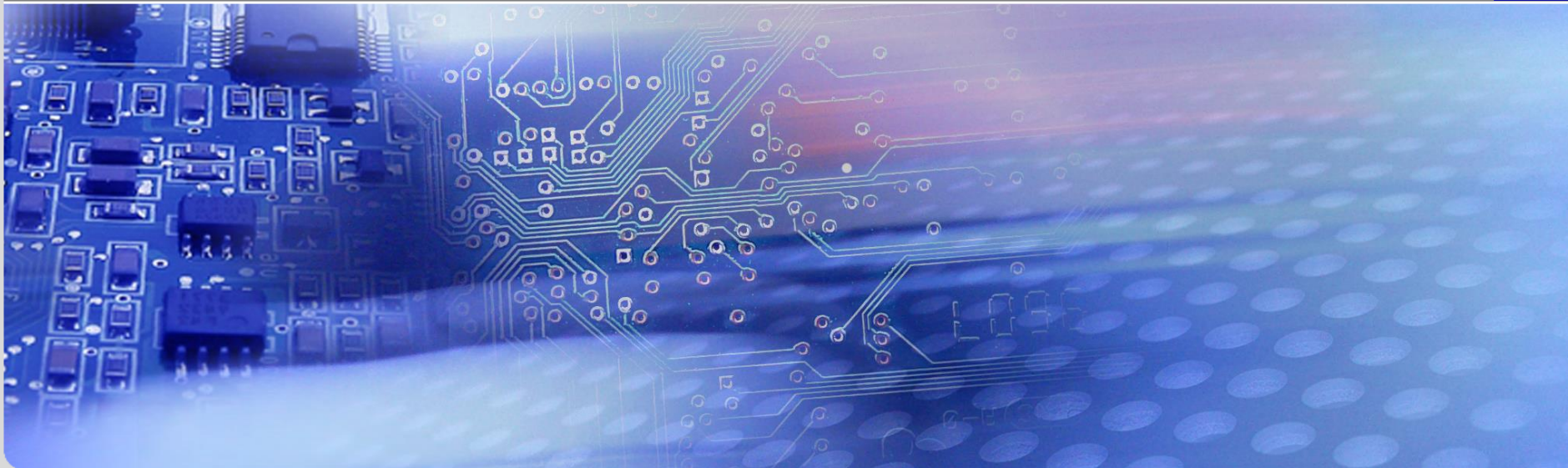


Digitaltechnik Tutorium 3

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

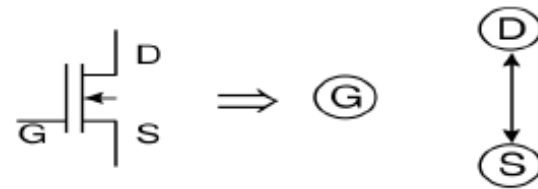
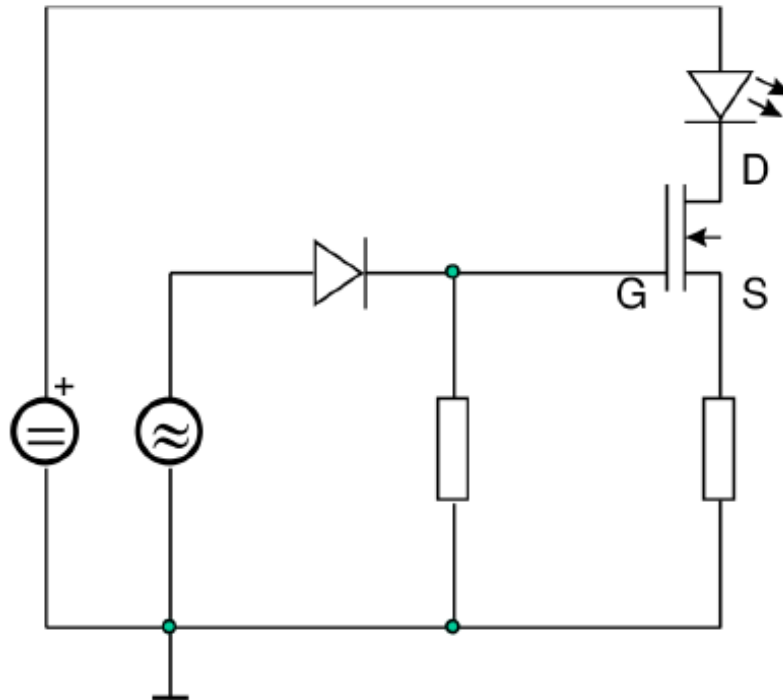
itv



