuchenherz?

Man sollte meinen, dass nichts besser ist als ewiges Glück. Andererseits ist ein Lebkuchenherz sicherlich besser als nichts. “Besser” ist bekanntlich eine transitive Relation.

Was folgt daraus?

transitiv:

aus x α y und y α z folgt x α z:

Lebkuchenherz besser als nichts, nichts besser als ewiges Glück

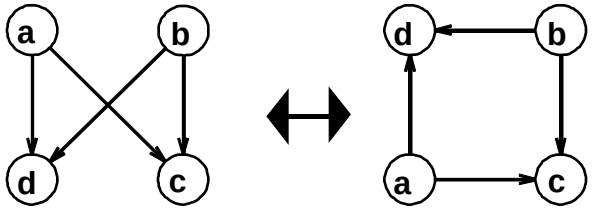
=> Lebkuchenherz besser als ewiges Glück

Eigenschaften von Graphen

endlicher Graph — Kanten- und Knotenmenge sind endlich.

entarteter Graph — Kantenmenge ist leer.

isomorpher Graph — “Graphen lassen sich ineinander überführen”



vollständiger Graph — Je zwei verschiedene Knoten sind über eine Kante miteinander verbunden.

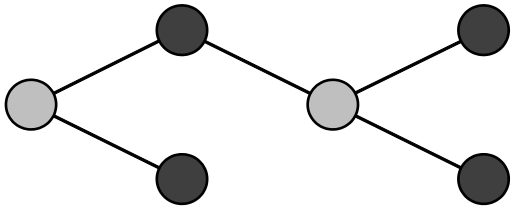
einfacher Graph — Zwischen zwei Knoten gibt es höchstens eine Kante.

gerichteter Graph — Enthält mindestens eine gerichtete Kante.

zusammenhängender Graph — Es existiert zwischen je zwei verschiedenen Knoten eine Kantenprogression.

Eigenschaften von Graphen

streng zusammenh. Graph	Bei gericht. Graphen: Jeder Knoten ist von jedem Knoten aus erreichbar. (Kantenrichtung beachten)
zyklischer Graph	gerichteter Graph mit mindestens einem Zyklus. (auch Schleife)
bipartiter Graph	zwei Knotenmengen. Keine Kante verbindet Knoten aus derselben Menge.



planarer Graph	es existiert ein zugehöriger isomorpher Graph, der in der Ebene überschneidungsfrei ist.
gewichteter Graph	enthält gewichtete Knoten oder Kanten (z.B.: Entfernungen, Kosten, ...)

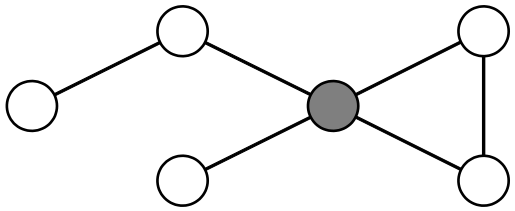
Kanten-/Knoteneigenschaft

Kanteneigenschaften

Schleife	verbindet einen Knoten mit sich selbst.

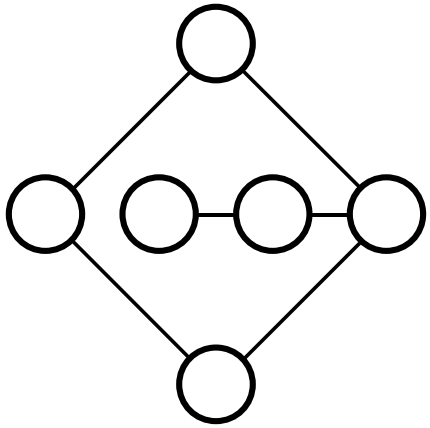
Knoteneigenschaften

Grad	Anzahl der adjazenten Kanten eines Knotens.
Ausgangsgrad	Anzahl der abgehenden Kanten.
Eingangsgrad	Anzahl der ankommenden Kanten.
benachbarte Knoten	sind über eine Kante miteinander verbunden.
Artikulation	Knoten, nach dessen Entnahme der Graph in isolierte Teilgraphen zerfällt:

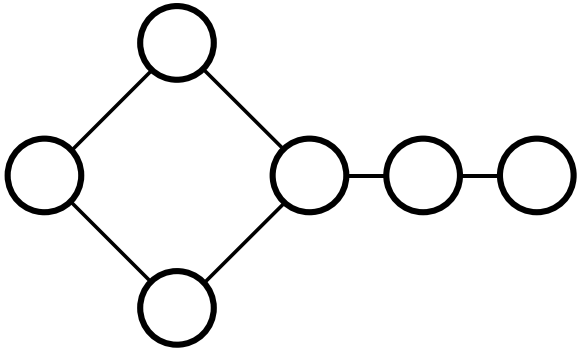


4. Aufgabe

4.1 Zeichen Sie den zu Graph 1 bzw. zu Graph 2 zugehörigen dualen Graphen (Kennzeichnen Sie dabei die überführten Knoten eindeutig):

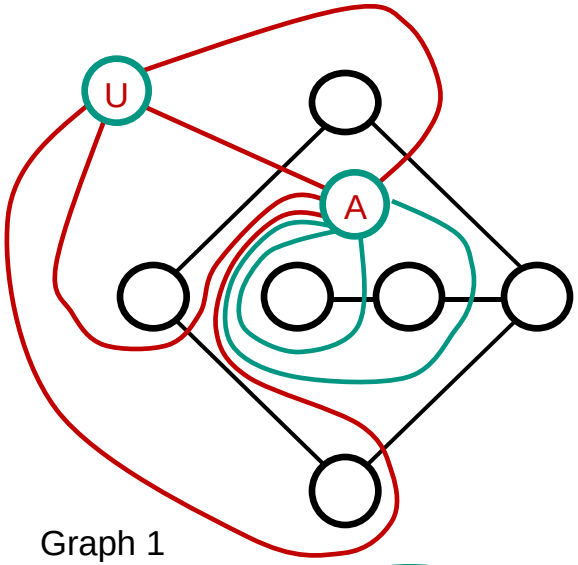


Graph 1

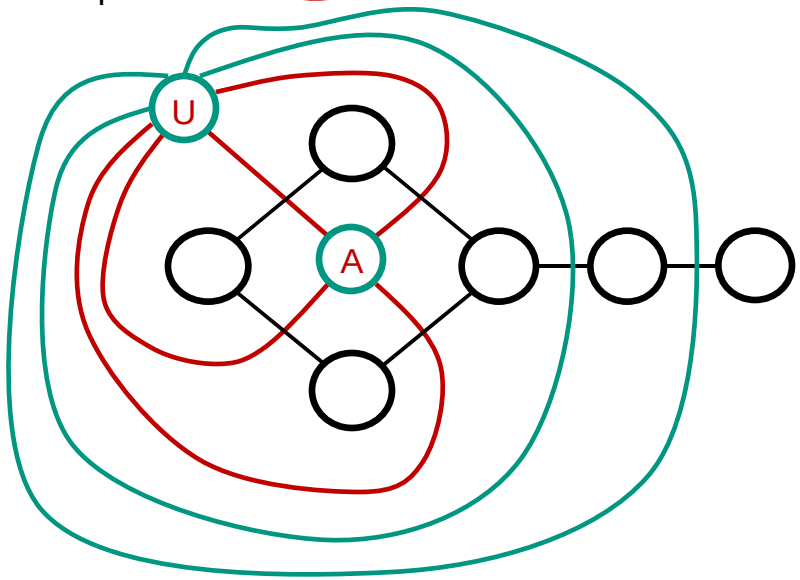


Graph 2

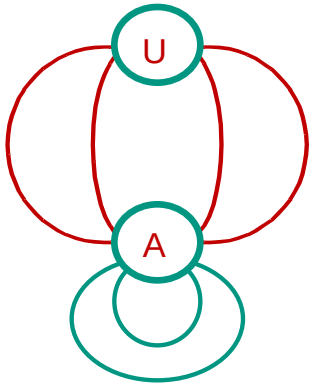
4. Aufgabe

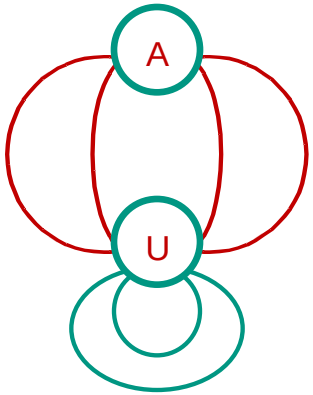


Graph 1



Graph 2





=> Duale Graphen sind isomorph

5. Aufgabe

Beweisen Sie unter ausschließlicher Benutzung der Huntingtonschen Axiome, dass folgende Regeln für jede boolesche Algebra gelten.

