Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Dipl.-Ing. J. Heißwolf

heisswolf@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

Digitaltechnik

5. Übung

1. Aufgabe

Zeigen Sie, dass folgende Gleichungen gelten:

1.1 $(a \,\&\, b) \vee (a \,\&\, c) \vee (b \,\&\, \bar{c}) = (a \,\&\, c) \vee (b \,\&\, \bar{c})$

indem Sie beide Seiten zur DNF erweitern.

1.2 $(a \,\&\, b) \vee (a \not\equiv b) = (a \vee b)$

indem Sie beide Seiten zur KNF erweitern.

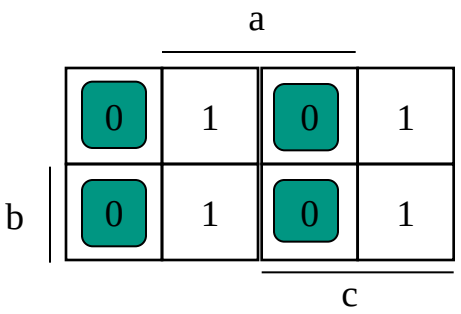
Grundlagen

Konjunktion: UND-Verknüpfung, &

Disjunktion: ODER-Verknüpfung, V

KNF: $y = \&_{j=0}^{2^n-1}(f_j \vee M_j)$ => UND-Verknüpfung aller Maxterme (Nullblöcke)

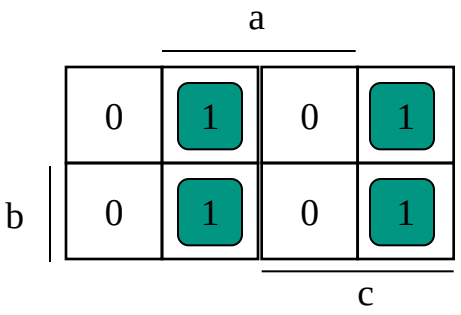
Bsp.: $y = (\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c}) \& (\bar{a} \vee b \vee \bar{c}) \&$
$(a \vee \bar{b} \vee c) \& (a \vee b \vee c)$



DNF:

$y = \vee_{j=0}^{2^n-1}(f_j \& m_j)$ => ODER-Verknüpfung aller Minterme (Einsblöcke)

Bsp.: $y = (\bar{a} \& b \& c) \vee (\bar{a} \& \bar{b} \& c) \vee$
$(a \& b \& \bar{c}) \vee (a \& \bar{b} \& \bar{c})$



1. Aufgabe

1.1 $$(a \& b) \vee (a \& c) \vee (b \& \bar{c}) = (a \& c) \vee (b \& \bar{c})$$

$$(a \& b) \vee (a \& c) \vee (b \& \bar{c}) =$$

1. Aufgabe

1.1

$$(a \& b) \vee (a \& c) \vee (b \& \bar{c}) = (a \& c) \vee (b \& \bar{c})$$

$$(a \& b) \vee (a \& c) \vee (b \& \bar{c}) = (a \& b \& 1) \vee (a \& c \& 1) \vee (1 \& b \& \bar{c})$$

1. Aufgabe

1.1

$$(a \,\&\, b) \vee (a \,\&\, c) \vee (b \,\&\, \bar{c}) = (a \,\&\, c) \vee (b \,\&\, \bar{c})$$

$$(a \,\&\, b) \vee (a \,\&\, c) \vee (b \,\&\, \bar{c}) = (a \,\&\, b \,\&\, 1) \vee (a \,\&\, c \,\&\, 1) \vee (1 \,\&\, b \,\&\, \bar{c})$$

$$= [a \,\&\, b \,\&\, (c \vee \bar{c})] \vee [a \,\&\, (b \vee \bar{b}) \,\&\, c] \vee [(a \vee \bar{a}) \,\&\, b \,\&\, \bar{c}]$$

1. Aufgabe

1.1

$$(a \,\&\, b) \vee (a \,\&\, c) \vee (b \,\&\, \bar{c}) = (a \,\&\, c) \vee (b \,\&\, \bar{c})$$

$$(a \,\&\, b) \vee (a \,\&\, c) \vee (b \,\&\, \bar{c}) = (a \,\&\, b \,\&\, 1) \vee (a \,\&\, c \,\&\, 1) \vee (1 \,\&\, b \,\&\, \bar{c})$$

$$= [a \,\&\, b \,\&\, (c \vee \bar{c})] \vee [a \,\&\, (b \vee \bar{b}) \,\&\, c] \vee [(a \vee \bar{a}) \,\&\, b \,\&\, \bar{c}]$$

$$= [abc \vee ab\bar{c}] \vee [abc \vee a\bar{b}c] \vee [abc \vee \bar{a}b\bar{c}]$$

1. Aufgabe

1.1

$$(a \,\&\, b) \vee (a \,\&\, c) \vee (b \,\&\, \bar{c}) = (a \,\&\, c) \vee (b \,\&\, \bar{c})$$

$$(a \,\&\, b) \vee (a \,\&\, c) \vee (b \,\&\, \bar{c}) = (a \,\&\, b \,\&\, 1) \vee (a \,\&\, c \,\&\, 1) \vee (1 \,\&\, b \,\&\, \bar{c})$$

$$= [a \,\&\, b \,\&\, (c \vee \bar{c})] \vee [a \,\&\, (b \vee \bar{b}) \,\&\, c] \vee [(a \vee \bar{a}) \,\&\, b \,\&\, \bar{c}]$$

$$= [abc \vee ab\bar{c}] \vee [abc \vee a\bar{b}c] \vee [abc \vee \bar{a}b\bar{c}]$$

$$= abc \vee ab\bar{c} \vee a\bar{b}c \vee \bar{a}b\bar{c}$$

1. Aufgabe

1.1 $$(a \& b) \vee (a \& c) \vee (b \& \bar{c}) = (a \& c) \vee (b \& \bar{c})$$

$$(a \& b) \vee (a \& c) \vee (b \& \bar{c}) = (a \& b \& 1) \vee (a \& c \& 1) \vee (1 \& b \& \bar{c})$$

$$= [a \& b \& (c \vee \bar{c})] \vee [a \& (b \vee \bar{b}) \& c] \vee [(a \vee \bar{a}) \& b \& \bar{c}]$$

$$= [abc \vee ab\bar{c}] \vee [abc \vee a\bar{b}c] \vee [abc \vee \bar{a}b\bar{c}]$$

$$= abc \vee ab\bar{c} \vee a\bar{b}c \vee \bar{a}b\bar{c}$$

$$(a \& c) \vee (b \& \bar{c}) = (a \& 1 \& c) \vee (1 \& b \& \bar{c})$$

1. Aufgabe

1.1 $$(a \& b) \vee (a \& c) \vee (b \& \bar{c}) = (a \& c) \vee (b \& \bar{c})$$