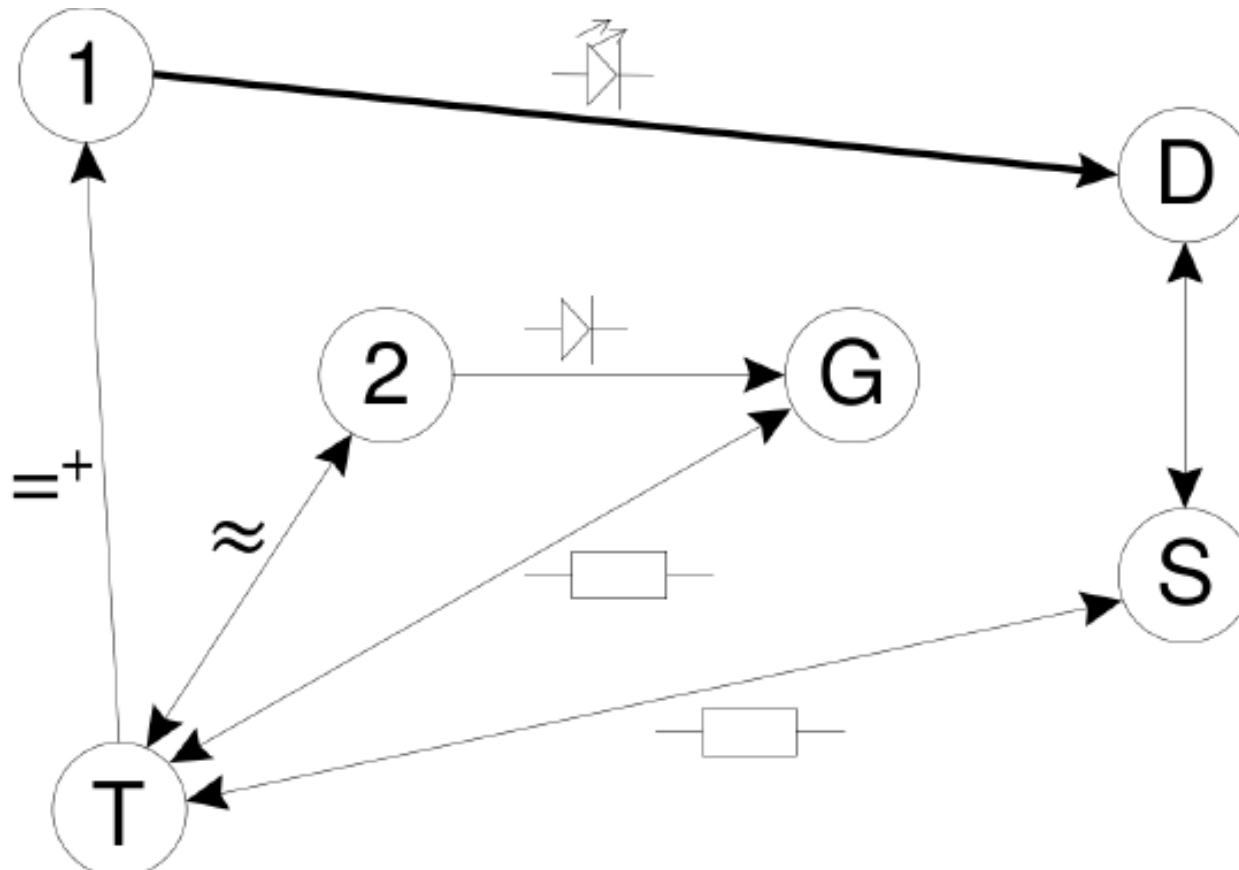
Graphentheorie

- Veranschaulichung von Beziehungen/Prozessen etc.
 - Prozessen/Abläufen
 - Algorithmen
 - Beziehungen

„Warm Up“ Aufgabe 1

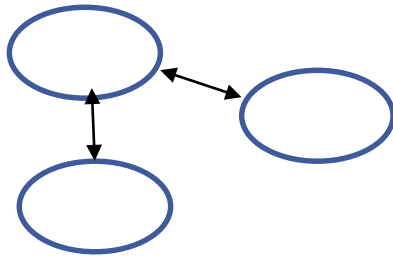


„Warm Up“ Aufgabe 1

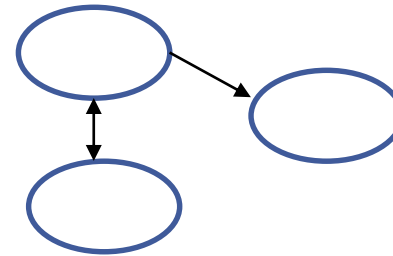


„Warm Up“ Aufgabe 1

- Streng zusammenhängender Graph: von jedem bel. Knoten eines gerichteten Graphen gibt es zu jedem anderen Knoten eine gerichtete Folge von Kanten