- Hinweis: Folgendes Vorgehen bietet sich häufig an: Erweiterung mit einem neutralen Element. Ersetzen des neutralen Elements nach H5. Anwendung des Distributivgesetzes.

Huntingtonschen Axiome

Allgemeine Boolesche Algebra: $[K, \top, \bot, \overline{\ }, O, I]$

H3: Distributivgesetz

$$(x \bot y) \top z = (x \bot z) \top (y \bot z) \qquad (x \top y) \bot z = (x \top z) \bot (y \top z) \qquad \forall x, y, z \in K$$

H4: Neutrales Element

$$I \top x = x \qquad O \bot x = x \qquad x, O, I \in K$$

H5: Komplement

$$x \bot k = I \qquad x \top k = O \qquad x, k \in K$$

$$\overline{x} = k$$

5. Aufgabe

5.1

$$
\begin{aligned}
a \top a &= (a \top a) \perp \mathrm{O} && \text{(H4)} \\
&= (a \top a) \perp (a \top \overline{a}) && \text{(H5)} \\
&= a \top (a \perp \overline{a}) && \text{(H3)} \\
&= a \top \mathrm{I} && \text{(H5)} \\
&= \underline{\underline{a}} && \text{(H4)} \\
a \perp a &= (a \perp a) \top \mathrm{I} && \text{(H4)} \\
&= (a \perp a) \top (a \perp \overline{a}) && \text{(H5)} \\
&= a \perp (a \top \overline{a}) && \text{(H3)} \\
&= a \perp \mathrm{O} && \text{(H5)} \\
&= \underline{\underline{a}} && \text{(H4)}
\end{aligned}
$$

5. Aufgabe

5.2

$$
\begin{aligned}
a \top \mathrm{O} &= (a \top \mathrm{O}) \perp \mathrm{O} && \text{(H4)} \\
&= (a \top \mathrm{O}) \perp (a \top \overline{a}) && \text{(H5)} \\
&= a \top (\mathrm{O} \perp \overline{a}) && \text{(H3)} \\
&= a \top \overline{a} && \text{(H4)} \\
&= \underline{\underline{\mathrm{O}}} && \text{(H5)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a \perp \mathrm{I} &= (a \perp \mathrm{I}) \top \mathrm{I} && \text{(H4)} \\
&= (a \perp \mathrm{I}) \top (a \perp \overline{a}) && \text{(H5)} \\
&= a \perp (\mathrm{I} \top \overline{a}) && \text{(H3)} \\
&= a \perp \overline{a} && \text{(H4)} \\
&= \underline{\underline{\mathrm{I}}} && \text{(H5)}
\end{aligned}
$$

5. Aufgabe

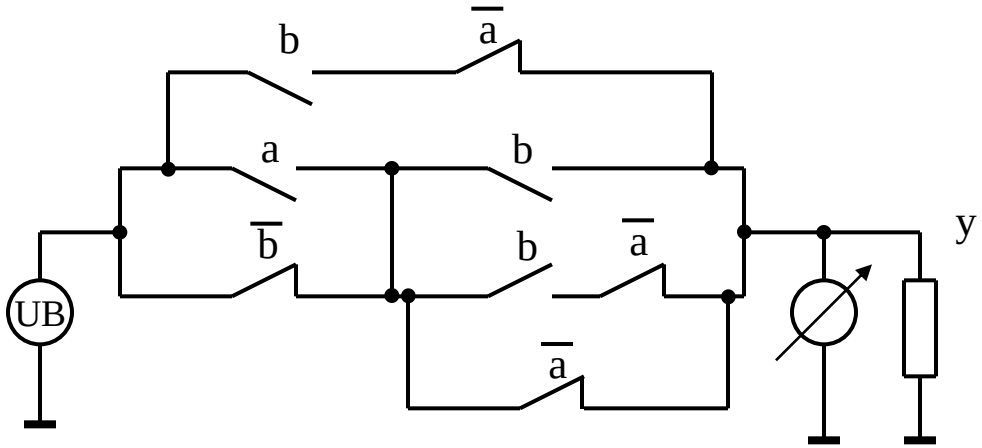
5.3

$$
\begin{aligned}
a \top (a \perp b) &= (a \perp \mathrm{O}) \top (a \perp b) && \text{(H4)} \\
&= a \perp (\mathrm{O} \top b) && \text{(H3)} \\
&= a \perp \mathrm{O} && \text{(5.2)} \\
&= \underline{\underline{a}} && \text{(H4)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a \perp (a \top b) &= (a \top \mathrm{I}) \perp (a \top b) && \text{(H4)} \\
&= a \top (\mathrm{I} \perp \mathrm{b}) && \text{(H3)} \\
&= a \top \mathrm{I} && \text{(5.2)} \\
&= \underline{\underline{a}} && \text{(H4)}
\end{aligned}
$$

