Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. J. Becker

Digitaltechnik

4. Tutorium - Lösung

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV), Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Aufgabe 1: Graphentheorie

1.1 Gegeben ist die unten abgebildete Schaltung. Erstellen Sie einen gerichteten Graphen für diese Schaltung:

Unterschiedliche Potentiale der Schaltung → Knoten des Graphen
Bauelemente der Schaltung → gerichtete Kanten, wobei die Richtung einem möglichen Stromfluss entspricht.

Hinweis: Der Feldeffekttransistor kann vereinfacht als gesteuerter Widerstand zwischen D und S betrachtet werden, wobei der Wert von der Spannung am Knoten G abhängt.

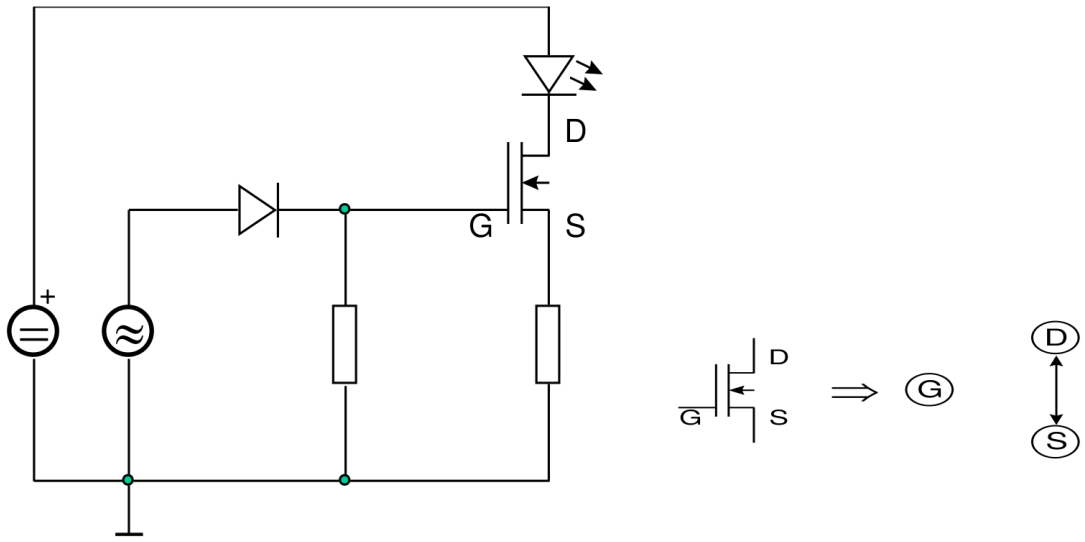
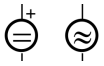


Abbildung 1: Diskrete Schaltung

Verwendetet Schaltzeichen:

: Diode, Stromfluss nur in Pfeilrichtung

 : Gleichstom-, Wechselstromquelle

© ITIV 2015

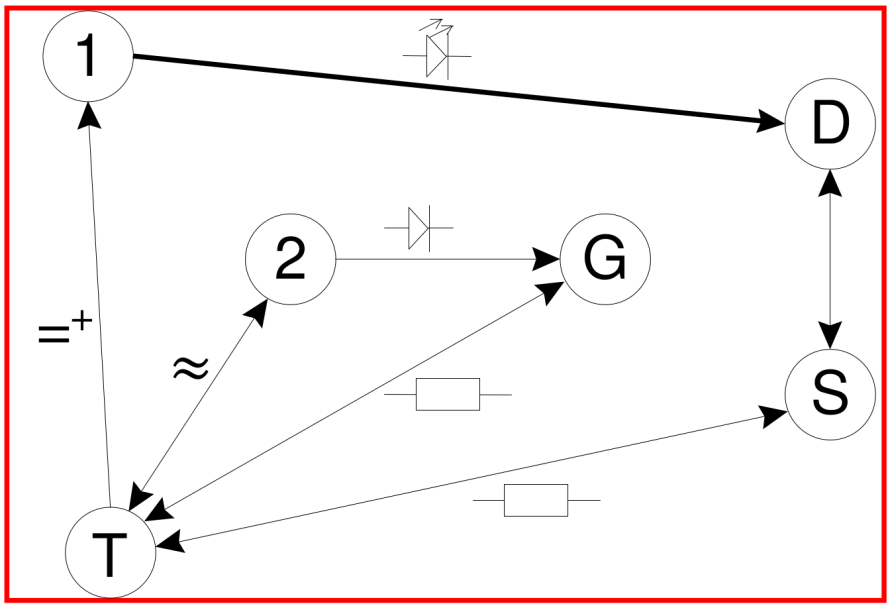


Abbildung 2: Graph der Schaltung

1.2 Ist der entstandene Graph streng zusammenhängend? Begründen Sie Ihre Antwort.
Ja, weil jeder Knoten über einen Kantenzug erreicht werden kann.