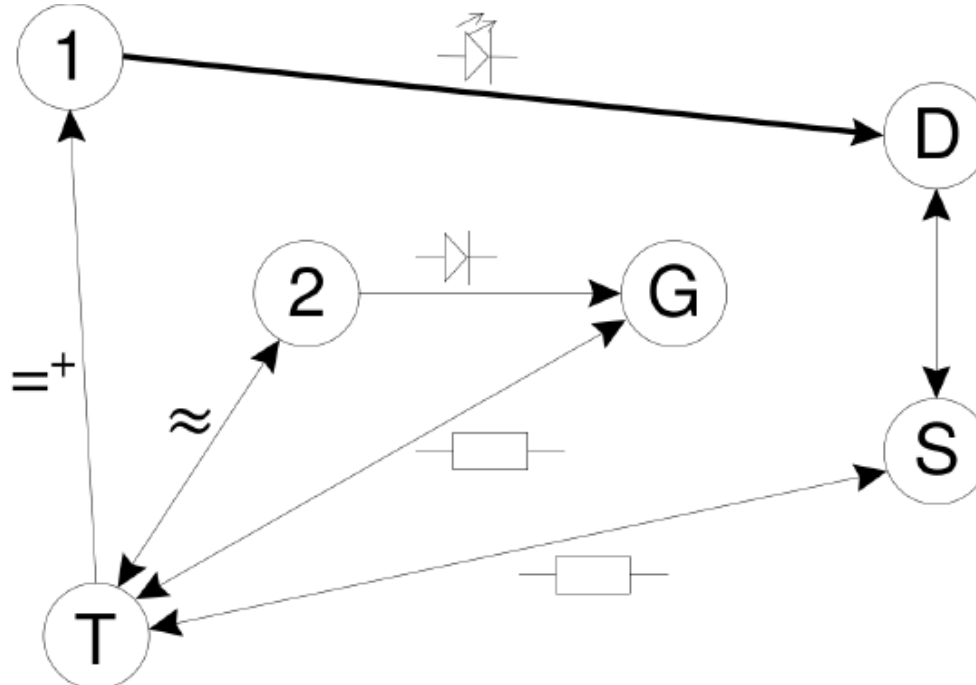
Streng zsm.hängend



nicht streng zsm.hängend

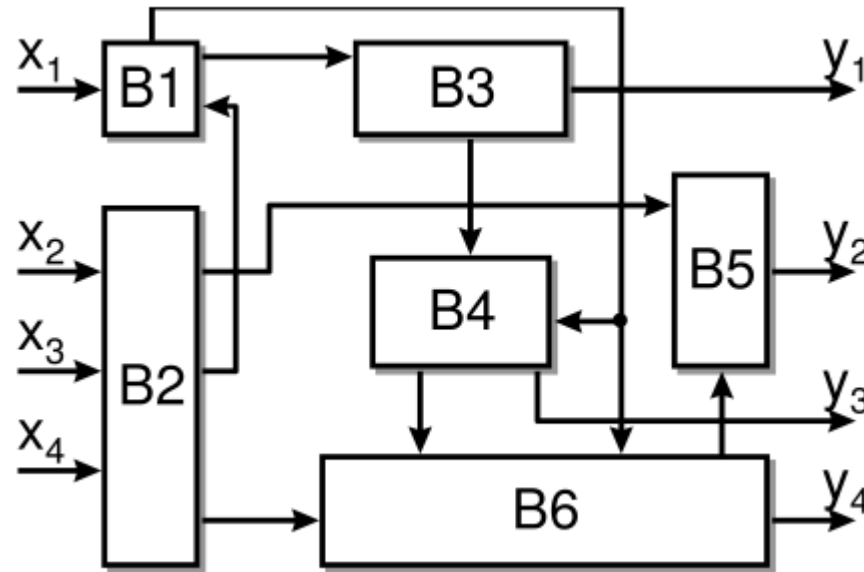
- Gibt es Knoten in unserem Graphen die nicht erreichbar sind?

„Warm Up“ Aufgabe 1



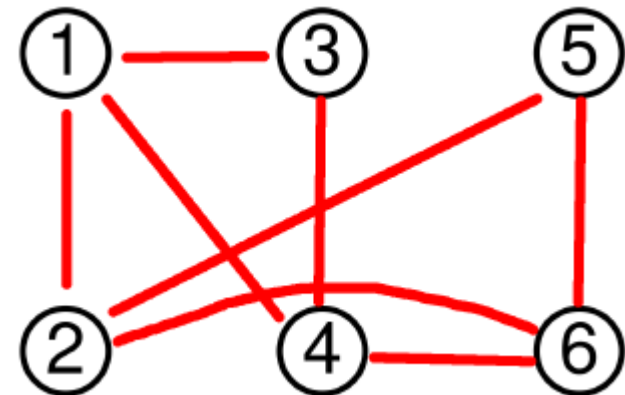
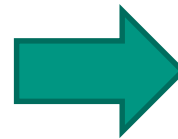
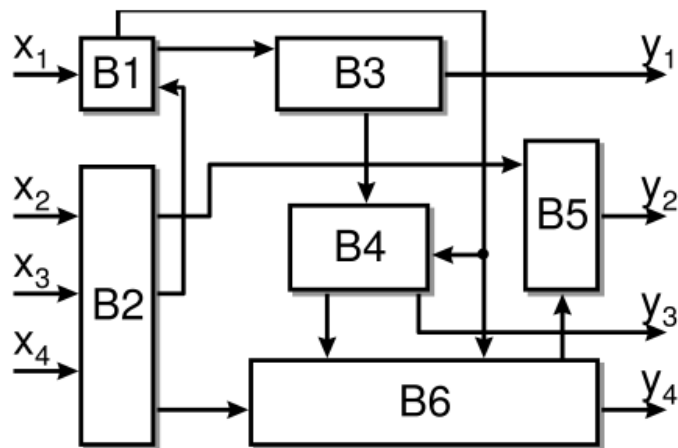
- Da jeder Knoten erreicht werden kann, ist der Graph streng zusammenhängend

„Warm Up“ Aufgabe 1



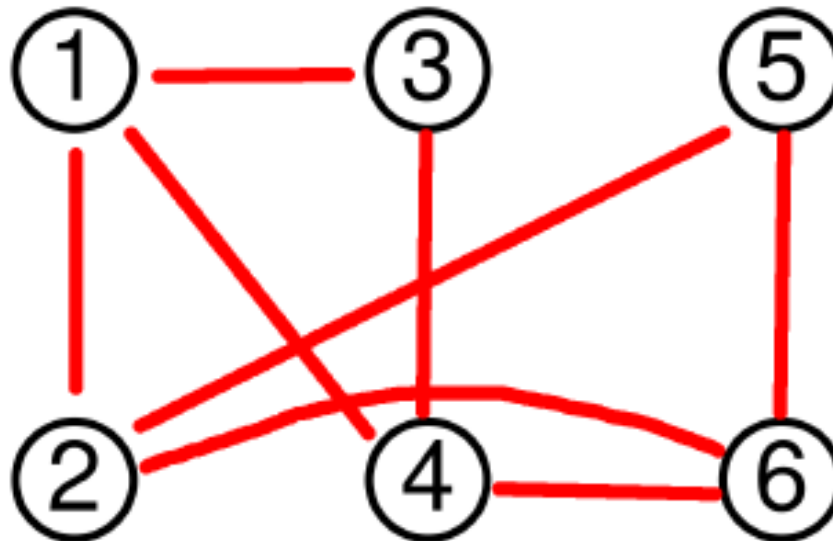
- B1-B6 werden Knoten 1-6
- Verbindungen werden zu Kanten