6. Aufgabe

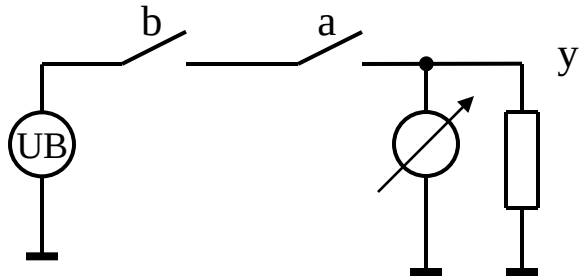
Gegeben sei das im obigen Bild dargestellte Relaisschaltnetz



6.1 Bilden Sie daraus den entsprechenden schaltalgebraischen Ausdruck und vereinfachen Sie ihn.

Schaltnetze

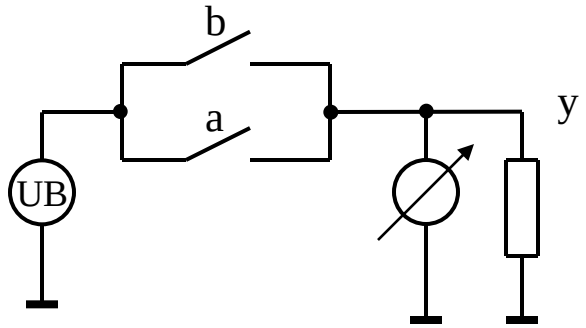
Serienschaltung



a	b	y
L	L	L
L	H	L
H	L	L
H	H	H

$y = a \,\&\, b$

Parallelschaltung

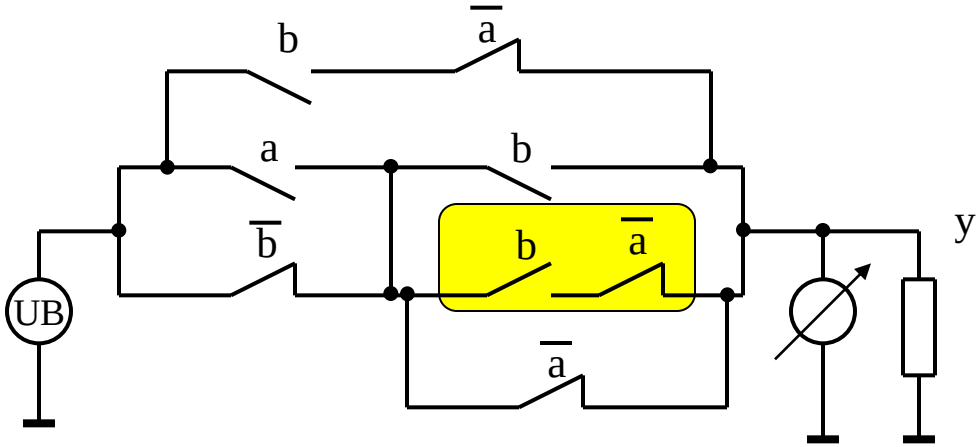


a	b	y
L	L	L
L	H	H
H	L	H
