Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. J. Becker

# Digitaltechnik

5. Tutorium - Lösung

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV), Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

## Aufgabe 1: Schaltfunktionen

Im Folgenden betrachten wir die BCD-Zahlen (Tabelle weiter unten). Der Ausgang y soll nur dann auf „1“ gesetzt werden, wenn genau zwei „1“er in der Kodierung einer einstelligen BCD Zahl enthalten sind. Ist in dieser Kodierung die Anzahl von „1“er ungleich 2, so gilt y = 0.

**1.1** Was für Funktionswerte nimmt $y(a_3, a_2, a_1, a_0)$ bei den Pseudotetraden an?
Freistellen ( - ), da y nur für einstellige BCD Zahlen definiert ist.

**1.2** Ist die Schaltfunktion vollständig definiert? Begründen Sie ihre Antwort!
Die Schaltfunktion ist *un*vollständig definiert. Begründung: Siehe 1.1)

**1.3** Füllen Sie die folgende Tabelle aus.

| **Ziffer** | $j_0$ | $a_3$ | $a_2$ | $a_1$ | $a_0$ | y |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 5 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 6 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 7 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 8 | 8 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 9 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Pseu- | 10 | 1 | 0 | 1 | 0 | - |
| do- | 11 | 1 | 0 | 1 | 1 | - |
| te- | 12 | 1 | 1 | 0 | 0 | - |
| tra- | 13 | 1 | 1 | 0 | 1 | - |
| den- | 14 | 1 | 1 | 1 | 0 | - |
| | 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | - |

Abbildung 1: Schaltfunktion

© ITIV 2015

**1.4** Konstruieren Sie nun aus der Tabelle ein Symmetriediagramm.

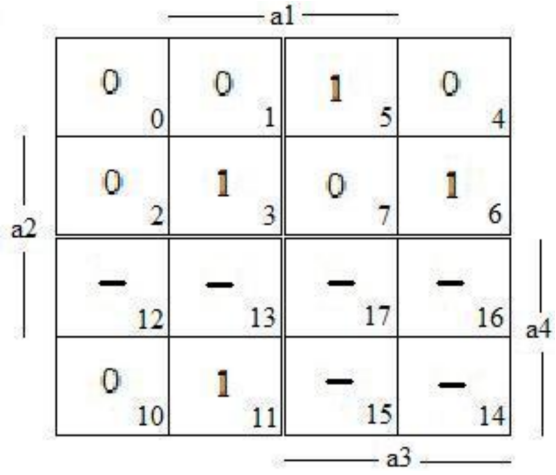


Abbildung 2: Symmetriediagramm der Schaltfunktion

Das Symmetrie-Diagramm kann von diesem abweichen, je nachdem wie die Literale a1 bis a4 angeordnet wurden. Diese Anordnung ist frei wählbar!

## Aufgabe 2: Schaltfunktionen

Gegeben sei die vollständig definierte Schaltfunktion $f(x_4, x_3, x_2, x_1)$. Der Ausgang der Schaltfunktion sei $y = f(x_4, x_3, x_2, x_1) = 1$, wenn die durch $x_4$, $x_3$, $x_2$ und $x_1$ repräsentierte Binärzahl durch 2 dividierbar ist. Beachten Sie, dass 0 nicht durch 2 dividierbar ist.