$$(a \& b) \vee (a \& c) \vee (b \& \bar{c}) = (a \& b \& 1) \vee (a \& c \& 1) \vee (1 \& b \& \bar{c})$$

$$= [a \& b \& (c \vee \bar{c})] \vee [a \& (b \vee \bar{b}) \& c] \vee [(a \vee \bar{a}) \& b \& \bar{c}]$$

$$= [abc \vee ab\bar{c}] \vee [abc \vee a\bar{b}c] \vee [abc \vee \bar{a}b\bar{c}]$$

$$= abc \vee ab\bar{c} \vee a\bar{b}c \vee \bar{a}b\bar{c}$$

$$(a \& c) \vee (b \& \bar{c}) = (a \& 1 \& c) \vee (1 \& b \& \bar{c})$$

$$= [a \& (b \vee \bar{b}) \& c] \vee [(a \vee \bar{a}) \& b \& \bar{c}]$$

1. Aufgabe

1.1 $(a \& b) \vee (a \& c) \vee (b \& \bar{c}) = (a \& c) \vee (b \& \bar{c})$

$$(a \& b) \vee (a \& c) \vee (b \& \bar{c}) = (a \& b \& 1) \vee (a \& c \& 1) \vee (1 \& b \& \bar{c})$$

$$= [a \& b \& (c \vee \bar{c})] \vee [a \& (b \vee \bar{b}) \& c] \vee [(a \vee \bar{a}) \& b \& \bar{c}]$$

$$= [abc \vee ab\bar{c}] \vee [abc \vee a\bar{b}c] \vee [ab\bar{c} \vee \bar{a}b\bar{c}]$$

$$= abc \vee ab\bar{c} \vee a\bar{b}c \vee \bar{a}b\bar{c}$$

$$(a \& c) \vee (b \& \bar{c}) = (a \& 1 \& c) \vee (1 \& b \& \bar{c})$$

$$= [a \& (b \vee \bar{b}) \& c] \vee [(a \vee \bar{a}) \& b \& \bar{c}]$$

$$= abc \vee a\bar{b}c \vee ab\bar{c} \vee \bar{a}b\bar{c}$$

1. Aufgabe

1.1 $(a \& b) \vee (a \& c) \vee (b \& \bar{c}) = (a \& c) \vee (b \& \bar{c})$

$$(a \& b) \vee (a \& c) \vee (b \& \bar{c}) = (a \& b \& 1) \vee (a \& c \& 1) \vee (1 \& b \& \bar{c})$$

$$= [a \& b \& (c \vee \bar{c})] \vee [a \& (b \vee \bar{b}) \& c] \vee [(a \vee \bar{a}) \& b \& \bar{c}]$$

$$= [abc \vee ab\bar{c}] \vee [abc \vee a\bar{b}c] \vee [ab\bar{c} \vee \bar{a}b\bar{c}]$$

$$= abc \vee ab\bar{c} \vee a\bar{b}c \vee \bar{a}b\bar{c}$$

$$(a \& c) \vee (b \& \bar{c}) = (a \& 1 \& c) \vee (1 \& b \& \bar{c})$$

$$= [a \& (b \vee \bar{b}) \& c] \vee [(a \vee \bar{a}) \& b \& \bar{c}]$$

$$= abc \vee a\bar{b}c \vee ab\bar{c} \vee \bar{a}b\bar{c}$$

$$abc \vee ab\bar{c} \vee a\bar{b}c \vee \bar{a}b\bar{c} = abc \vee a\bar{b}c \vee ab\bar{c} \vee \bar{a}b\bar{c}$$

1. Aufgabe

1.2

$$(a \,\&\, b) \vee (a \not\equiv b) = (a \vee b)$$

$$(a \,\&\, b) \vee (a \not\equiv b) =$$

1. Aufgabe

1.2

$$(a \,\&\, b) \vee (a \not\equiv b) = (a \vee b)$$

$$(a \,\&\, b) \vee (a \not\equiv b) = (a \,\&\, b) \vee (a \,\&\, \bar{b}) \vee (\bar{a} \,\&\, b)$$

1. Aufgabe

1.2

$$(a \,\&\, b) \vee (a \not\equiv b) = (a \vee b)$$

$$(a \,\&\, b) \vee (a \not\equiv b) = (a \,\&\, b) \vee (a \,\&\, \bar{b}) \vee (\bar{a} \,\&\, b)$$

$$= [(a \vee a) \,\&\, (a \vee \bar{b}) \,\&\, (a \vee b) \,\&\, (b \vee \bar{b})] \vee (\bar{a} \,\&\, b)$$

1. Aufgabe

1.2

$$(a \,\&\, b) \vee (a \not\equiv b) = (a \vee b)$$

$$\begin{aligned}(a \,\&\, b) \vee (a \not\equiv b) &= (a \,\&\, b) \vee (a \,\&\, \bar{b}) \vee (\bar{a} \,\&\, b) \\ &= [(a \vee a) \,\&\, (a \vee \bar{b}) \,\&\, (a \vee b) \,\&\, (b \vee \bar{b})] \vee (\bar{a} \,\&\, b) \\ &= a \vee (\bar{a} \,\&\, b)\end{aligned}$$

1. Aufgabe

1.2

$$(a \,\&\, b) \vee (a \not\equiv b) = \boxed{(a \vee b)}$$

$$\begin{aligned}
(a \,\&\, b) \vee (a \not\equiv b) &= (a \,\&\, b) \vee (a \,\&\, \bar{b}) \vee (\bar{a} \,\&\, b) \\
&= [(a \vee a) \,\&\, (a \vee \bar{b}) \,\&\, (a \vee b) \,\&\, (b \vee \bar{b})] \vee (\bar{a} \,\&\, b) \\
&= a \vee (\bar{a} \,\&\, b) \\
&= \boxed{a \vee b}
\end{aligned}$$

1. Aufgabe

1.2

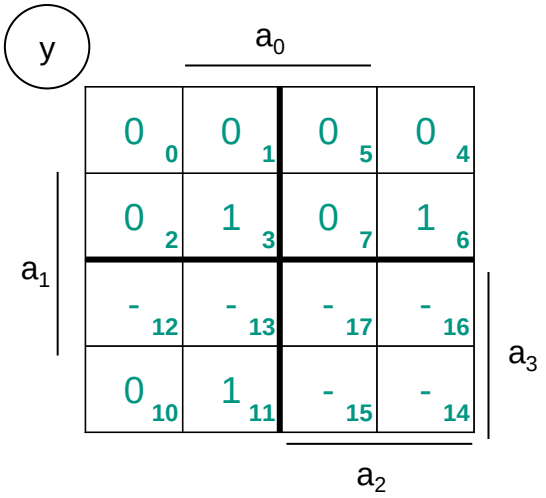
$$(a \,\&\, b) \vee (a \not\equiv b) = \boxed{(a \vee b)}$$

$$\begin{aligned}
(a \,\&\, b) \vee (a \not\equiv b) &= (a \,\&\, b) \vee (a \,\&\, \bar{b}) \vee (\bar{a} \,\&\, b) \\
&= [(a \vee a) \,\&\, (a \vee \bar{b}) \,\&\, (a \vee b) \,\&\, (b \vee \bar{b})] \vee (\bar{a} \,\&\, b) \\
&= a \vee (\bar{a} \,\&\, b) \\
&= \boxed{a \vee b}
\end{aligned}$$

$$\boxed{a \vee b} = \boxed{a \vee b}$$

Freistellen („don‘t cares“)