H	H	H

$y = a \vee b$

6. Aufgabe

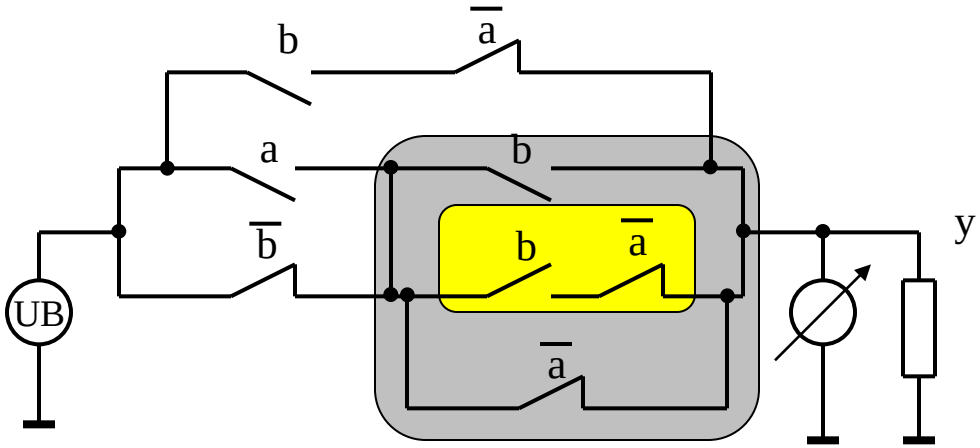
6.1



$$y = (b \,\&\, \overline{a})$$

6. Aufgabe

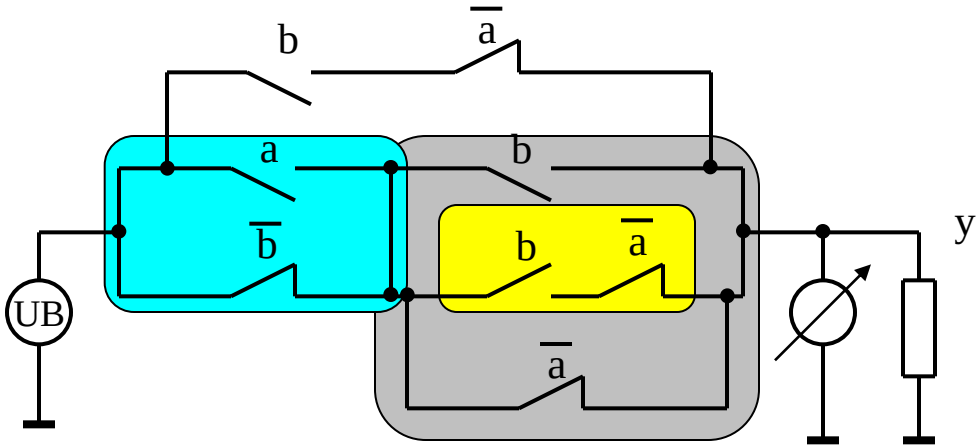
6.1



$$y = \left(\left(b \,\&\, \overline{a} \right) \vee b \vee \overline{a} \right)$$

6. Aufgabe

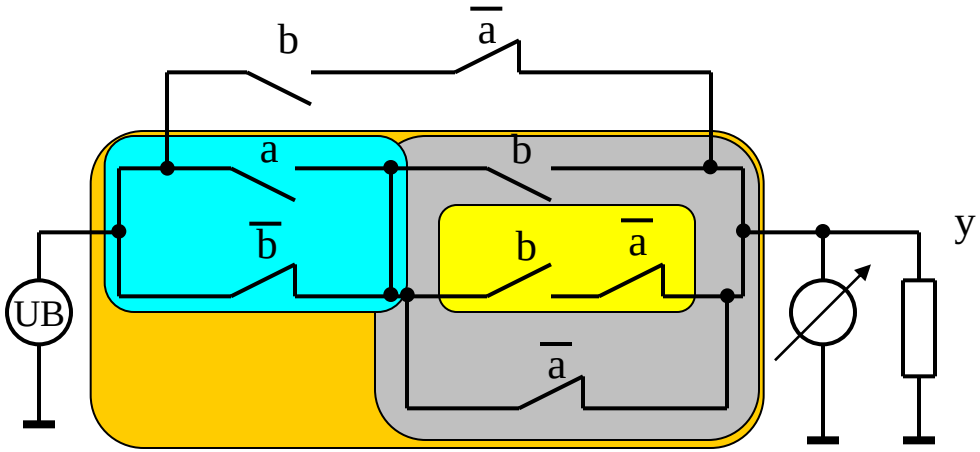
6.1



$$y = \left((b \,\&\, \overline{a}) \vee b \vee \overline{a} \right) \qquad (a \vee \overline{b})$$