**2.1** Konstruieren Sie ein Symmetriediagramm.

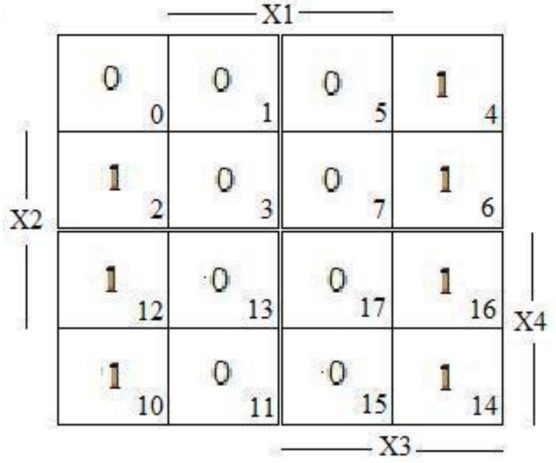


Abbildung 3: Symmetriediagramm der Schaltfunktion

**2.2** Geben Sie die DNF an.
DNF:

$$y = (\overline{x_4}\&x_3\&\overline{x_2}\&\overline{x_1}) \vee (\overline{x_4}\&\overline{x_3}\&x_2\&\overline{x_1}) \vee (\overline{x_4}\&x_3\&x_2\&\overline{x_1}) \\ \vee (x_4\&\overline{x_3}\&x_2\&\overline{x_1}) \vee (x_4\&x_3\&x_2\&\overline{x_1}) \vee (x_4\&\overline{x_3}\&\overline{x_2}\&\overline{x_1}) \\ \vee (x_4\&x_3\&\overline{x_2}\&\overline{x_1})$$

**2.3** Geben Sie die KNF an.
KNF:

$$y = (x_4 \vee x_3 \vee x_2 \vee x_1)\&(x_4 \vee x_3 \vee x_2 \vee \overline{x_1})\&(x_4 \vee x_3 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_1}) \\ \&(x_4 \vee \overline{x_3} \vee x_2 \vee \overline{x_1})\&(x_4 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_1})\&(\overline{x_4} \vee x_3 \vee x_2 \vee \overline{x_1}) \\ \&(\overline{x_4} \vee x_3 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_1})\&(\overline{x_4} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_1})\&(\overline{x_4} \vee \overline{x_3} \vee x_2 \vee \overline{x_1})$$

(Terme aufsteigend nach oktalen Indizes des S-Diagramms geordnet)

**2.4** Geben Sie die DMF an.
Primimplikanten aus Symmetriediagramm:
$w_1 = x_3\&\overline{x_1}, \qquad w_2 = x_2\&\overline{x_1}, \qquad w_3 = x_4\&\overline{x_1}$
$\rightarrow DMF: \ (x_3\&\overline{x_1}) \vee (x_2\&\overline{x_1}) \vee (x_4\&\overline{x_1})$

Auch hier gilt: DNF, KNF, DMF und KMF können von dieser Lösung differieren wenn die Literale im S-Diagramm anders angeordnet wurden!

**2.5** Geben Sie die KMF an.
Primimplikate aus Symmetriediagramm:
$u_1 = \overline{x_1}, \qquad u_2 = x_2 \vee x_3 \vee x_4$
$\rightarrow KMF: \ y = (\overline{x_1})\&(x_2 \vee x_3 \vee x_4)$

## Aufgabe 3: Entwicklungssatz und Multiplexerschaltungen

**3.1** Entwickeln Sie den Ausdruck

$$y(d,c,b,a) = \overline{(a \vee d) \wedge (\overline{a} \vee c) \wedge (\overline{b} \vee c \vee \overline{d}) \wedge \overline{c}}$$

mit Hilfe des Booleschen Entwicklungssatzes in der Reihenfolge c, a, d, b.
Geben Sie alle Zwischenergebnisse an.
*Hinweis 1:* Hier gibt es prinzipiell zwei mögliche Herangehensweisen:

- Schaltfunktion schrittweise in obiger Reihenfolge entwickeln, indem die einzelnen Teilfunktionen (bspw. $y(d,0,b,a)$ und $y(d,1,b,a)$ in der ersten Stufe) separat aufgeschrieben und solange entwickelt werden, bis sie nur noch aus einer Konstante bestehen.
- Schaltfunktion innerhalb eines einzelnen mathematischen Ausdrucks unter Ausnutzung von 4 Klammerebenen in der obigen Reihenfolge entwickeln (Anwendung des Entwicklungssatzes gemäß Definition).

Üben Sie beide Herangehensweisen in Partnerarbeit und vergleichen Sie die Ergebnisse!
*Hinweis 2:* Bringen Sie den Funktionsausdruck zuerst in eine geeignete Form.

