Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. J. Becker

Digitaltechnik

6. Tutorium - Lösung

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV), Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Aufgabe 1: Verfahren nach Nelson

Für eine unvollständig definierte Schaltfunktion F seien die Menge der Einstellungen (E) und die Menge der Freistellen (Fr) in oktaler Indizierung wie folgt gegeben. Mit Hilfe des Nelson-Verfahrens sollen nun alle Primimplikate der Funktion ermittelt werden.
$E = \{4, 5, 7\}$
$Fr = \{2, 6\}$

1.1 Tragen Sie hierzu zunächst die Eins-, Null- und Freistellen in das folgende Symmetriediagramm ein:

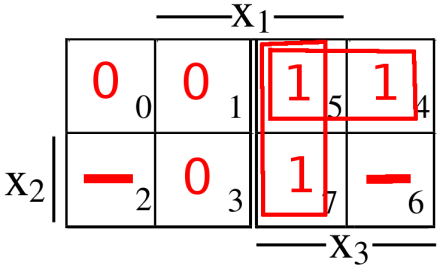

Abbildung 1: Symmetriediagramm der Schaltfunktion

1.2 Bilden Sie nun die Einsblocküberdeckung τ_1 der Funktion F, ohne dass Sie die Freistellen hierzu nutzen.

$\tau_1 = \{(1, 0, -), (1, -, 1)\}$; Anordnung: (x_3, x_2, x_1)

1.3 Bilden Sie nun die Nullvervollständigung f^N der Form

$$f^N = (x_3 \& \overline{x_2}) \vee (x_3 \& x_1)$$

1.4 Distribuieren Sie nun schrittweise den in Teil 1.3 gefundenen Ausdruck aus. Formen Sie dabei geeignet um und streichen Sie alle redundanten Terme bzw. Termanteile.

$$\begin{aligned} f^N &= (x_3 \& \overline{x_2}) \vee (x_3 \& x_1) \\ &= (x_3 \vee x_3) \& (\overline{x_2} \vee x_3) \& (x_3 \vee x_1) \& (\overline{x_2} \vee x_1) \\ &= (x_3) \& (\overline{x_2} \vee x_1) \qquad | don't\ cares \\ &= x_3 \end{aligned}$$

© ITIV 2015

Aufgabe 2: Petrickausdruck

Gegeben sei die folgende Überdeckungstabelle.

Term	***Block***	***Einsstellen***							***Präsenz-variable***
		1	2	5	6	10	11	15	
$\bar{b} + a$	- - 0 1	x		x			x	x	p_1
$\bar{c} + \bar{a}$	- 0 - 0		x			x			p_2
$\bar{d} + b + \bar{a}$	0 - 1 0		x		x				p_3
$\bar{d} + a$	0 - - 1	x		x					p_4
$d + \bar{c} + \bar{b}$	1 0 0 -					x	x		p_5

Tabelle 1: Überdeckungstabelle

2.1 Geben Sie den Petrickausdruck an und vereinfachen Sie ihn mit Hilfe der bekannten Rechenregeln der boolschen Algebra.

$$\begin{aligned}
PA &= (p_1 + p_4) \cdot (p_2 + p_3) \cdot (p_1 + p_4) \cdot p_3 \cdot (p_2 + p_5) \cdot (p_1 + p_5) \cdot p_1 \\
&= (p_1 + p_1p_4 + p_1p_5 + p_4p_5) \cdot (p_2 + p_2p_3 + p_2p_5 + p_3p_5) \cdot p_1 \cdot p_3 \\
&= (p_1 + p_4p_5) \cdot (p_2 + p_3p_5) \cdot p_1 \cdot p_3 \\
&= (p_1p_2 + p_1p_3p_5 + p_2p_4p_5 + p_3p_4p_5) \cdot p_1 \cdot p_3 \\
&= p_1p_2p_3 + p_1p_3p_5 + p_1p_2p_3p_4p_5 + p_1p_3p_4p_5 \\
&= p_1p_2p_3 + p_1p_3p_5
\end{aligned}$$

Zweite (kürzere) Lösungsvariante:

$$\begin{aligned}
PA &= (p_1 + p_4) \cdot (p_2 + p_3) \cdot (p_1 + p_4) \cdot p_3 \cdot (p_2 + p_5) \cdot (p_1 + p_5) \cdot p_1 \\
&= p_1 \cdot p_3 \cdot (p_2 + p_5) \qquad |R11a \\
&= p_1p_2p_3 + p_1p_3p_5
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Verfahren nach Petrick

Gegeben sei folgendes Symmetriediagramm der Schaltfunktion G.

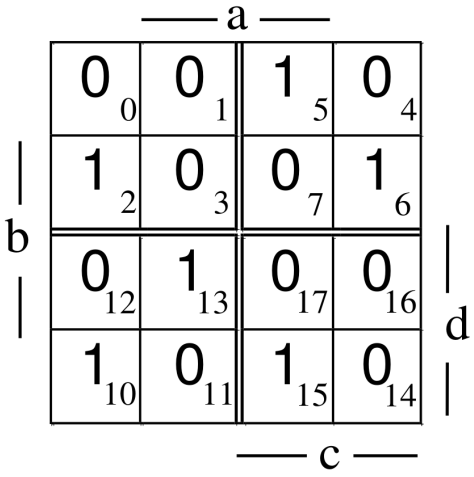

Abbildung 2: Symmetriediagramm der Schaltfunktion G

3.1 Das Nelson-Verfahren lieferte dabei die in der folgenden Tabelle bereits eingetragenen Terme. Vervollständigen Sie nun die folgende Überdeckungstabelle. Bilden Sie die Kostenfunktionswerte für die Primterme, indem Sie die Variablen a und c mit den Kosten „*1*“ die Variablen b mit „*2*“ und d mit „*4*“ bewerten.