„Warm Up“ Aufgabe 1

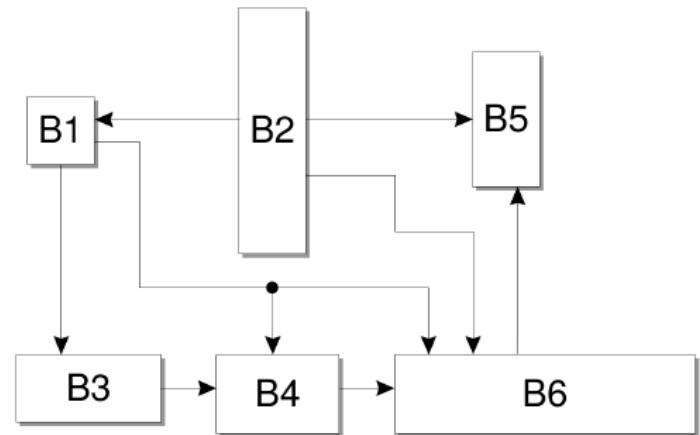
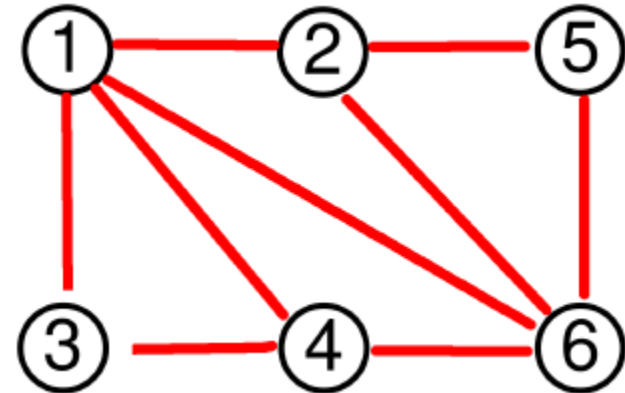
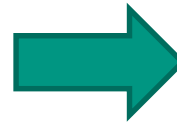
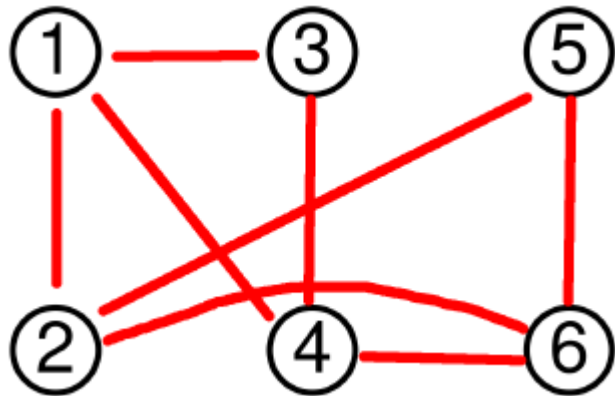


„Warm Up“ Aufgabe 1

- Isomorphie zweier Graphen: es existiert eine eindeutige Abbildung zwischen Kanten und Knoten zweier Graphen, sodass die Inzidenzabbildungen erhalten bleiben
- planarer Graph: Graph, zu dem ein isomorpher, zweidimensionaler Graph existiert.



„Warm Up“ Aufgabe 1



| | Ordnungsrelation | Äquivalenzrelation | Verträglichkeitsrelation |
|----------------------------|--|--|--|
| Beschreibung | Ordnung von Elementen | Gleichwertigkeit/ Gleichartigkeit von Elementen | Erlaubtes Zusammentreffen von Elementen |
| häufig Vorschrift α | $\leq, \geq,$ | \equiv | |
| Eigenschaften | <ul style="list-style-type: none"> • reflexiv • antisymmetrisch • transitiv | <ul style="list-style-type: none"> • reflexiv • symmetrisch • transitiv | <ul style="list-style-type: none"> • reflexiv • symmetrisch • nicht transitiv |

| | |
|------------------|---|
| Reflexiv: | $x\alpha x, \forall x \in M$ |
| Antisymmetrisch: | $x\alpha y \wedge y\alpha x \Rightarrow x = y, \forall x, y \in M$ |
| Transitiv: | $x\alpha y \wedge y\alpha z \Rightarrow x\alpha z, \forall x, y, z \in M$ |

Beispiel Ordnungsrelation

$X = \{1, 3, 5\}$ $Y = \{2, 4, 6\}$ $Z = \{10\}$ $\alpha \triangleq \geq$

reflexiv: $3 \geq 3;$ $5 \geq 5;$ $2 \geq 2;$

antisymmetrisch: $3 \geq 2$ aber nicht $2 \geq 3$

transitiv: $10 \geq 4$ $4 \geq 1$ \rightarrow $10 \geq 1$

reflexiv:

symmetrisch:

transitiv:

Beispiel Äquivalenzrelation
 $X = \{1, 3, 5\}$ $Y = \{2, 4, 6\}$ $Z = \{7, 8, 10\}$ $\alpha \triangleq \equiv$
hier: Mächtigkeit der Mengen

$$x\alpha y \Rightarrow y\alpha x, \forall x, y \in M$$

$$x\alpha y \wedge y\alpha z \Rightarrow x\alpha z, \forall x, y, z \in M$$

Beispiel Äquivalenzrelation

$$X = \{1, 3, 5\}$$

$$Y = \{2, 4, 6\}$$

$$Z = \{7, 8, 10\}$$

$$\alpha \triangleq \equiv$$

hier: Mächtigkeit der Mengen

reflexiv:

$$|X| \equiv |X|$$

symmetrisch:

$$\text{aus } |X| \equiv |Y| \text{ folgt } |Y| \equiv |X|$$

transitiv:

$$|X| \equiv |Y| \ \& \ |Y| \equiv |Z| \quad \rightarrow \quad |X| \equiv |Z|$$

| | |
|--------------|---|
| reflexiv: | $x\alpha x, \forall x \in M$ |
| symmetrisch: | $x\alpha y \Rightarrow y\alpha x, \forall x, y \in M$ |
| transitiv: | $x\alpha y \wedge y\alpha z \Rightarrow x\alpha z, \forall x, y, z \in M$ |

Beispiel Verträglichkeitsrelation

$X = \{\text{Peter}\}$ $Y = \{\text{Susi}\}$

$Z = \{\text{Max}\}$

$\alpha \triangleq$ „verträgt sich mit“

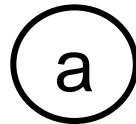
reflexiv: Jeder verträgt sich mit sich selbst

symmetrisch: aus „Peter verträgt sich mit Susi“
folgt „Susi verträgt sich mit Peter“

Nicht transitiv:
verträgt sich mit Max“ aus „Peter verträgt sich mit Susi“ & „Susi
folgt nicht „Peter verträgt sich mit Max“

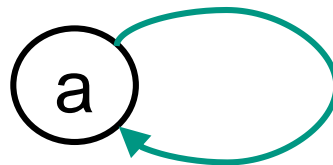
Relationen kann man auch in Graphen darstellen.