6. Aufgabe

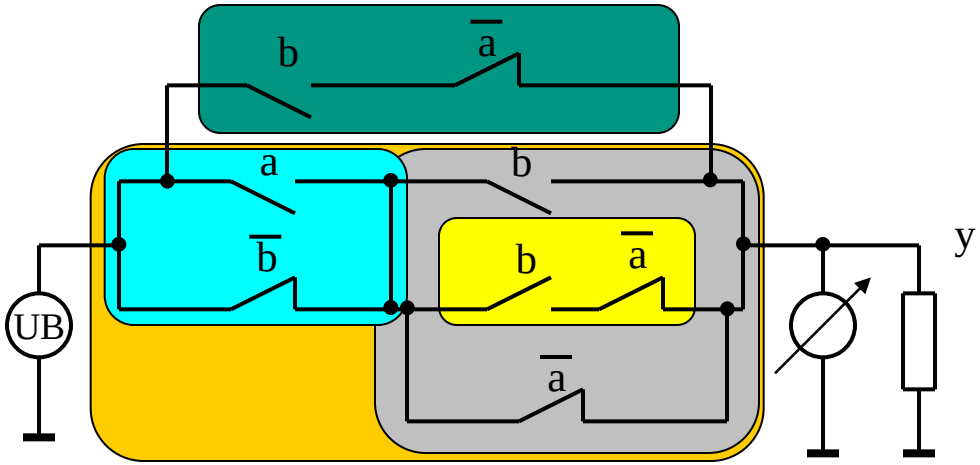
6.1



$$y = \left(\left(b \,\&\, \overline{a} \right) \vee b \vee \overline{a} \right) \,\&\, \left(a \vee \overline{b} \right)$$

6. Aufgabe

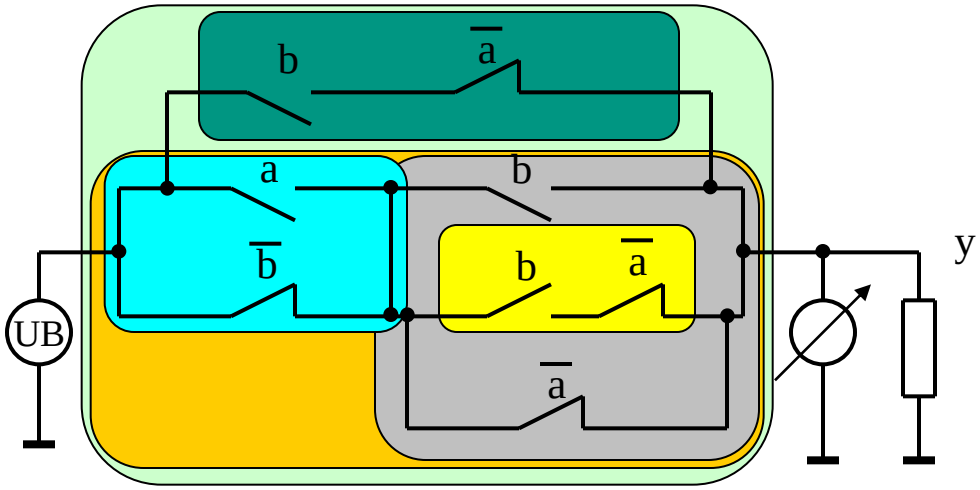
6.1



$$y = \left(\left(b \,\&\, \overline{a} \right) \vee b \vee \overline{a} \right) \,\&\, \left(a \vee \overline{b} \right) \qquad b \,\&\, \overline{a}$$

6. Aufgabe

6.1



$$y = [((b \& \overline{a}) \vee b \vee \overline{a}) \& (a \vee \overline{b})] \vee b \& \overline{a}$$

Beziehungen der Schaltalgebra

Regeln für ein Element

R5a	$a \vee 0 = a$	R5b	$a \& 1 = a$
R6a	$a \vee 1 = 1$	R6b	$a \& 0 = 0$
R7a	$a \vee a = a$	R7b	$a \& a = a$
R8a	$a \vee \bar{a} = 1$	R8b	$a \& \bar{a} = 0$

R9 $\quad \overline{(\bar{a})} = \bar{\bar{a}} = a$

Regeln für zwei oder mehr Elemente

R10a $\quad a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = a \vee b \vee c$ $\qquad$ R10b $\quad a \& (b \& c) = (a \& b) \& c = a \& b \& c$

(assoziative Gesetze)

R11a $\quad a \vee (a \& b) = a$ $\qquad$ R11b $\quad a \& (a \vee b) = a$

(Absorptionsgesetze)

R12a $\quad \overline{(a \vee b)} = \bar{a} \& \bar{b}$ $\qquad$ R12b $\quad \overline{(a \& b)} = \bar{a} \vee \bar{b}$

(De Morgansche Regeln)

6. Aufgabe

6.1

R11a

$$y = b \,\&\, \bar{a} \;\vee\; [\; (a \vee \bar{b}) \;\&\; (b \vee \bar{a} \vee (b \,\&\, \bar{a}))\;]$$