- **„unvollständig definierte Schaltfunktion“:** es ist mindestens eine **Don‘t-Care-Belegung (Freistelle)** vorhanden *(siehe Beispiel rechts)*
- Ergibt sich bei Eingangsbelegungen, die schaltungsbedingt **nie auftreten können**



- Daher: Zuordnung eines **beliebigen Werts** aus $f_j \in \{ 0, 1 \}$ möglich
- Bei geschicktem Eins- oder Nullsetzen dieser Freistellen: mitunter **erhebliche Vereinfachung** des Ausdrucks (einfache Realisierung mit wenigen Logikelementen wird angestrebt)
- Die geschickte Wahl von Eins- und Nullstellen ist durch bloßes „Hinsehen“ nur für sehr kleine Ordnungen *n* möglich
- Beim **Nelson-Verfahren** werden Freistellen dazu verwendet, die Blockgröße zu erhöhen

2. Aufgabe

Ein Hörsaal sei mit vier Glühlampen beleuchtet. Vier Sensoren (g_1 bis g_4) melden mit 0 die Funktion, mit 1 den Ausfall einer Glühlampe. Entwickeln Sie eine Schaltfunktion $f(g_1, g_2, g_3, g_4)$, die beim Ausfall von mindestens zwei Glühlampen den Hausmeister alarmiert (f=1). Wenn alle Glühlampen funktionieren, darf der Hausmeister nicht unnötig belästigt werden (f=0). Beim Ausfall genau einer Glühlampe darf er, muss aber nicht informiert werden.

2.1

Stellen Sie eine Funktionstabelle für f auf.

2. Aufgabe

2.1 Vorgehensweise:

- Funktionswert f=0, wenn alle Variablen gleich Null sind => alle Glühlampen sind funktionsfähig.
- Funktionswert f=1/0, d.h. unbestimmt oder „don`t care“, mit einem Strich gekennzeichnet, falls nur eine Variable gleich Eins ist => eine Glühlampe ist defekt
- Funktionswert f=1, falls mehr als eine Variable gleich Eins ist => zwei oder mehr Glühlampen sind defekt

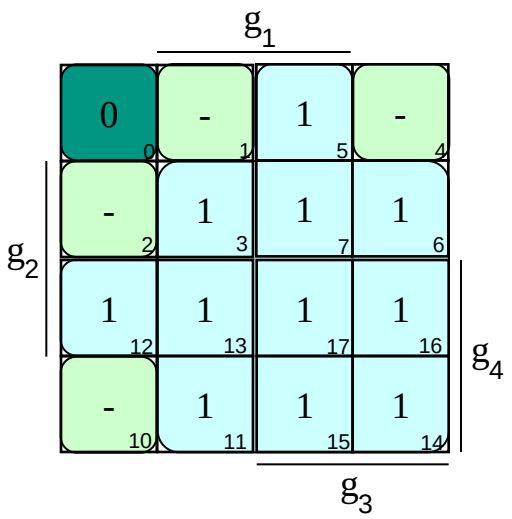
g_4	g_3	g_2	g_1	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	-
0	0	1	0	-
0	0	1	1	1
0	1	0	0	-
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	-
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

2. Aufgabe

2.1 Veranschaulichung mittels Symmetriediagramm:

g_4	g_3	g_2	g_1	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	-
0	0	1	0	-
0	0	1	1	1
0	1	0	0	-
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	-
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