■ reflexiv:



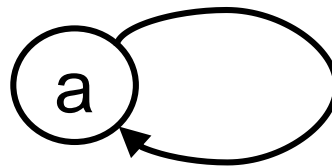
Relationen kann man auch in Graphen darstellen.

■ reflexiv:

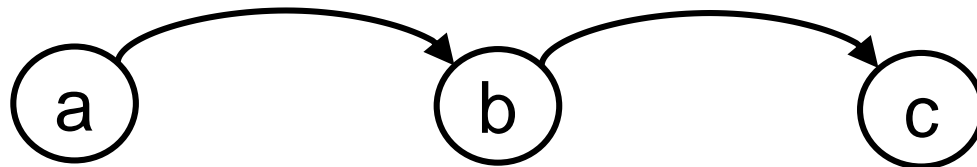


Relationen kann man auch in Graphen darstellen.

■ reflexiv:

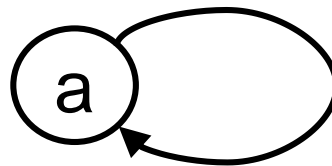


■ transitiv:

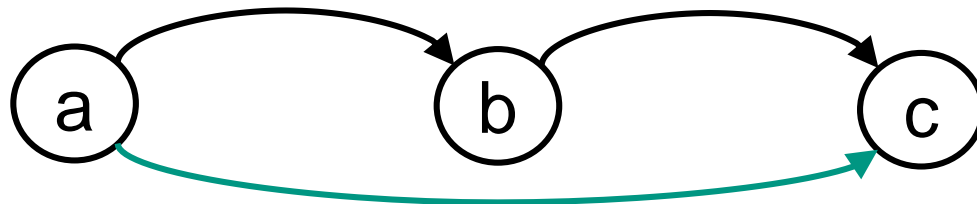


Relationen kann man auch in Graphen darstellen.

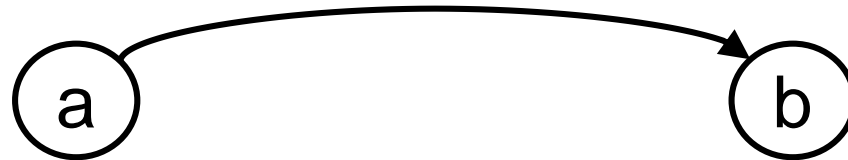
■ reflexiv:



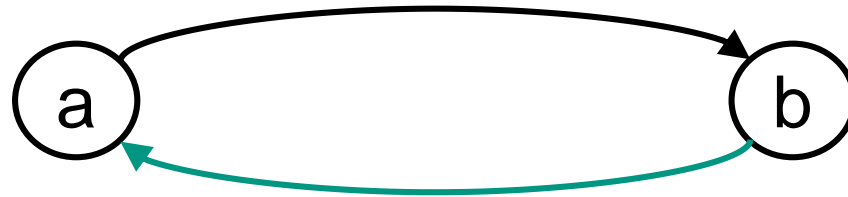
■ transitiv:



■ Symmetrie:

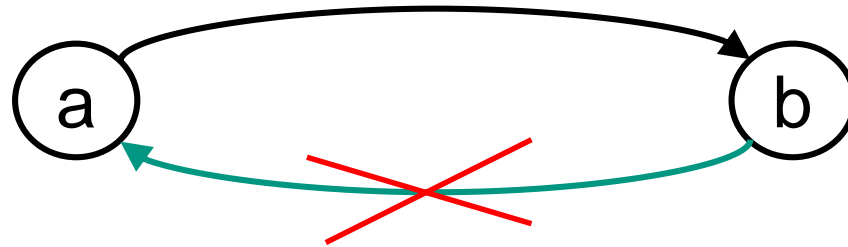


■ Symmetrie:



■ ~~Symmetrie:~~

■ Antisymmetrie



Aufgabe 2.1

| Y\Z | a | b | c | d | e | f | g | h |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | X | | | X | | | | |
| b | X | X | X | X | X | X | X | X |
| c | | | X | | | | | |
| d | | | | X | | | | |
| e | | | X | | X | | X | X |
| f | | | | X | | X | | |
| g | | | | | | | X | |
| h | | | X | | | | | X |

Aufgabe 2.1

- reflexiv?

| Y\Z | a | b | c | d | e | f | g | h |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | X | | | X | | | | |
| b | X | X | X | X | X | X | X | X |
| c | | | X | | | | | |
| d | | | | X | | | | |
| e | | | X | | X | | X | X |
| f | | | | X | | X | | |
| g | | | | | | | X | |
| h | | | X | | | | | X |

Aufgabe 2.1

- reflexiv?



| Y\Z | a | b | c | d | e | f | g | h |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | X | | | X | | | | |
| b | X | X | X | X | X | X | X | X |
| c | | | X | | | | | |
| d | | | | X | | | | |
| e | | | X | | X | | X | X |
| f | | | | X | | X | | |
| g | | | | | | | X | |
| h | | | X | | | | | X |