1.3 Gegeben ist das Blockschaltbild eines digitalen Systems mit den Baugruppen B1 bis B6. Um die Platzierung der Baugruppen auf der Platine zu optimieren, soll das Schaltbild in einen ungerichteten Graphen abgebildet werden. Die Baugruppen B1 bis B6 werden auf die Knoten 1 bis 6 abgebildet, die Verbindungen zwischen den Baugruppen sollen die Kanten des Graphen bilden. Die Eingangs- und Ausgangsvariablen sollen hierbei unberücksichtigt bleiben. Vervollständigen Sie dazu den Graphen G im Bild unten.

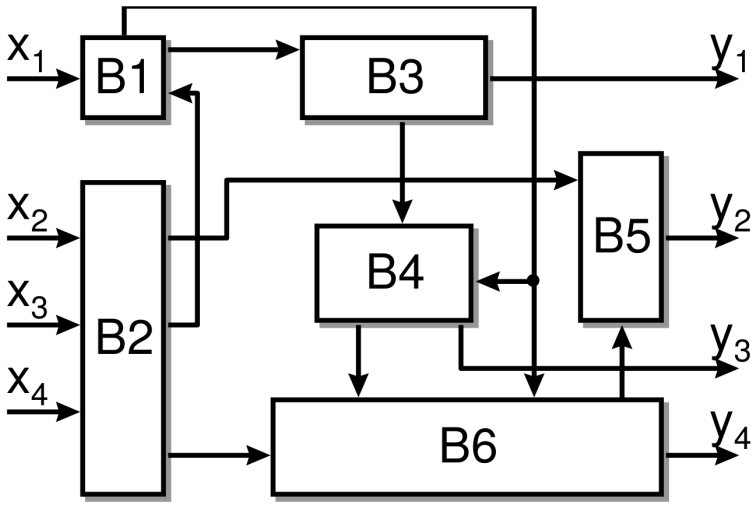


Abbildung 3: Blockschaltbild

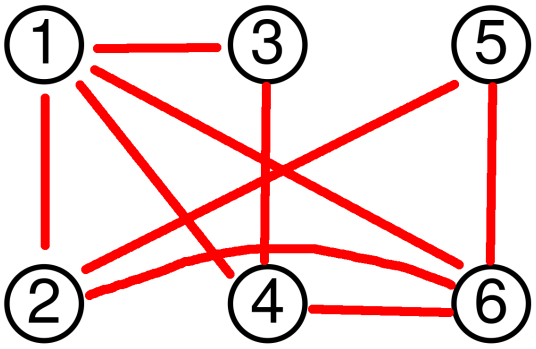


Abbildung 4: Graph G

1.4 Der Graph G soll nun in einen isomorphen planaren Graphen H umgeformt werden. Zeichnen Sie anschließend die optimierte Blockanordnung des Systems