f



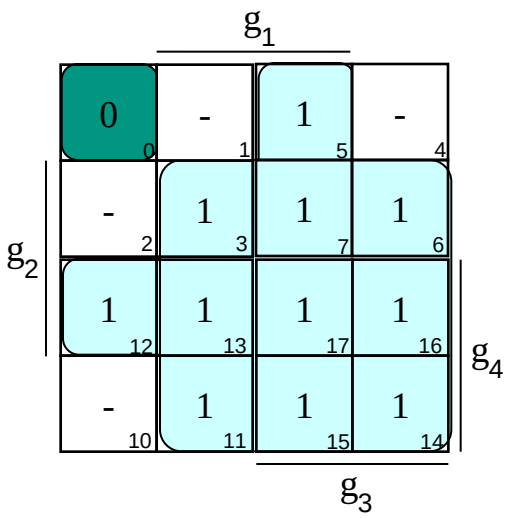
2. Aufgabe

2.2 Geben Sie die Einsstellenmenge $\{X_j\}_1$ und die Nullstellenmenge $\{X_j\}_0$ an.

$$\{X_j\}_1 = \{3,5,6,7,11,12,13,14,15,16,17\}$$

$$\{X_j\}_0 = \{0\}$$

f

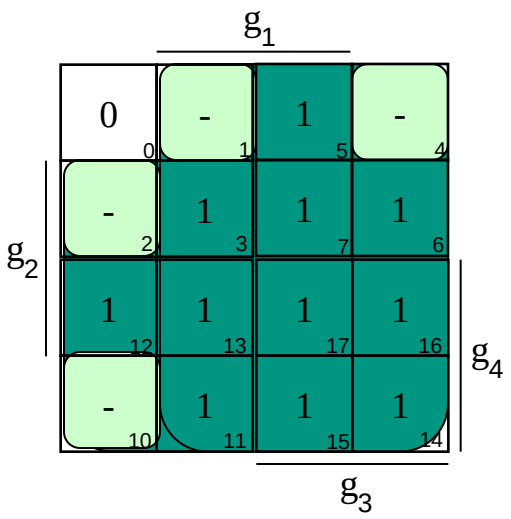


2. Aufgabe

2.3 Stellen Sie f als DNF oder als KNF dar. Was passiert nun beim Ausfall genau einer Glühlampe?

f

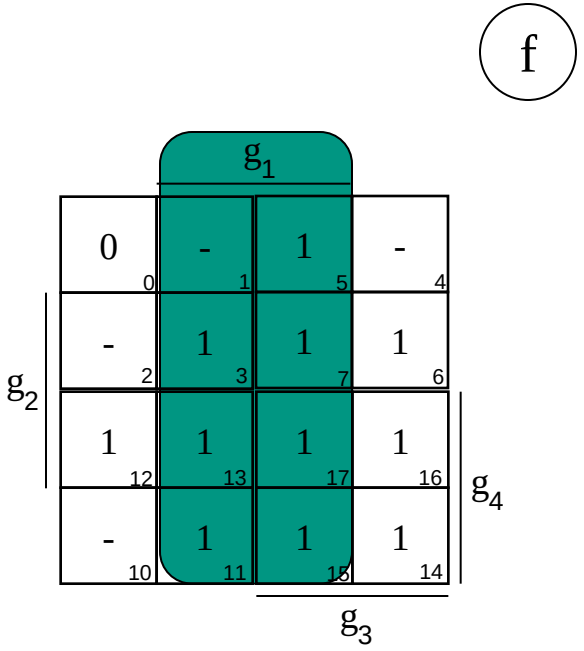
KNF: $f =$



2. Aufgabe

2.3 Stellen Sie f als DNF oder als KNF dar. Was passiert nun beim Ausfall genau einer Glühlampe?

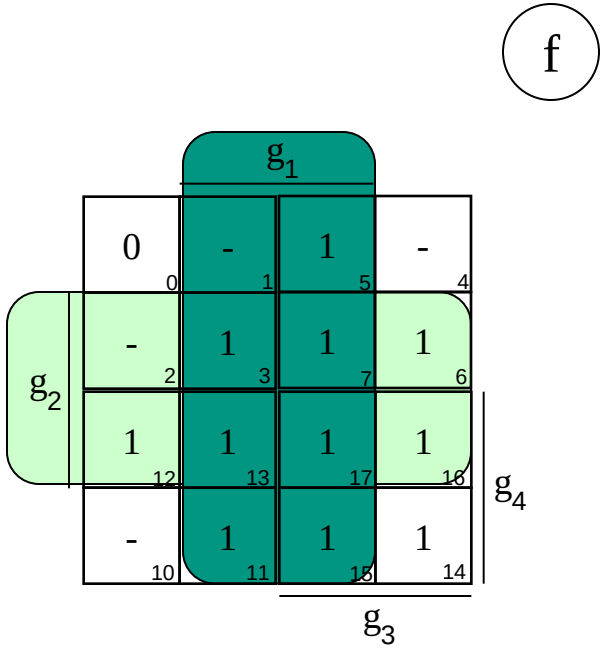
KNF: $f = g_1$



2. Aufgabe

2.3 Stellen Sie f als DNF oder als KNF dar. Was passiert nun beim Ausfall genau einer Glühlampe?

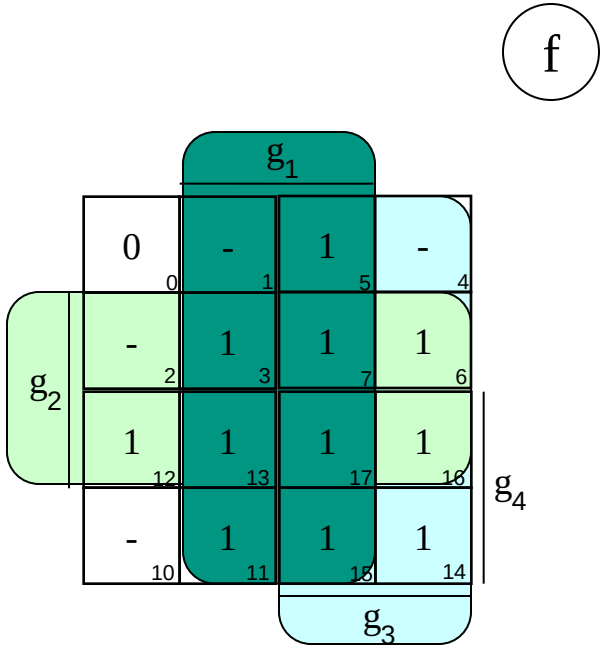
KNF: $f = g_1 \vee g_2$



2. Aufgabe

2.3 Stellen Sie f als DNF oder als KNF dar. Was passiert nun beim Ausfall genau einer Glühlampe?

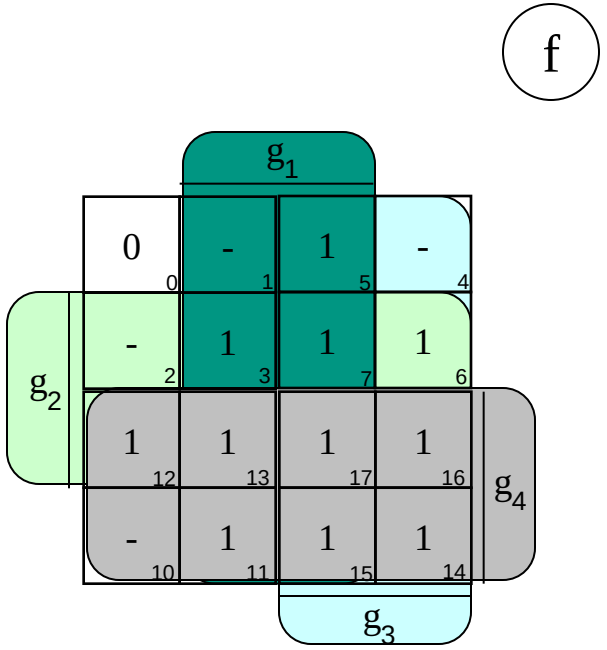
KNF: $f = g_1 \vee g_2 \vee g_3$



2. Aufgabe

2.3 Stellen Sie f als DNF oder als KNF dar. Was passiert nun beim Ausfall genau einer Glühlampe?

KNF: $f = g_1 \vee g_2 \vee g_3 \vee g_4$



Der Hausmeister wird auch alarmiert, wenn nur eine Glühlampe ausfällt. (f ist die Einsvervollständigung der ursprünglichen Funktion.)

3. Aufgabe

Gegeben sei die Funktion $f(x_4, x_3, x_2, x_1)$ durch die Angabe ihrer Minterme $f = m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_7 \vee m_{16} \vee m_{17}$

3.1 Geben Sie f in der im Buch auf S. 118 gezeigten Form mit oktalen Indizes an ($y_{xyz...}$).

Grundlagen

Minterm:

$$m_j = \&_{i=1}^{n} \ddot{x}_{ij} = \ddot{x}_{nj} \& \ldots \& \ddot{x}_{2j} \& \ddot{x}_{1j}$$

Bsp.: $\bar{x}_n \& \ldots \& x_2 \& \bar{x}_1$

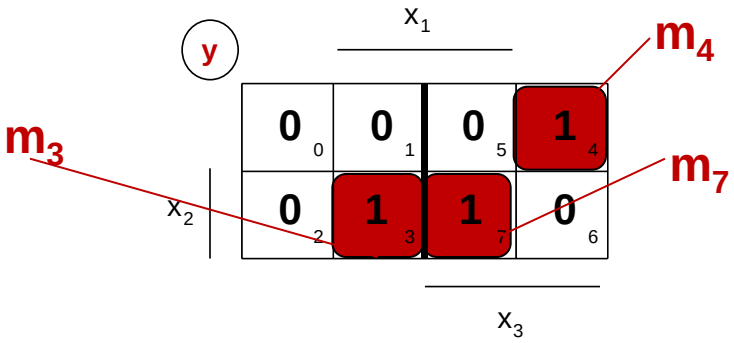
Maxterm:

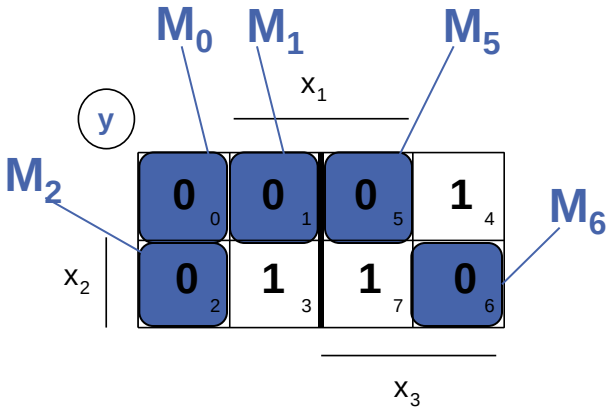
$$m_j = \bigvee_{i=1}^{n} \bar{\ddot{x}}_{ij} = \bar{\ddot{x}}_{nj} \vee \ldots \vee \bar{\ddot{x}}_{2j} \vee \bar{\ddot{x}}_{1j}$$

Bsp.: $x_n \vee \ldots \vee \bar{x}_2 \vee x_1$

Minterm und Maxterm

- Jede Schaltfunktion lässt sich durch Disjunktion ihrer **Minterme** (DNF) oder durch Konjunktion ihrer **Maxterme** (KNF) eindeutig beschreiben





- **Minterme m_i** projizieren **Einsstellen** auf eine beliebige Stelle im S-Diagramm

$$m_3 = \overline{x_3} \,\&\, x_2 \,\&\, x_1$$

$$m_4 = x_3 \,\&\, \overline{x_2} \,\&\, \overline{x_1}$$

$$m_7 = x_3 \,\&\, x_2 \,\&\, x_1$$

- **Maxterme M_i** projizieren **Nullstellen** auf eine beliebige Stelle im S-Diagramm

$$M_0 = x_3 \vee x_2 \vee x_1$$

$$M_1 = x_3 \vee x_2 \vee \overline{x_1}$$

$$M_2 = x_3 \vee \overline{x_2} \vee x_1$$

$$M_5 = \overline{x_3} \vee x_2 \vee \overline{x_1}$$

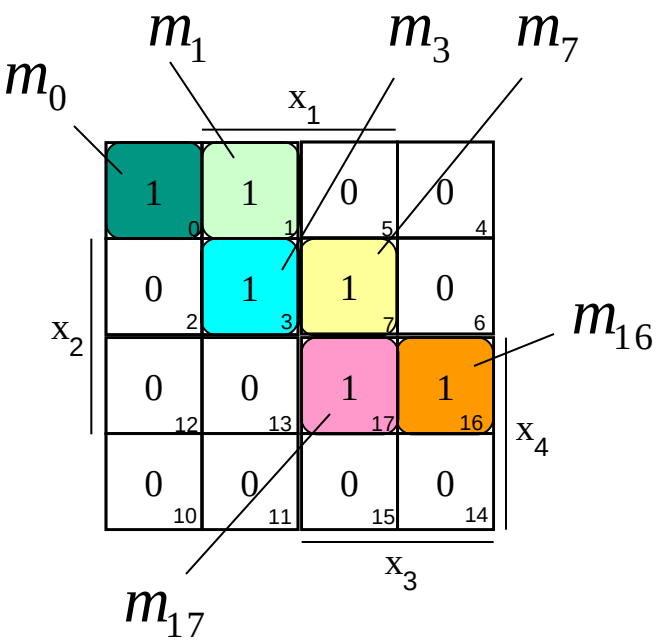
$$M_6 = \overline{x_3} \vee \overline{x_2} \vee x_1$$

$$(m_3 \vee m_4 \vee m_7) \equiv y \equiv (M_0 \,\&\, M_1 \,\&\, M_2 \,\&\, M_5 \,\&\, M_6)$$

3. Aufgabe

3.1 Funktionstabelle für

$$f = m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_7 \vee m_{16} \vee m_{17}$$

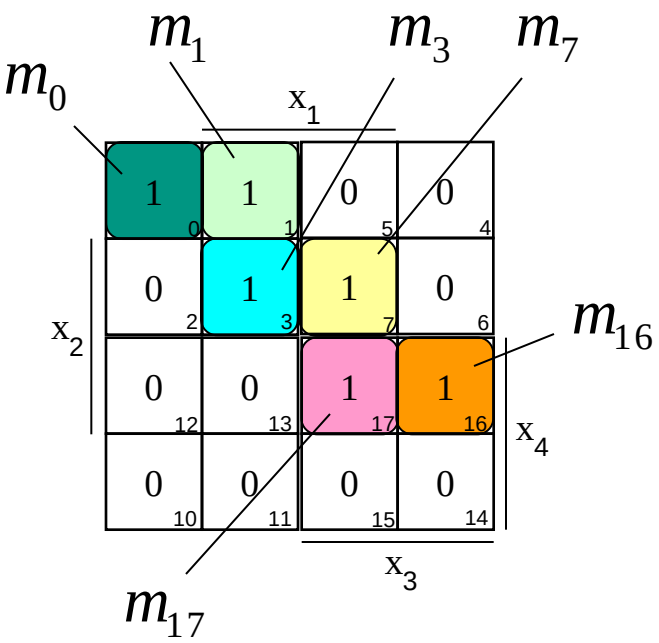


j_0	x_4	x_3	x_2	x_1	f
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
10	1	0	0	0	0
11	1	0	0	1	0
12	1	0	1	0	0
13	1	0	1	1	0
14	1	1	0	0	0
15	1	1	0	1	0
16	1	1	1	0	1
17	1	1	1	1	1

3. Aufgabe

3.1 Funktionstabelle für

$$f = m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_7 \vee m_{16} \vee m_{17}$$