Aufgabe 2.1

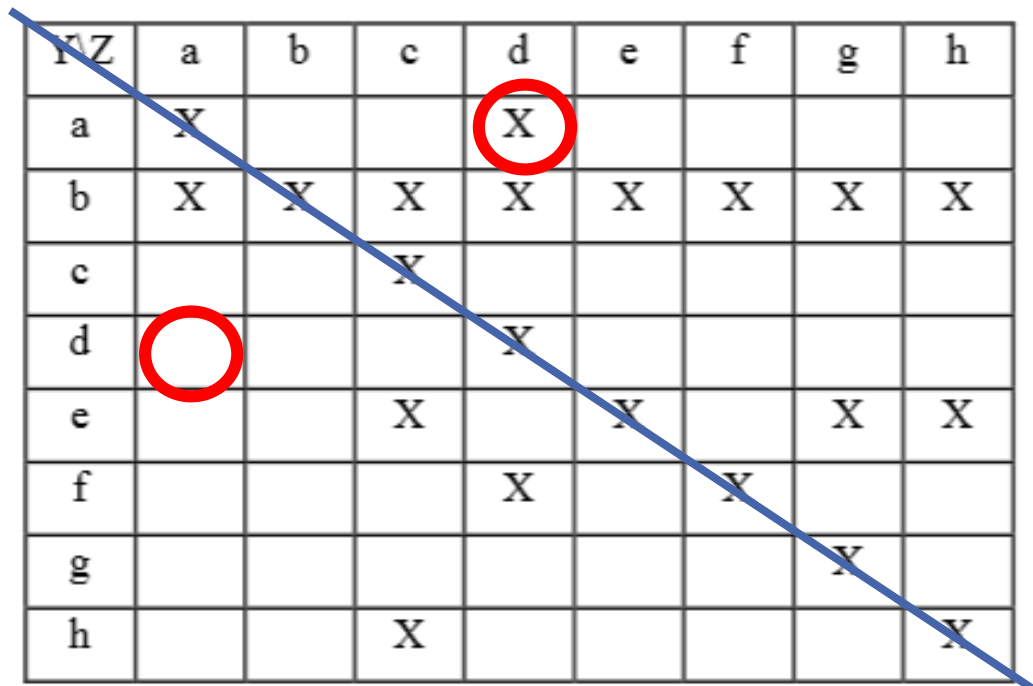
- reflexiv? ✓
- symmetrisch?

| Y\Z | a | b | c | d | e | f | g | h |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | X | | | X | | | | |
| b | X | X | X | X | X | X | X | X |
| c | | | X | | | | | |
| d | | | | X | | | | |
| e | | | X | | X | | X | X |
| f | | | | X | | X | | |
| g | | | | | | | X | |
| h | | | X | | | | | X |

Aufgabe 2.1

- reflexiv? ✓

- symmetrisch? ✗



| Z | a | b | c | d | e | f | g | h |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | X | | | X | | | | |
| b | X | X | X | X | X | X | X | X |
| c | | | X | | | | | |
| d | | | | X | | | | |
| e | | | X | | X | | X | X |
| f | | | | X | | X | | |
| g | | | | | | | X | |
| h | | | X | | | | | X |

Aufgabe 2.1

- reflexiv? 

- symmetrisch? 

- transitiv?

| Y\Z | a | b | c | d | e | f | g | h |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | X | | | X | | | | |
| b | X | X | X | X | X | X | X | X |
| c | | | X | | | | | |
| d | | | | X | | | | |
| e | | | X | | X | | X | X |
| f | | | | X | | X | | |
| g | | | | | | | X | |
| h | | | X | | | | | X |

Aufgabe 2.1

- reflexiv? 

- symmetrisch? 

- transitiv?

$e \rightarrow h$

$h \rightarrow c$

also muss:

$e \rightarrow c$

| Y\Z | a | b | c | d | e | f | g | h |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | X | | | X | | | | |
| b | X | X | X | X | X | X | X | X |
| c | | | X | | | | | |
| d | | | | X | | | | |
| e | | | X | | X | | X | X |
| f | | | | X | | X | | |
| g | | | | | | | X | |
| h | | | X | | | | | X |

Aufgabe 2.1

- reflexiv? 

- symmetrisch? 

- transitiv? 

 $e \rightarrow h$
 $h \rightarrow c$

also muss:

 $e \rightarrow c$

| Y\Z | a | b | c | d | e | f | g | h |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | X | | | X | | | | |
| b | X | X | X | X | X | X | X | X |
| c | | | X | | | | | |
| d | | | | X | | | | |
| e | | | X | | X | | X | X |
| f | | | | X | | X | | |
| g | | | | | | | X | |
| h | | | X | | | | | X |

Aufgabe 2.2

- Aus Aufgabenteil 2.1 folgen:
- reflexiv
 - antisymmetrisch
 - transitiv

| | Ordnungsrelation | Äquivalenzrelation | Verträglichkeitsrelation |
|----------------------------|--|--|--|
| Beschreibung | Ordnung von Elementen | Gleichwertigkeit/ Gleichartigkeit von Elementen | Erlaubtes Zusammentreffen von Elementen |
| häufig Vorschrift α | \leq, \geq, \supseteq | \equiv | |
| Eigenschaften | <ul style="list-style-type: none"> • reflexiv • antisymmetrisch • transitiv | <ul style="list-style-type: none"> • reflexiv • symmetrisch • transitiv | <ul style="list-style-type: none"> • reflexiv • symmetrisch • nicht transitiv |