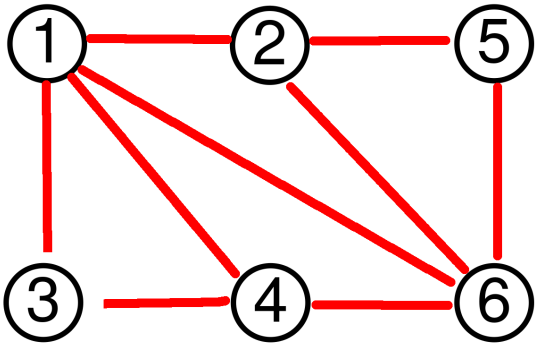


Abbildung 5: isomorpher, planarer Graph

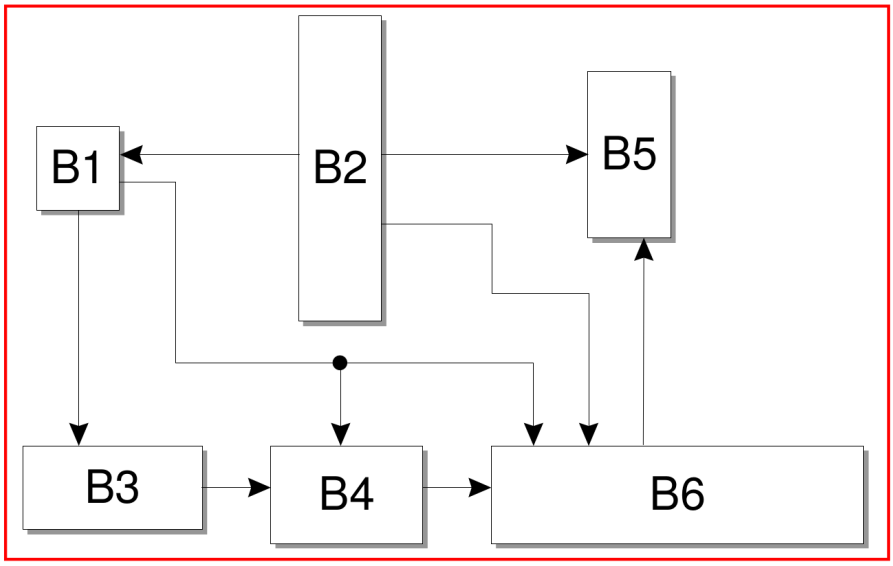


Abbildung 6: daraus resultierende neue Blockanordnung

Aufgabe 2: Relationen

Durch die unten dargestellte Matrix sei die Relation Y γ Z definiert.

Y/Z	a	b	c	d	e	f	g	h
a	X			X				
b	X	X	X	X	X	X	X	X
c			X					
d				X				
e			X		X		X	X
f				X		X		
g							X	
h			X					X

Abbildung 7: Relation Y γ Z

2.1 Welche Eigenschaften weist die Relation γ auf? Begründen Sie Ihre Antworten.
Reflexivität: ja, weil die Hauptdiagonale vollständig besetzt ist.
Symmetrie: nein, die Hauptdiagonale ist für kein einziges Paar an Kreuzen Symmetrieachse $\leftrightarrow$ es gibt kein einziges Wertepaar (x,y), für das sowohl $x\gamma y$ als auch $y\gamma x$ gilt
Antisymmetrie: ja, da die einzigen ungerichteten Kanten die der Reflexivität sind.
Transitivität:ja, weil z.B $e\gamma h$ und $h\gamma c \rightarrow e\gamma c$ gilt (für alle Elemente erfüllt)

2.2 Um welche spezielle Relation handelt es sich? Begründen Sie Ihre Antwort.
Ordnungsrealtion

2.3 Zeichnen Sie den gerichteten Graphen, der diese Relation darstellt.

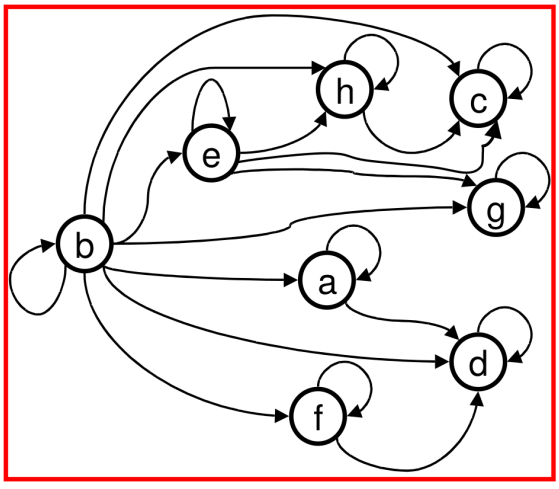


Abbildung 8: gerichteter Graph der Relation

Aufgabe 3: Relationen

Sie wollen zusammen mit Ihren Freunden einen Wochenendurlaub machen. Hierfür haben Sie im Schwarzwald eine wunderschöne Hütte gefunden, die Ihre Spezifikationen erfüllt. Ihre Vorfreude wird leider von der Kochplanung eingeschränkt, da Ihre Freunde alle sehr wählerisch essen.

3.1 Stellen Sie eine Relationsmatrix für Ihre Freunde auf, wobei ein X in der Matrix bedeutet, dass diese Personen das gleiche Gericht essen würden.