$$f(x_4, x_3, x_2, x_1) = y_{140213}$$

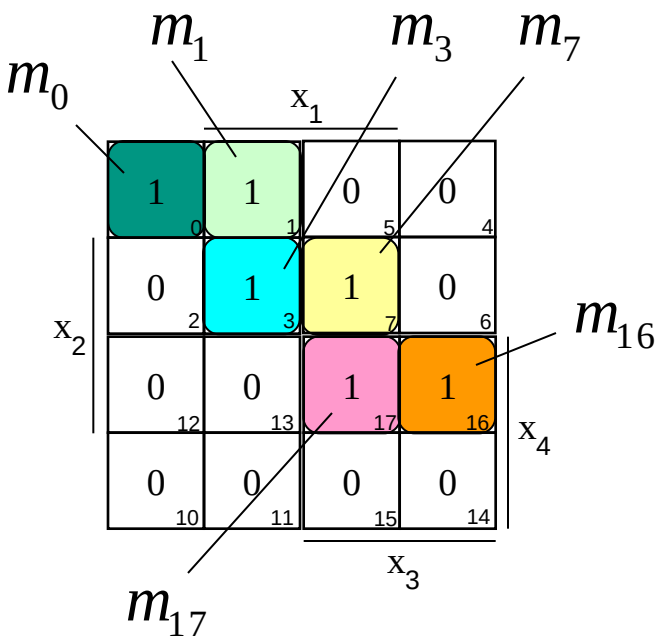
j_0	x_4	x_3	x_2	x_1	f	
0	0	0	0	0	1	
1	0	0	0	1	1	3
2	0	0	1	0	0	
3	0	0	1	1	1	
4	0	1	0	0	0	1
5	0	1	0	1	0	
6	0	1	1	0	0	
7	0	1	1	1	1	2
10	1	0	0	0	0	
11	1	0	0	1	0	
12	1	0	1	0	0	0
13	1	0	1	1	0	
14	1	1	0	0	0	
15	1	1	0	1	0	4
16	1	1	1	0	1	
17	1	1	1	1	1	1

Oktalwerte ablesen !!!

3. Aufgabe

3.2 Zeichnen Sie f in ein Symmetriediagramm ein.

$$f = m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_7 \vee m_{16} \vee m_{17}$$