Umformung durch De Morgan:

$$y(d,c,b,a) = \overline{(a \vee d) \wedge (\overline{a} \vee c) \wedge (\overline{b} \vee c \vee \overline{d}) \wedge \overline{c}}$$
$$y(d,c,b,a) = \overline{(a \vee d)} \vee \overline{(\overline{a} \vee c)} \vee \overline{(\overline{b} \vee c \vee \overline{d})} \vee c$$
$$y(d,c,b,a) = \overline{a}\overline{d} \vee a\overline{c} \vee b\overline{c}d \vee c$$

Entwicklung nach c:

$$y(d,c,b,a) = c \wedge y(d,1,b,a) \vee \overline{c} \wedge y(d,0,b,a)$$
$$y(d,0,b,a) = \overline{a}\overline{d} \vee a \vee bd$$
$$y(d,1,b,a) = 1$$

Entwicklung nach a:

$$y(d,1,b,-) = 1 \qquad //keine\ Abhaengigkeit\ von\ a$$
$$y(d,0,b,a) = a \wedge y(d,0,b,1) \vee \overline{a} \wedge y(d,0,b,0)$$
$$y(d,0,b,0) = \overline{d} \vee bd$$
$$y(d,0,b,1) = \overline{a}\overline{d} \vee 1 \vee bd = 1$$

Entwicklung nach d:
Nur Abhängigkeit für c=0 und a=1

$$y(d,0,b,a) = d \wedge y(1,0,b,0) \vee \overline{d} \wedge y(0,0,b,0)$$
$$y(0,0,b,0) = 1$$
$$y(1,0,b,0) = b$$

Entwicklung nach b:
Nur Abhängigkeit für c=0, a=1 und d=1

$$y(1,0,b,0) = b \wedge y(1,0,1,0) \vee \overline{b} \wedge y(1,0,1,0)$$
$$y(1,0,0,0) = 0$$
$$y(1,0,1,0) = 1$$

*Alternative Lösung:*
$y = \overline{a}\overline{d} \vee a\overline{c} \vee b\overline{c}d \vee c$
Entwicklung nach c:
$y = c(1) \vee \overline{c}(\overline{a}\overline{d} \vee a \vee bd)$
Entwicklung nach a:
$y = c(1) \vee \overline{c}(a(1) \vee \overline{a}(\overline{d} \vee bd))$
Entwicklung nach d:
$y = c(1) \vee \overline{c}(a(1) \vee \overline{a}(db \vee \overline{d}(1)))$
Entwicklung nach b:
$y = c(1) \vee \overline{c}(a(1) \vee \overline{a}(d(b(1) \vee \overline{b}(0)) \vee \overline{d}(1)))$

**3.2** Eine vorentwickelte Funktion z soll mit 2:1 Multiplexern realisiert werden, wobei die Eingangsliterale a, b, c, d ausschließlich als Steuersignale genutzt werden sollen. Zeichnen Sie die *minimale* Multiplexerschaltung.

$$z(d,c,b,a) = c(0) \vee \overline{c}(a(0) \vee \overline{a}(d(b(0) \vee \overline{b}(1)) \vee \overline{d}(0)))$$

