

Digitaltechnik

3. Tutorium - Lösung

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV), Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Aufgabe 1: Zahlencodierung

Eine Serie von drei mehrstelligen Zahlen ist im BCD-System gegeben.

Zahl a: 0010 0100 1000

Zahl b: 0101 0001 0101

Zahl c: 0001 0011 1001

1.1 Führen Sie eine Addition aller drei Zahlen durch ($a+b+c$).

Im BCD-System entsprechen je 4 Ziffern einer Ziffer im Dezimalsystem von 0 bis 9. Somit muss man die Pseudotetraden beachten und bei Werten über 1001 mit einer Addition von 0110 korrigieren. *PS* kennzeichnet hier die Korrektur von Pseudotetraden, die auch den Übertrag in die nächste Ziffer hervorrufen.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccc}
 & 0010 & 0100 & 1000 & 248_D \\
 + & 0101 & 0001 & 0101 & 515_D \\
 \hline
 & 0111 & 0101 & 1101 & \\
 + & & & 0110 & PS \\
 \hline
 & & & 1 & \\
 \hline
 & 0111 & 0110 & 0011 & 763_D \\
 + & 0001 & 0011 & 1001 & 139_D \\
 \hline
 & 1000 & 1001 & 1100 & \\
 + & & & 0110 & PS \\
 \hline
 & & & 1 & \\
 \hline
 & 1000 & 1010 & 0010 & \\
 + & & 0110 & & PS \\
 \hline
 & & & 1 & \\
 \hline
 & 1001 & 0000 & 0010 & 902_D
 \end{array}
 \end{array}$$

1.2 Wandeln Sie die Zahlen ins Hexadezimalsystem um und führen Sie erneut die Addition durch ($a+b+c$). (*Hinweis: Die Zahlen sind nicht binär codiert.*)

Darstellen der BCD-Zeichen im Dezimalsystem und Umrechnen ins Hex. Beim Addieren im Hex-System ist der Übertrag bei einer Zahl größer als F(15) zu beachten.

Bsp.: $B + B = 11 + 11 = 22 = 16 + 6 \rightarrow \text{Stelle} = 6, \text{Übertrag} = 1$

$001001001000 = 248_D$

$010100010101 = 515_D$

$000100111001 = 139_D$

$$248 : 16 = 15 \text{ R } 8$$

$$15 : 16 = 0 \text{ R } 15$$

$$248_D = F8_H$$

$$515 : 16 = 32 \text{ R } 3$$

$$32 : 16 = 2 \text{ R } 0$$

$$2 : 16 = 0 \text{ R } 2$$

$$515_D = 203_H$$

$$139 : 16 = 8 \text{ R } 11$$

$$8 : 16 = 0 \text{ R } 8$$

$$139_D = 8B_H$$

$$\begin{array}{r}
 F8 \\
 + \quad 203 \\
 \hline
 2FB \quad = 2 \cdot 256 + 15 \cdot 16 + 11 = 512 + 240 + 11 = 763_D \\
 + \quad 8B \\
 \hline
 11 \\
 \hline
 386 \quad = 3 \cdot 256 + 8 \cdot 16 + 6 = 768 + 128 + 6 = 902_D
 \end{array}$$

Aufgabe 2: Mengen und Relationen

2.1 Geben Sie die mathematische Definition für die folgenden Eigenschaften einer Relation an.

Reflexivität: $x\alpha x, \forall x \in M$

Symmetrie: $x\alpha y \Rightarrow y\alpha x, \forall x, y \in M$

Antisymmetrie: $x\alpha y \wedge y\alpha x \Rightarrow x = y, \forall x, y \in M$

Transitivität: $x\alpha y \wedge y\alpha z \Rightarrow x\alpha z, \forall x, y, z \in M$

2.2 Geben Sie an, welche der oben genannten Eigenschaften einer Relation auf die einzelnen Aussagen zutreffen.

„ist kleiner oder gleich“ **reflexiv, antisymmetrisch, transitiv**

„Gleichheit“ **reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv**

„ist ein Vielfaches von“ **reflexiv, antisymmetrisch, transitiv**

Im Folgenden sind die beiden abzählbaren Mengen A und B gegeben. Die Elemente der Menge A sind mit:

$$A = \{ 1, 5, 7 \}$$

bekannt. Außerdem gelten die folgenden Beziehungen:

$$|A \times B| = 6 \quad C_{A \cup B}(A) = \{3\}$$

2.3 Geben Sie an, wie viele Elemente die gesuchte Menge B besitzen muss.

$|A \times B| = |A| \cdot |B|$, mit $|A| = 3$ folgt $|B| = 2$, damit besitzt die Menge B zwei Elemente.