6. Aufgabe

6.1

$$y = b \,\&\, \bar{a} \;\vee\; [\; (a \vee \bar{b}) \;\&\; (b \vee \bar{a} \vee (b \,\&\, \bar{a})\,)\,]$$

$$= b \,\&\, \bar{a} \;\vee\; [\; (a \vee \bar{b}) \;\&\; (b \vee \bar{a})\;]$$

H3 - Distributivgesetz

6. Aufgabe

6.1

$$y = b \,\&\, \bar{a} \;\vee\; [\; (a \vee \bar{b}) \;\&\; (b \vee \bar{a} \vee (b \,\&\, \bar{a}))\;]$$

$$= b \,\&\, \bar{a} \;\vee\; [\; (a \vee \bar{b}) \;\&\; (b \vee \bar{a})\;]$$

$$= b \,\&\, \bar{a} \;\vee\; [\; ((a \vee \bar{b}) \,\&\, b) \vee ((a \vee \bar{b}) \,\&\, \bar{a})\;]$$

6. Aufgabe

6.1

$$y = b \,\&\, \bar{a} \;\vee\; [\; (a \vee \bar{b}) \;\&\; (b \vee \bar{a} \vee (b \,\&\, \bar{a}))\;]$$

$$= b \,\&\, \bar{a} \;\vee\; [\; (a \vee \bar{b}) \;\&\; (b \vee \bar{a})\;]$$

$$= b \,\&\, \bar{a} \;\vee\; [\; ((a \vee \bar{b}) \,\&\, b) \vee ((a \vee \bar{b}) \,\&\, \bar{a})\;]$$

$$= b \,\&\, \bar{a} \;\vee\; [\; (a \,\&\, b) \vee (b \,\&\, \bar{b}) \vee (a \,\&\, \bar{a}) \vee (\bar{b} \,\&\, \bar{a})\;]$$

R8b R8b

6. Aufgabe

6.1

$$y = b \,\&\, \bar{a} \;\vee\; [\; (a \vee \bar{b}) \;\&\; (b \vee \bar{a} \vee (b \,\&\, \bar{a}))\;]$$

$$= b \,\&\, \bar{a} \;\vee\; [\; (a \vee \bar{b}) \;\&\; (b \vee \bar{a})\;]$$

$$= b \,\&\, \bar{a} \;\vee\; [\; ((a \vee \bar{b}) \,\&\, b) \vee ((a \vee \bar{b}) \,\&\, \bar{a})\;]$$

$$= b \,\&\, \bar{a} \;\vee\; [\; (a \,\&\, b) \vee (b \,\&\, \bar{b}) \vee (a \,\&\, \bar{a}) \vee (\bar{b} \,\&\, \bar{a})\;]$$

$$= b \,\&\, \bar{a} \;\vee\; (a \,\&\, b) \vee (\bar{b} \,\&\, \bar{a})$$

H3

6. Aufgabe

6.1

$$y = b \,\&\, \bar{a} \vee [\,(a \vee \bar{b}) \,\&\, (b \vee \bar{a} \vee (b \,\&\, \bar{a}))\,]$$

$$= b \,\&\, \bar{a} \vee [\,(a \vee \bar{b}) \,\&\, (b \vee \bar{a})\,]$$

$$= b \,\&\, \bar{a} \vee [\,((a \vee \bar{b}) \,\&\, b) \vee ((a \vee \bar{b}) \,\&\, \bar{a})\,]$$

$$= b \,\&\, \bar{a} \vee [\,(a \,\&\, b) \vee (b \,\&\, \bar{b}) \vee (a \,\&\, \bar{a}) \vee (\bar{b} \,\&\, \bar{a})\,]$$

$$= b \,\&\, \bar{a} \vee (a \,\&\, b) \vee (\bar{b} \,\&\, \bar{a})$$

$$= \underbrace{b \,\&\, (a \vee \bar{a})}_{\text{R8b}} \vee (\bar{b} \,\&\, \bar{a}) = \underbrace{b \,\&\, 1}_{\text{R5b}} \vee (\bar{b} \,\&\, \bar{a})$$