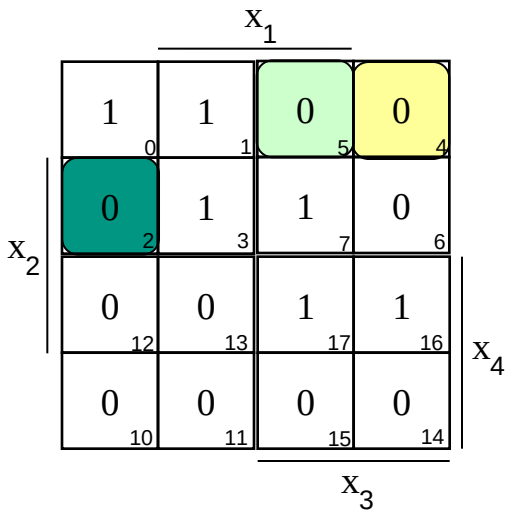
3. Aufgabe

3.3 Geben Sie die drei Maxterme mit den kleinsten Indizes an, für die $f_j = 0$ gilt

$M_2 =$

$M_4 =$

$M_5 =$



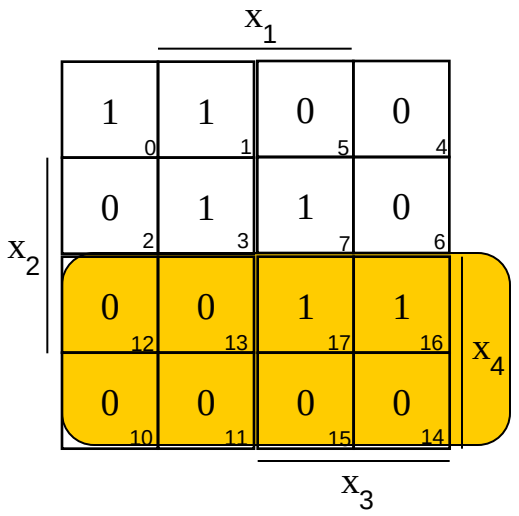
3. Aufgabe

3.3 Geben Sie die drei Maxterme mit den kleinsten Indizes an, für die $f_j = 0$ gilt

$$M_2 = x_4$$

$$M_4 =$$

$$M_5 =$$



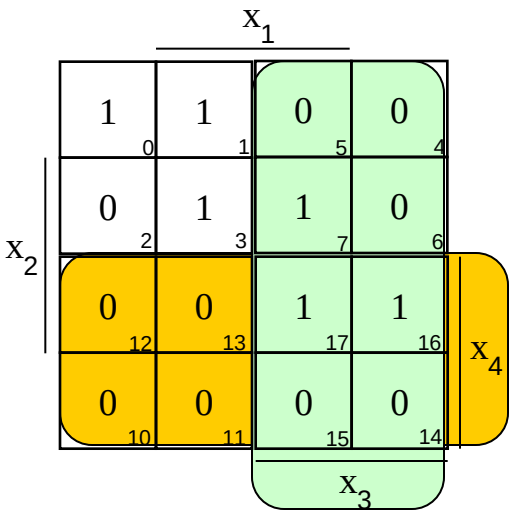
3. Aufgabe

3.3 Geben Sie die drei Maxterme mit den kleinsten Indizes an, für die $f_j = 0$ gilt

$$M_2 = x_4 \vee x_3$$

$$M_4 =$$

$$M_5 =$$



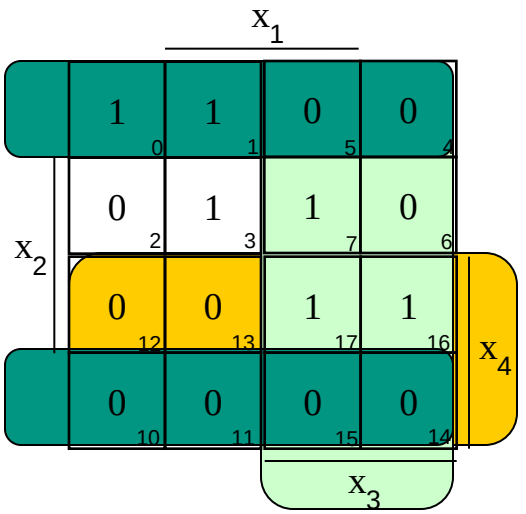
3. Aufgabe

3.3 Geben Sie die drei Maxterme mit den kleinsten Indizes an, für die $f_j = 0$ gilt

$$M_2 = x_4 \vee x_3 \vee \overline{x_2}$$

$$M_4 =$$

$$M_5 =$$



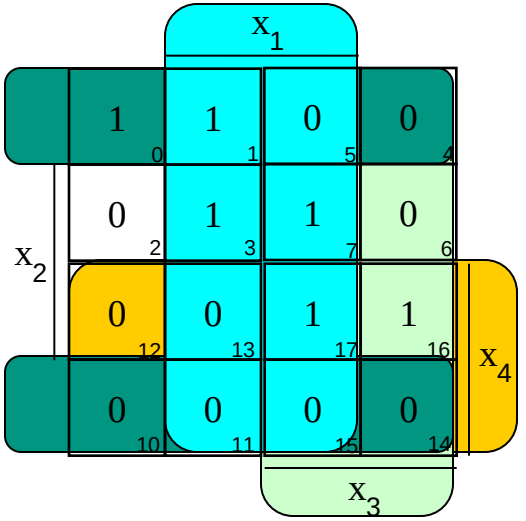
3. Aufgabe

3.3 Geben Sie die drei Maxterme mit den kleinsten Indizes an, für die $f_j = 0$ gilt

$$M_2 = x_4 \vee x_3 \vee \overline{x_2} \vee x_1$$

$$M_4 =$$

$$M_5 =$$



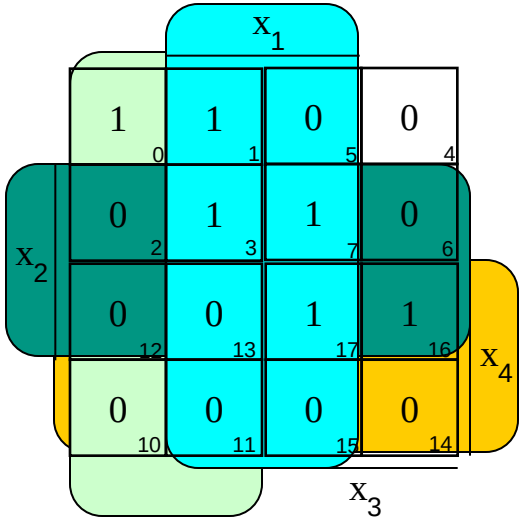
3. Aufgabe

3.3 Geben Sie die drei Maxterme mit den kleinsten Indizes an, für die $f_j = 0$ gilt

$$M_2 = x_4 \vee x_3 \vee \overline{x_2} \vee x_1$$

$$M_4 = x_4 \vee \overline{x_3} \vee x_2 \vee x_1$$

$$M_5 =$$



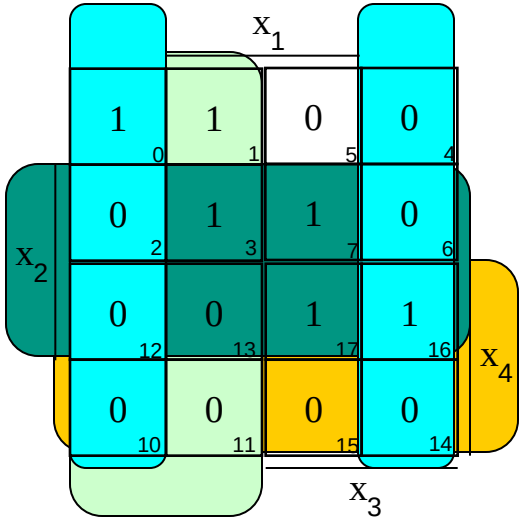
3. Aufgabe

3.3 Geben Sie die drei Maxterme mit den kleinsten Indizes an, für die $f_j = 0$ gilt

$$M_2 = x_4 \vee x_3 \vee \overline{x_2} \vee x_1$$

$$M_4 = x_4 \vee \overline{x_3} \vee x_2 \vee x_1$$

$$M_5 = x_4 \vee \overline{x_3} \vee x_2 \vee \overline{x_1}$$



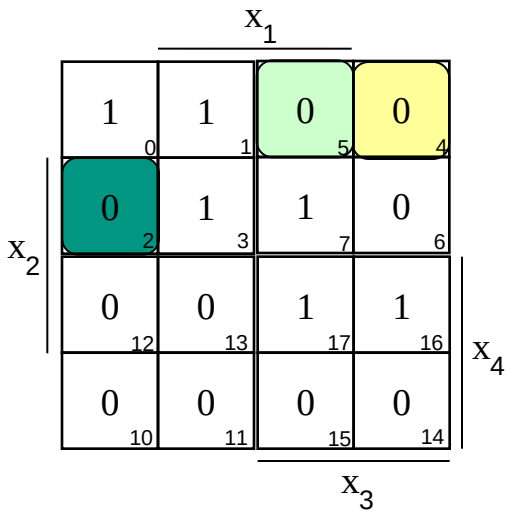
3. Aufgabe

3.3 Geben Sie die drei Maxterme mit den kleinsten Indizes an, für die $f_j = 0$ gilt

$$M_2 = x_4 \vee x_3 \vee \overline{x_2} \vee x_1$$

$$M_4 = x_4 \vee \overline{x_3} \vee x_2 \vee x_1$$

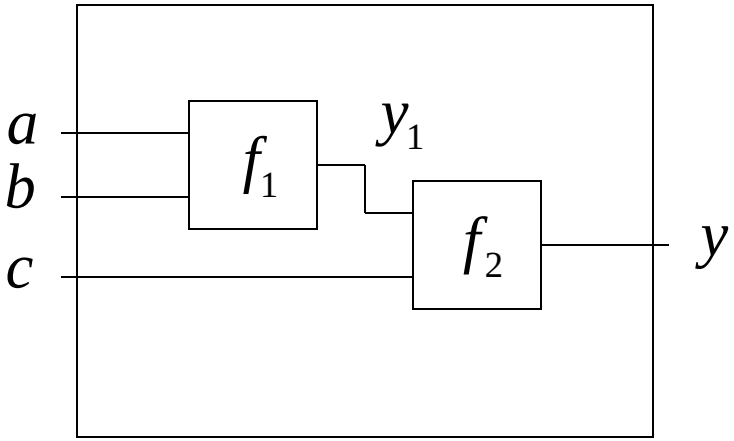
$$M_5 = x_4 \vee \overline{x_3} \vee x_2 \vee \overline{x_1}$$



4. Aufgabe

Eine Schaltfunktion besteht, wie im nachfolgenden Bild dargestellt, aus den Teilfunktionen $y_1 = f_1(a,b)$ und $y = y_2 = f_2(c,y_1)$.

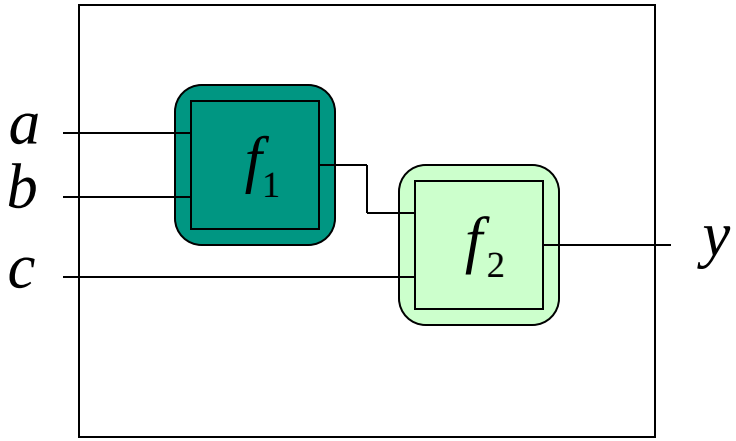
Dafür ist die folgende Funktionstabelle bekannt:



a	b	y_1	c	y
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0

4. Aufgabe

4.1 Ist die Funktion vollständig spezifiziert?



a	b	y_1	c	y
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0

$$y_1 = a \not\equiv b = a \; xor \; b = a\bar{b} \vee \bar{a}b$$

$$y = y_1 \equiv c = y_1 c \vee \overline{y_1}\,\bar{c}$$

4. Aufgabe

4.2 Stellen Sie die Funktionstabelle für die Funktion y = f(a,b,c) auf.

a	b	y_1	c	y
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0

a	b	c	y_1	y
0	0	0	0	1
0	0	1	0	
0	1	0	1	
0	1	1	1	
1	0	0	1	
1	0	1	1	
1	1	0	0	
1	1	1	0	