2.4 Nennen Sie alle Lösungsmöglichkeiten für die Menge B.

$$B = \{1, 3\} \quad B = \{5, 3\} \quad B = \{7, 3\}$$

Aufgabe 3: Rechnungen in verschiedenen Zahlenformaten

Rechnen mit Fließkommazahlen

Zur Verwendung in einem Microcontroller wurde eine platzsparende Darstellung von Fließkommazahlen in einem einzigen Byte entwickelt. Das höchstwertige Bit stellt das Vorzeichen V dar, die vier niederwertigsten Bits die Mantisse M und die drei Bits in der Mitte den Exponenten E (siehe Abbildung 1).

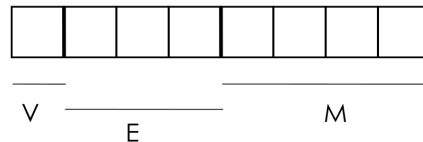


Abbildung 1: 8-Bit-Fließkommazahl

Für alle möglichen binären Belegungen ergibt sich der Dezimalwert Z aus nachstehender Formel (vgl. IEEE-Fließkommazahl):

$$Z_D = (-1)^V \cdot 2^{E-3} \cdot (1, M)$$

3.1 Berechnen Sie den Dezimalwert der Belegung 10011000.

$$Z = (-1) \cdot 2^{(1-3)} \cdot 1,5 = (-1) \cdot 2^{(-2)} \cdot 1,5 = (-1) \cdot 0,25 \cdot 1,5 = -0,375$$

3.2 Geben Sie die größte Dezimalzahl ungleich unendlich an, die mit dieser 8-Bit-Fließkommazahl dargestellt werden kann. Geben Sie die Zahl in 8-Bit-Fließkomma- und Dezimaldarstellung an! Geben Sie Ihren Rechenweg an!

$$Z = (+1) \cdot 2^{(7-3)} \cdot (1,0 + 2^{(-1)} + 2^{(-2)} + 2^{(-3)} + 2^{(-4)}) = 2^4 \cdot (1,0 + 0,5 + 0,25 + 0,125 + \frac{1}{16}) = 31$$

$$\rightarrow V = 0_D; E = 7_D; M = (1,0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16})_D = (1,9375)_D$$

$$\rightarrow V = 0_B; E = 111_B; M = 1111_B$$

$$Z_{8Fkz} = 0111\ 1111 \quad Z_{Dez} = 2^4 \cdot 1 + \frac{15}{16} = \frac{16 \cdot 31}{16} = 31$$

$$\text{IEEE-Standard: } E = 2^r - 1, M = 0 \rightarrow \infty$$

3.3 Geben Sie die Dezimalzahl mit dem kleinsten Betrag an, die mit dieser 8-Bit-Fließkommazahl dargestellt werden kann (*kein IEEE-Standard*). Geben Sie Ihren Rechenweg an.

V=0 der V=1:

$$Z = (-1) \cdot 2^{(0-3)} \cdot (1,0) = (-1) \cdot 2^{(-3)} \cdot 1,0$$

$$E = 0_D; M = 0_D$$

$$E = 000_B; M = 0000_B$$

$$Z_{8Fkz} = 1000\ 0000 \text{ oder } Z_{8Fkz} = 0000\ 0000 \quad |Z_{Dez}| = 2^{(-3)} \cdot 1,0 = \frac{1}{8} = 0,125$$

IEEE-Standard: E=0, M > 0 → Mantisse ist als 0,M zu interpretieren → kleinere Zahlen sind darstellbar.

$$1\ 011\ 0001 \ E = 0; M = 2^{-4} \rightarrow Z_{Dez} = 2^{-4} = \frac{1}{16} = 0,0625$$

3.4 Welche elementare Zahl kann mit der oben vereinbarten Interpretation der acht Bits *nicht* dargestellt werden? (*kein IEEE-Standard*)

Die Zahl 0 kann nicht dargestellt werden.

IEEE-Standard: E=0, M=0 hat die Bedeutung Null.

Umrechnen von Zahlensystemen

Im Folgenden sollen alle Ziffern größer als 9_D , sofern sie im jeweiligen Zahlensystem vorkommen, in Anlehnung an die Schreibweise des Hexadezimalsystems dargestellt werden, also Ziffer „A“ entspricht 10_D , Ziffer „B“ entspricht 11_D , Ziffer „J“ entspricht 19_D usw.