Person	Kartoffelbrei	Bratkartoffeln	Kartoffelauflauf	Himbeerkuchen
Linus				X
Melanie		X	X	X
Markus	X			
Theresa	X	X		
Sebastian		X	X	X
Marcel	X	X	X	X

Abbildung 9: Essgewohnheiten Ihrer Freunde

Relation γ	Linus	Melanie	Markus	Theresa	Sebastian	Marcel
Linus	X	X			X	X
Melanie	X	X		X	X	X
Markus			X	X		X
Theresa		X	X	X	X	X
Sebastian	X	X		X	X	X
Marcel	X	X	X	X	X	X

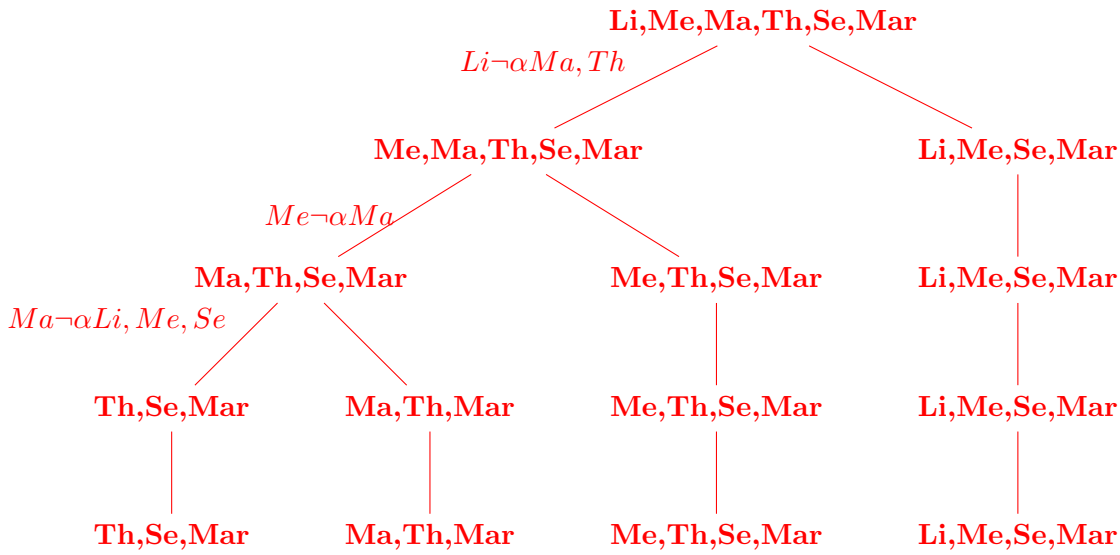
Abbildung 10: Relation der Essgewohnheiten

3.2 Weist die Relation γ die Eigenschaften einer Verträglichkeitsrelation auf? Begründen Sie Ihre Antwort.

Eigenschaften: reflexiv, symmetrisch, nicht transitiv → Verträglichkeitsrelation

3.3 Wie viele Gerichte müssen mindestens gekocht werden um alle Ihre Freunde gleichzeitig und mit jedem Essen eine maximale Anzahl an Personen gemeinsam durch zu füttern? Und welche Personen essen welches Gericht? *(Hinweis: Zur Lösung dieser Aufgabe bietet sich der Weg über die aus der Vorlesung bekannte Überdeckungstabelle an.)*

Unverträglichkeiten aus der Tabelle ablesen:
$Li \neg\alpha Ma, Th$
$Me \neg\alpha Ma$
$Ma \neg\alpha Li, Me, Se$
$Th \neg\alpha Li$
$Se \neg\alpha Ma$
$Mar \neg\alpha \emptyset$



Die Unverträglichkeiten $Mar\neg\alpha\emptyset$, $Se\neg\alpha Ma$ und $Th\neg\alpha Li$ verändern nichts mehr an den aufgeteilten Mengen.