Aufgabe 2.2

- Aus Aufgabenteil 2.1 folgen:

reflexiv

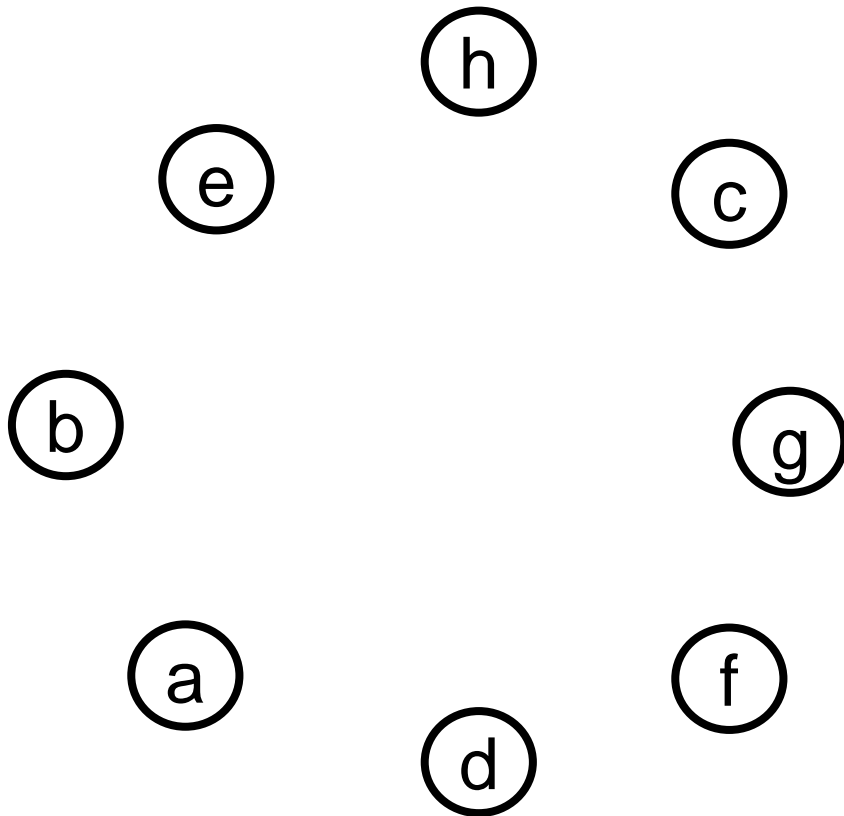
antisymmetrisch

transitiv



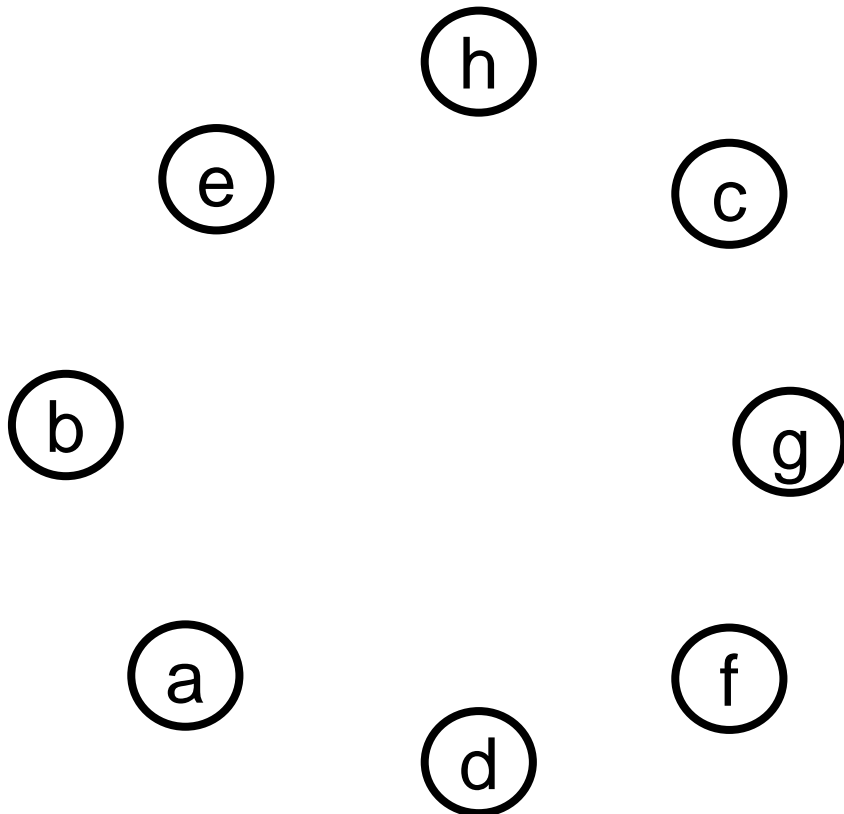
Es handelt sich um eine **Ordnungsrelation**

Aufgabe 2.3



| YZ | a | b | c | d | e | f | g | h |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | X | | | X | | | | |
| b | X | X | X | X | X | X | X | X |
| c | | | X | | | | | |
| d | | | | X | | | | |
| e | | | X | | X | | X | X |
| f | | | | X | | X | | |
| g | | | | | | | X | |
| h | | | X | | | | | X |