3.5 Subtrahieren Sie die Zahl 139_D von der Zahl 71_D .

Hinweis: Nutzen Sie das 2er-Komplement von 139_D und addieren Sie die Binärzahlen.

$$71_D = 01000111_B \quad 139_D = 10001011_B$$

Bilden des Zweierkomplements von 139_D :

$$01110100_B + 1_B = 01110101_B$$

Addieren des Zweierkomplements von 139_D zu 71_D :

$$\begin{array}{r} 01000111 \\ + 01110101 \\ \hline 111 \\ \hline 10111100 \end{array}$$

Das Ergebnis ist negativ, da das erste Bit des Ergebnisses 1 ist. Positiv wäre es, wenn eine 1 erst im Übertrag wäre. Ein Übertrag ist bei Subtraktion zwei positiver Zahlen nicht sinnvoll, da der Betrag der Differenz in jedem Fall kleiner ist als der Betrag der größten Zahl. Deshalb würde das Übertragsbit aus dem Wertebereich fallen und ein Positives Endergebnis signalisieren.

Den Betrag des hiesigen Ergebnisses erhält man durch Bilden des Zweierkomplements des Ergebnisses:

$$|71_D - 139_D| = 01000011_B + 1_B = 01000100_B = 68_D$$

Das Endergebnis lautet somit -68_D .

3.6 Multiplizieren Sie die Zahl 19_D mit der Zahl 23_D im Binärsystem.

$$\begin{array}{r} 10111 \cdot 10011 = 23_D \cdot 19_D \\ + \quad 101110000 \\ + \quad 101110 \\ + \quad 10111 \\ \hline 110110101 = 437_D \end{array}$$

3.7 Wandeln Sie die Zahl 120121021_3 in das Nonalsystem (Basis 9) um.

1	20	12	10	21	Basis 3
1	6	5	3	7	Basis 9 $\rightarrow 16537_9$

3.8 Wandeln Sie die Zahl $A9_{11}$ in das Quintalsystem (Basis 5) um.

$$A9_{11} = 119_D$$

$$119 : 5 = 23 \text{ R}4$$

$$23 : 5 = 4 \text{ R}3$$

$$4 : 5 = 0 \text{ R}4 \rightarrow 434$$

3.9 Wandeln Sie die Zahl $3JE_{20}$ in jenes Zahlensystem mit der Basis 25 um.

$$3JE_{20} = 1594_D$$

$$1594 : 25 = 63 \text{ R} J$$

$$63 : 25 = 2 \text{ R} D$$

$$2 : 25 = 0 \text{ R} 2 \rightarrow 3JE_{20} = 2DJ_{25}$$

3.10 Subtrahieren Sie nun die Zahl 161_D von der Zahl 277_D

<i>Dezimal</i>	161	277	116
<i>Dual</i>	1010 0001	1 0001 0101	0111 0100
<i>Oktal</i>	241	425	164
<i>Hexadezimal</i>	A1	115	74
<i>BCD</i>	0001 0110 0001	0010 0111 0111	0001 0001 0110

A) im Dualsystem,

Zweierkomplement von 0 1010 0001 = 1 0101 1111

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 0001 \quad 0101 \\
 1 \quad 0101 \quad 1111 \\
 \hline
 11 \quad 111 \\
 0 \quad 0111 \quad 0100
 \end{array}$$

Der Übertrag des höchstwertigsten Bits fällt weg, da die Zahl positiv sein soll und der Übertrag außerhalb des Zahlenbereiches liegt.

B) im Oktalsystem,

$$\begin{array}{r}
 425 \\
 - 241 \\
 \hline
 164
 \end{array}$$

C) im Hexadezimalsystem,

$$\begin{array}{r}
 115 \\
 - A1 \\
 \hline
 74
 \end{array}$$

Eine andere Möglichkeit zur Subtraktion ist die Komplementbildung. Bei Oktalzahlen das K7 und bei Hexzahlen das K15. Dieses berechnet man jeweils durch die Invertierung der Zahl (d.h. bei K7 7 minus der Wertigkeit der aktuellen Stelle) und Addition von +1. 241_8 in K7 Schreibweise wäre dann zum Beispiel $536_{inv} + 1$, also 537_{K7} im K7. Danach addiert man einfach das Komplement zur anderen gegebenen Zahl. Dabei muss man die gleichen Rechenregeln wie bei Binärzahlen beachten, wie z.B. den Übertrag betreffend.

D) im BCD-Code.

$$\begin{array}{r}
 0010 \quad 0111 \quad 0111 \\
 - 0001 \quad 0110 \quad 0001 \\
 \hline
 0001 \quad 0001 \quad 0110
 \end{array}$$