Präsenz-variable		Nullstellen (oktale Indizes)										Kosten
		0	1	3	4	7	11	12	14	16	17	
p_1	a + b + d	x			x							7
p_2	b + c + d	x	x									7
p_3	¬a + c + d		x	x								6
p_4	¬a + ¬b + d			x		x						7
p_5	¬a + ¬b + ¬c					x					x	4
p_6	¬b + ¬c + ¬d									x	x	7
p_7	a + ¬b + ¬d							x		x		7
p_8	a + ¬c + ¬d								x	x		6
p_9	a + b + ¬c				x				x			4
p_{10}	¬a + b + c		x				x					4

Tabelle 2: Überdeckungstabelle mit Kosten

3.2 Ermitteln Sie nun die *Kernimplikate* aus Tabelle 2. Markieren Sie die Kernimplikate durch einen Kreis. Streichen Sie alle Zeilen, die von den ermittelten Kernimplikaten bereits vollständig überdeckt werden.

Die folgende Tabelle beschreibt die Schaltfunktion G' und ist von der vorherigen Aufgabe unabhängig.

Präsenz-variable		Nullstellen (oktale Indizes)						Kosten
		0	3	10	13	14	17	
p_1	a + c + d	X						4
p_2	¬b + c + d		X					5
p_3	¬a + ¬b + c		(X)		X			4
p_4	¬a + ¬b + ¬d				X		X	5
p_5	¬a + ¬c + ¬d						(X)	4
p_6	b + ¬c + ¬d					X		5
p_7	a + b + ¬d			X		(X)		5
p_8	a + b + c	(X)		X				4

Tabelle 3: Überdeckungstabelle der Schaltfunktion G'

1. Schritt: p_1, p_2, p_6 streichen (Zeilendominanz), p_5 wird dominiert, ist aber *nicht* streichbar wg. Kosten
2. Schritt: p_8, p_7, p_3 sind jetzt Kerne → Spalte 10 und 13 mit überdeckt
3. Schritt: Überdeckung von Spalte 17 mit kostengünstigstem Term → p_5 auswählen, p_4 streichen

3.3 Nutzen Sie nun die Zeilendominanzen um redundante Zeilen zu streichen und somit eine kostenminimale Realisierung der Schaltfunktion G' (Tabelle 3) zu erhalten. Streichen Sie dazu zuerst alle dominierten Zeilen und danach erst die durch die dominierenden Zeilen überdeckten Maxterme. Welche Kosten entstehen bei der von Ihnen ermittelten Realisierung? Geben Sie die somit benötigten Präsenzvariablen p_n und die zugehörige KMF an.

benötigte Präsenzvariablen: p_3, p_5, p_7, p_8
Kosten der Realisierung: $1 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 17$
zugehörige KMF: $(c + \overline{b} + \overline{a}) \cdot (\overline{d} + \overline{c} + \overline{a}) \cdot (\overline{d} + b + a) \cdot (c + b + a)$

Aufgabe 4: Automaten

Als Teilbaustein zur automatischen Umrechnung von Zahlen in andere Zahlensysteme soll die Modulofunktion angewendet werden. Im konkreten Fall soll die Moduloberechnung zur Zahl drei stattfinden. Entwerfen Sie hierfür einen Automaten, der folgende Funktionen erfüllt:

Der Automat startet bei null. Sie können auf den aktuellen Zustand -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 aufaddieren. Durch die Eingabe soll in den Folgezustand übergegangen werden. Die Ausgabe gibt die Modulorechnung der aktuellen Zahl mit drei aus (Zahl mod 3). Beispielsweise soll als erste Eingabe „zwei“ eingegeben werden. Die Ausgabe nach dem Zustandswechsel soll somit $(2 \mod 3) = 2$ sein. Realisieren Sie den Automaten als einen Medwedew-Automaten.

Eingabe: $E_g^v \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
Ausgabe: $A_h^v \in \{0, 1, 2\} = S_k^v$

Benutzen Sie zum Entwerfen des Automaten folgendes Diagramm:

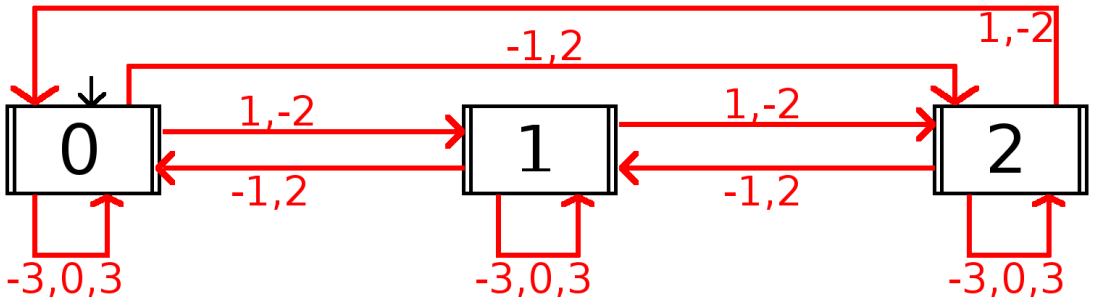

Abbildung 3: Übergangsdiagramm des Automaten