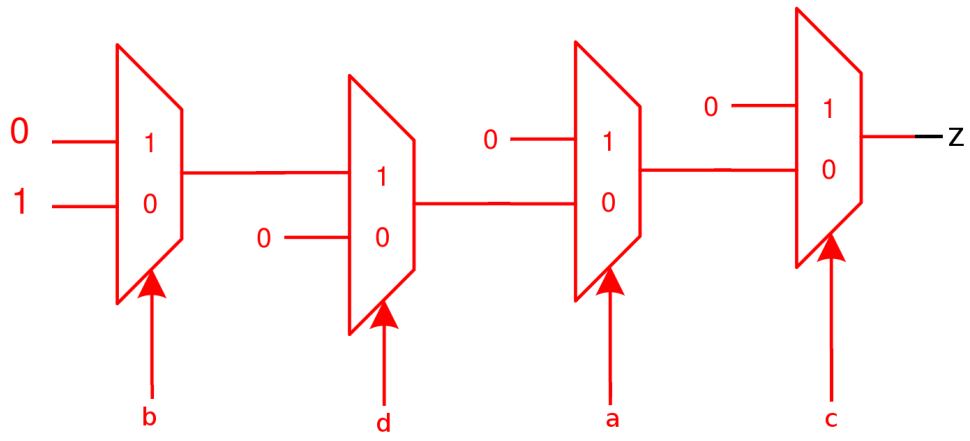


Abbildung 4: minimale Multiplexerschaltung der entwickelten Funktion

**3.3** *Zusatzaufgabe:*Alternativ soll die Schaltfunktion aus Teilaufgabe 3.1 nun in einem PAL-Baustein mit einer *minimalen Anzahl* an Verknüpfungen in der UND-Matrix realisert werden. Verwenden Sie dazu Abbildung 1 und markieren Sie Verbindungen durch Punkte in der UND-Matrix.
*Hinweis:* Der Aufbau und die Verwendung der PAL-Bausteine (Programmable Array Logic) wird in Foliensatz 20. Schaltnetze Teil 2 behandelt.

MUX-Realisierung zeigt: y wird nur für a=0, b=0, c=0 u. d=1 null.
⇒ KNF: $y = a \vee b \vee c \vee \overline{d}$ (ergibt minimale Anzahl an Verknüpfungen, die Anzahl der benötigten Spalten kann jedoch nicht reduziert werden)

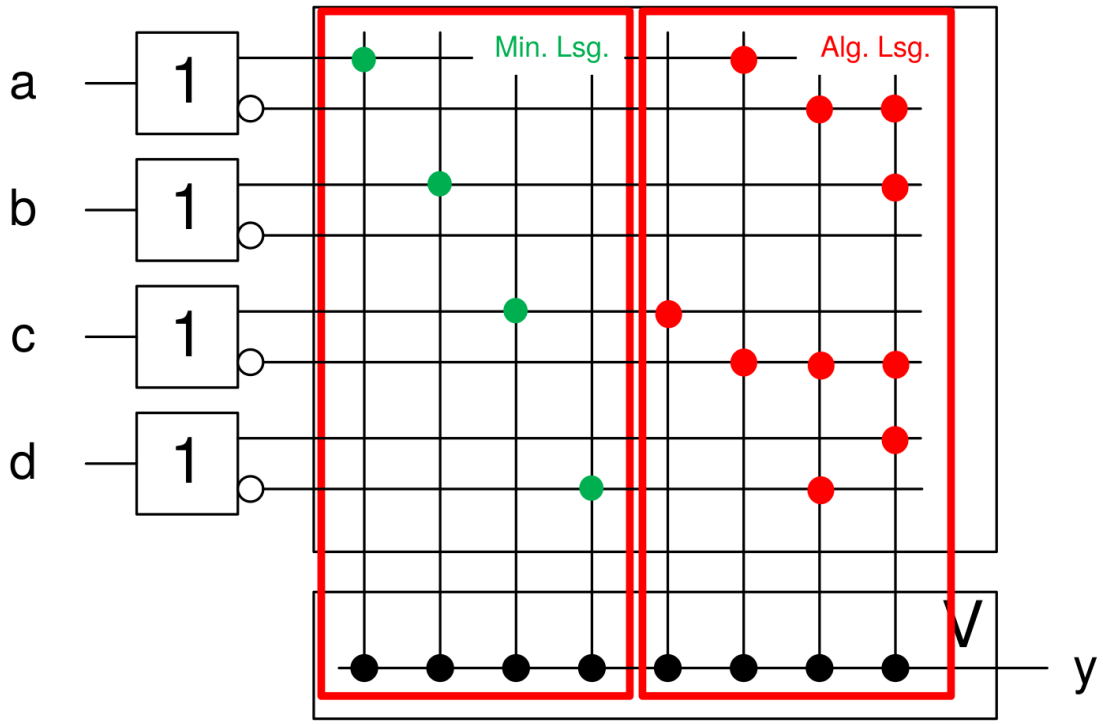


Abbildung 5: Realisierung des Multiplexers mithilfe eines PAL-Bausteins