6. Aufgabe

6.1

$$y = b \,\&\, \bar{a} \;\vee\; [\; (a \vee \bar{b}) \;\&\; (b \vee \bar{a} \vee (b \,\&\, \bar{a}))\;]$$

$$= b \,\&\, \bar{a} \;\vee\; [\; (a \vee \bar{b}) \;\&\; (b \vee \bar{a})\;]$$

$$= b \,\&\, \bar{a} \;\vee\; [\; ((a \vee \bar{b}) \,\&\, b) \vee ((a \vee \bar{b}) \,\&\, \bar{a})\;]$$

$$= b \,\&\, \bar{a} \;\vee\; [\; (a \,\&\, b) \vee (b \,\&\, \bar{b}) \vee (a \,\&\, \bar{a}) \vee (\bar{b} \,\&\, \bar{a})\;]$$

$$= b \,\&\, \bar{a} \;\vee\; (a \,\&\, b) \vee (\bar{b} \,\&\, \bar{a})$$

$$= b \,\&\, (a \vee \bar{a}) \vee (\bar{b} \,\&\, \bar{a}) = b \,\&\, 1 \vee (\bar{b} \,\&\, \bar{a})$$

$$= b \vee (\bar{b} \,\&\, \bar{a})$$

6. Aufgabe

6.1

$$
\begin{aligned}
y &= b \,\&\, \bar{a} \;\vee\; [\; (a \vee \bar{b}) \;\&\; (b \vee \bar{a} \vee (b \,\&\, \bar{a}))\;] \\
&= b \,\&\, \bar{a} \;\vee\; [\; (a \vee \bar{b}) \;\&\; (b \vee \bar{a})\;] \\
&= b \,\&\, \bar{a} \;\vee\; [\; ((a \vee \bar{b}) \,\&\, b) \vee ((a \vee \bar{b}) \,\&\, \bar{a})\;] \\
&= b \,\&\, \bar{a} \;\vee\; [\; (a \,\&\, b) \vee (b \,\&\, \bar{b}) \vee (a \,\&\, \bar{a}) \vee (\bar{b} \,\&\, \bar{a})\;] \\
&= b \,\&\, \bar{a} \;\vee\; (a \,\&\, b) \vee (\bar{b} \,\&\, \bar{a}) \\
&= b \,\&\, (a \vee \bar{a}) \vee (\bar{b} \,\&\, \bar{a}) = b \,\&\, 1 \vee (\bar{b} \,\&\, \bar{a}) \\
&= b \vee (\bar{b} \,\&\, \bar{a}) \\
&= b \vee \bar{a}
\end{aligned}
$$

6. Aufgabe

6.1

$$y = b \,\&\, \bar{a} \vee [\,(a \vee \bar{b}) \,\&\, (b \vee \bar{a} \vee (b \,\&\, \bar{a}))\,]$$

$$= b \,\&\, \bar{a} \vee [\,(a \vee \bar{b}) \,\&\, (b \vee \bar{a})\,]$$

$$= b \,\&\, \bar{a} \vee [\,((a \vee \bar{b}) \,\&\, b) \vee ((a \vee \bar{b}) \,\&\, \bar{a})\,]$$

$$= b \,\&\, \bar{a} \vee [\,(a \,\&\, b) \vee (b \,\&\, \bar{b}) \vee (a \,\&\, \bar{a}) \vee (\bar{b} \,\&\, \bar{a})\,]$$

$$= b \,\&\, \bar{a} \vee (a \,\&\, b) \vee (\bar{b} \,\&\, \bar{a})$$

$$= b \,\&\, (a \vee \bar{a}) \vee (\bar{b} \,\&\, \bar{a}) = b \,\&\, 1 \vee (\bar{b} \,\&\, \bar{a})$$

$$= b \vee (\bar{b} \,\&\, \bar{a})$$

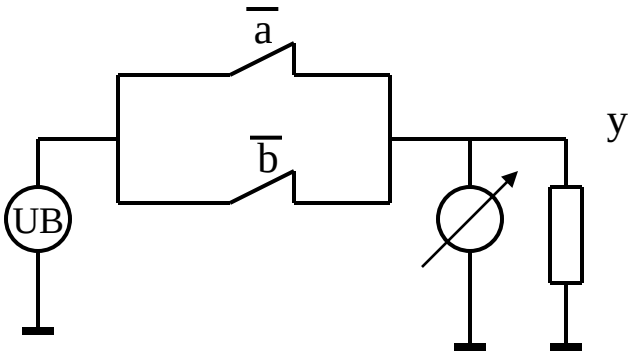
$$= b \vee \bar{a} \quad \Rightarrow \quad \text{Implikation, a impliziert b, a} \rightarrow \text{b}$$

6. Aufgabe

6.2

Entwerfen Sie ein Relaisschaltnetz, das die negative Konjunktion realisiert.

$$y = \underbrace{\overline{a \;\&\; b}}_{\text{R12b}} = \overline{a} \vee \overline{b}$$



Fröhliche Weihnachten und

einen guten Rutsch ins Neue Jahr !!!