Überdeckungstabelle bilden:

γ	Linus	Melanie	Markus	Theresa	Sebastian	Marcel
Th,Se,Mar				X	X	X
Ma,Th,Mar			X	X		X
Me,Th,Se,Mar		X		X	X	X
Li,Me,Se,Mar	X	X			X	X

Gelb: Primimplikant. Somit werden zwei Gerichte benötigt (Himbeerkuchen, Kartoffelbrei)

Aufgabe 4: Schaltalgebra, Rechenregeln

4.1 Formen Sie das nachfolgende Relaisschaltnetz in einen schaltalgebraischen Ausdruck um.

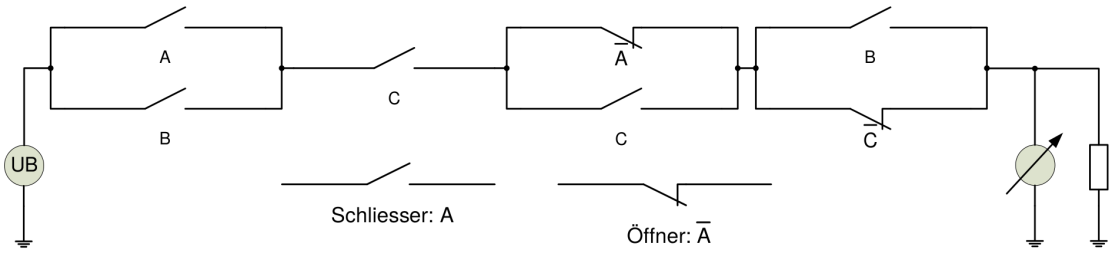


Abbildung 11: Y_1

$Y_1 = (A \vee B) \wedge C \wedge (\overline{A} \vee C) \wedge (B \vee \overline{C})$

4.2 Vereinfachen Sie den gefundenen Ausdruck und zeichnen Sie ihn in ein neues Relaisschaltnetz.

Durch scharfes Hinsehen $\rightarrow B \wedge C$ oder durch Umformung:

$$(A \vee B)C(\overline{A} \vee C)(B \vee \overline{C}) = (AC \vee BC)C(\overline{A}B \vee \overline{AC} \vee CB) = ACB \vee \overline{A}BC \vee BC = BC$$

Wie folgt:

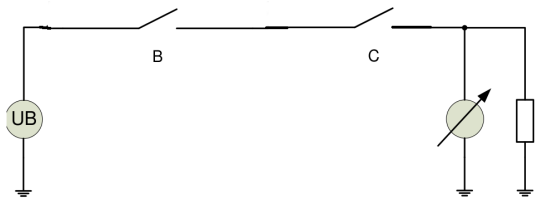


Abbildung 12: Vereinfachtes Schaltnetz Y_1

4.3 Verfahren Sie mit dem folgenden Relaisschaltnetz Y_2 wie mit Teilaufgaben eins und zwei.

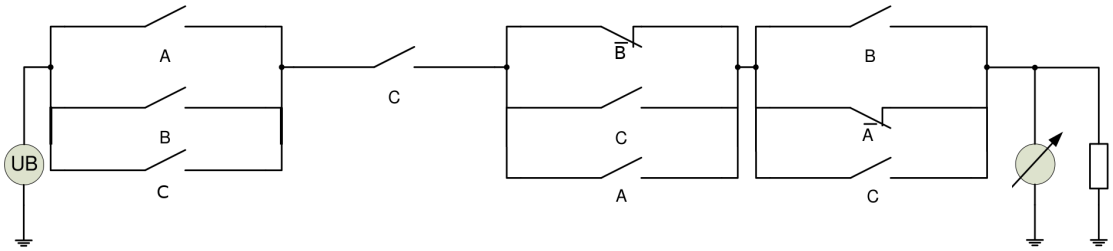


Abbildung 13: Y_2

$$Y_2 = (A \vee B \vee C) \wedge (C) \wedge (A \vee \overline{B} \vee C) \wedge (\overline{A} \vee B \vee C)$$

Scharfes Hinsehen:

$$Y_2 = (A \vee B \vee C)(C)(A \vee \overline{B} \vee C)(\overline{A} \vee B \vee C) = C$$

Y_2 vereinfacht:

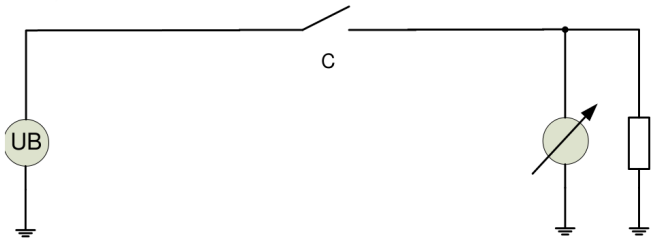


Abbildung 14: Y_2 vereinfacht