4. Aufgabe

4.2 Stellen Sie die Funktionstabelle für die Funktion y = f(a,b,c) auf.

a	b	y_1	c	y
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0

a	b	c	y_1	y
0	0	0	0	1
0	0	1	0	0
0	1	0	1	
0	1	1	1	
1	0	0	1	
1	0	1	1	
1	1	0	0	
1	1	1	0	

4. Aufgabe

4.2 Stellen Sie die Funktionstabelle für die Funktion y = f(a,b,c) auf.

a	b	y_1	c	y
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0

a	b	c	y_1	y
0	0	0	0	1
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	
1	0	0	1	
1	0	1	1	
1	1	0	0	
1	1	1	0	

4. Aufgabe

4.2 Stellen Sie die Funktionstabelle für die Funktion y = f(a,b,c) auf.

a	b	y_1	c	y
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0

a	b	c	y_1	y
0	0	0	0	1
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	1	0	0

5. Aufgabe

Stellen Sie folgenden Ausdruck in allen im Skript aufgeführten Basissystemen dar:

$$y = (a \,\&\, \bar{b}) \vee \bar{a}$$

Huntingtonschen Axiome

Allgemeine Boolesche Algebra: $[K, \top, \bot, \bar{\ }, O, I]$

H3: Distributivgesetz

$$(x \bot y) \top z = (x \top z) \bot (y \top z) \qquad (x \top y) \bot z = (x \bot z) \top (y \bot z) \qquad \forall x, y, z \in K$$

H4: Neutrales Element

$$I \top x = x \qquad O \bot x = x \qquad x, O, I \in K$$

H5: Komplement

$$x \bot k = I \qquad x \top k = O \qquad x, k \in K$$

Beziehungen der Schaltalgebra

Regeln für ein Element

R5a	$a \vee 0 = a$	R5b	$a \& 1 = a$
R6a	$a \vee 1 = 1$	R6b	$a \& 0 = 0$
R7a	$a \vee a = a$	R7b	$a \& a = a$
R8a	$a \vee \bar{a} = 1$	R8b	$a \& \bar{a} = 0$

R9 $\quad \overline{(a)} = \bar{\bar{a}} = a$

Regeln für zwei oder mehr Elemente

R10a $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = a \vee b \vee c$ R10b $a \& (b \& c) = (a \& b) \& c = a \& b \& c$

(assoziative Gesetze)

R11a $a \vee (a \& b) = a$ R11b $a \& (a \vee b) = a$

(Absorptionsgesetze)

R12a $\overline{(a \vee b)} = \bar{a} \& \bar{b}$ R12b $\overline{(a \& b)} = \bar{a} \vee \bar{b}$

(De Morgansche Regeln)

Basissysteme

3 Operatoren:	NICHT, UND, ODER
2 Operatoren:	NICHT, UND
	NICHT, ODER
	UND, ANTIVALENZ
1 Operator:	NAND
	NOR

=> Darstellung in 6 Basissystemen !!!

5. Aufgabe

5.1 BS: NICHT, UND, ODER

$$y = (a \,\&\, \bar{b}) \vee \bar{a} \overset{(H3)}{=} (a \vee \bar{a}) \,\&\, (\bar{b} \vee \bar{a})$$

$$\overset{(R8a)}{=} 1 \,\&\, (\bar{b} \vee \bar{a}) \overset{(R5b)}{=} \underline{\underline{\bar{b} \vee \bar{a}}}$$

5. Aufgabe

5.1 BS: NICHT, UND, ODER

$$y = (a \,\&\, \bar{b}) \vee \bar{a} = (a \vee \bar{a}) \,\&\, (\bar{b} \vee \bar{a})$$

$$= 1 \,\&\, (\bar{b} \vee \bar{a}) = \underline{\underline{\bar{b} \vee \bar{a}}}$$

DeMorgan

BS: NICHT, UND

$$y = \bar{b} \vee \bar{a} \overset{(R9)}{=} \overline{\overline{\bar{b} \vee \bar{a}}} \overset{(R12a)}{=} \overline{\overline{b} \,\&\, \overline{a}} \overset{(R9)}{=} \underline{\underline{b \,\&\, a}}$$

5. Aufgabe

5.1 BS: NICHT, UND, ODER

$$y = (a \,\&\, \bar{b}) \vee \bar{a} = (a \vee \bar{a}) \,\&\, (\bar{b} \vee \bar{a})$$

$$= 1 \,\&\, (\bar{b} \vee \bar{a}) = \underline{\underline{\bar{b} \vee \bar{a}}}$$

DeMorgan

BS: NICHT, UND

$$y = \bar{b} \vee \bar{a} = \overline{\overline{\bar{b} \vee \bar{a}}} = \overline{\overline{\bar{b}}\;\overline{\bar{a}}} = \overline{b \,\&\, a} = \underline{\underline{b \,\&\, a}}$$

BS: NICHT, ODER

$$y = \underline{\underline{\bar{b} \vee \bar{a}}}$$

5. Aufgabe

BS: UND, ANTIVALENZ

$$y = \overline{b \,\&\, a} = (b \,\&\, a) \not\equiv 1$$

mit $\overline{a} = a \not\equiv 1$

5. Aufgabe

BS: UND, ANTIVALENZ

$$y = \overline{b \,\&\, a} = \underline{\underline{(b \,\&\, a) \not\equiv 1}}$$

mit $\overline{a} = a \not\equiv 1$

BS: NAND

$$y = \overline{b \,\&\, a} = \underline{\underline{a \,\&\, \overline{b}}}$$

5. Aufgabe

BS: UND, ANTIVALENZ

$$y = \overline{b \,\&\, a} = (b \,\&\, a) \not\equiv 1$$

mit $\bar{a} = a \not\equiv 1$

BS: NAND

$$y = \overline{b \,\&\, a} = a \,\overline{\&}\, b$$

mit $a \vee a = a$

$a \vee \bar{a} = \bar{a}$

BS: NOR

$$y = \bar{b} \vee \bar{a} \overset{(R9)}{=} \overline{\overline{\bar{b} \vee \bar{a}}} = \overline{\bar{b}\,\bar{\vee}\,\bar{a}} \overset{(R7a)}{=} \overline{(\bar{b}\,\bar{\vee}\,\bar{a})\,\bar{\vee}\,(\bar{b}\,\bar{\vee}\,\bar{a})}$$

$$= [(a \,\bar{\vee}\, a)\,\bar{\vee}\,(b \,\bar{\vee}\, b)]\,\bar{\vee}\,[(a \,\bar{\vee}\, a)\,\bar{\vee}\,(b \,\bar{\vee}\, b)]$$