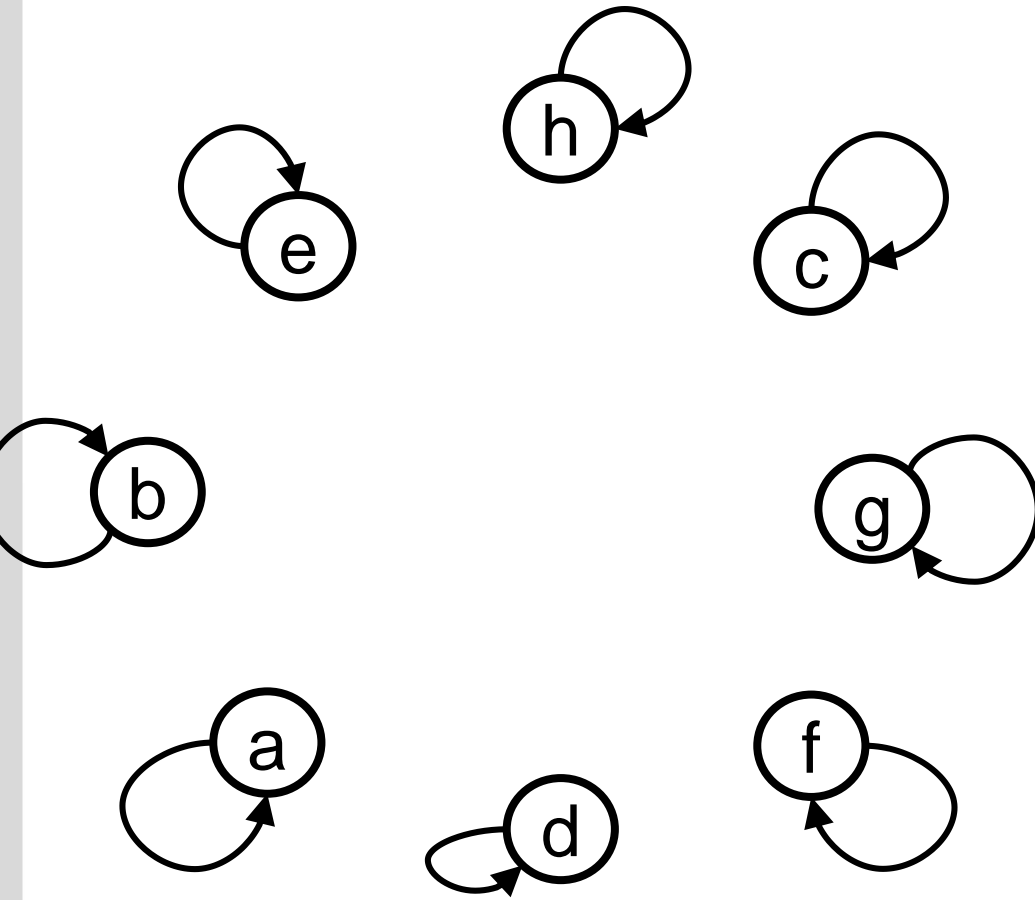
Aufgabe 2.3



| YZ | a | b | c | d | e | f | g | h |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | X | | | X | | | | |
| b | X | X | X | X | X | X | X | X |
| c | | | X | | | | | |
| d | | | | X | | | | |
| e | | | X | | X | | X | X |
| f | | | | X | | X | | |
| g | | | | | | | X | |
| h | | | X | | | | | X |

■ Alle Kreuze
abearbeiten

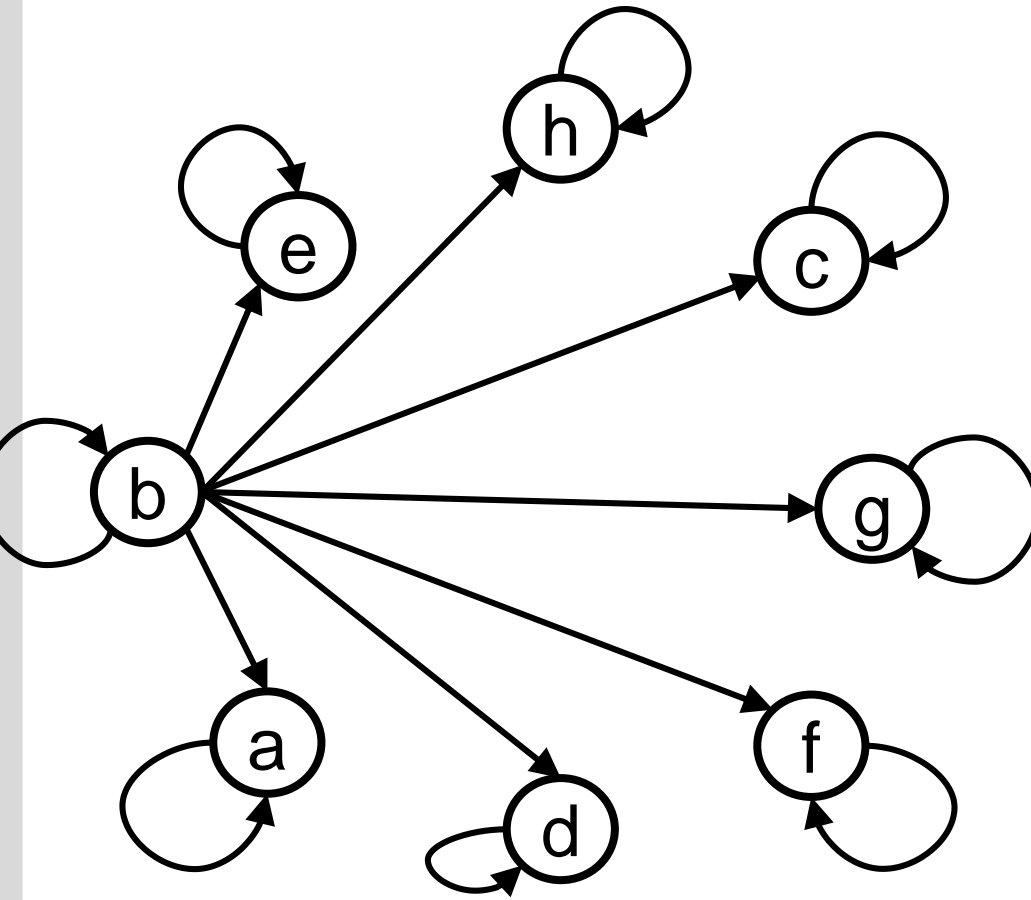
Aufgabe 2.3



| YZ | a | b | c | d | e | f | g | h |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | X | | | X | | | | |
| b | X | X | X | X | X | X | X | X |
| c | | | X | | | | | |
| d | | | | X | | | | |
| e | | | X | | X | | X | X |
| f | | | | X | | X | | |
| g | | | | | | | X | |
| h | | | X | | | | | X |

- Alle Kreuze abarbeiten
- 1. jedes Element ist reflexiv

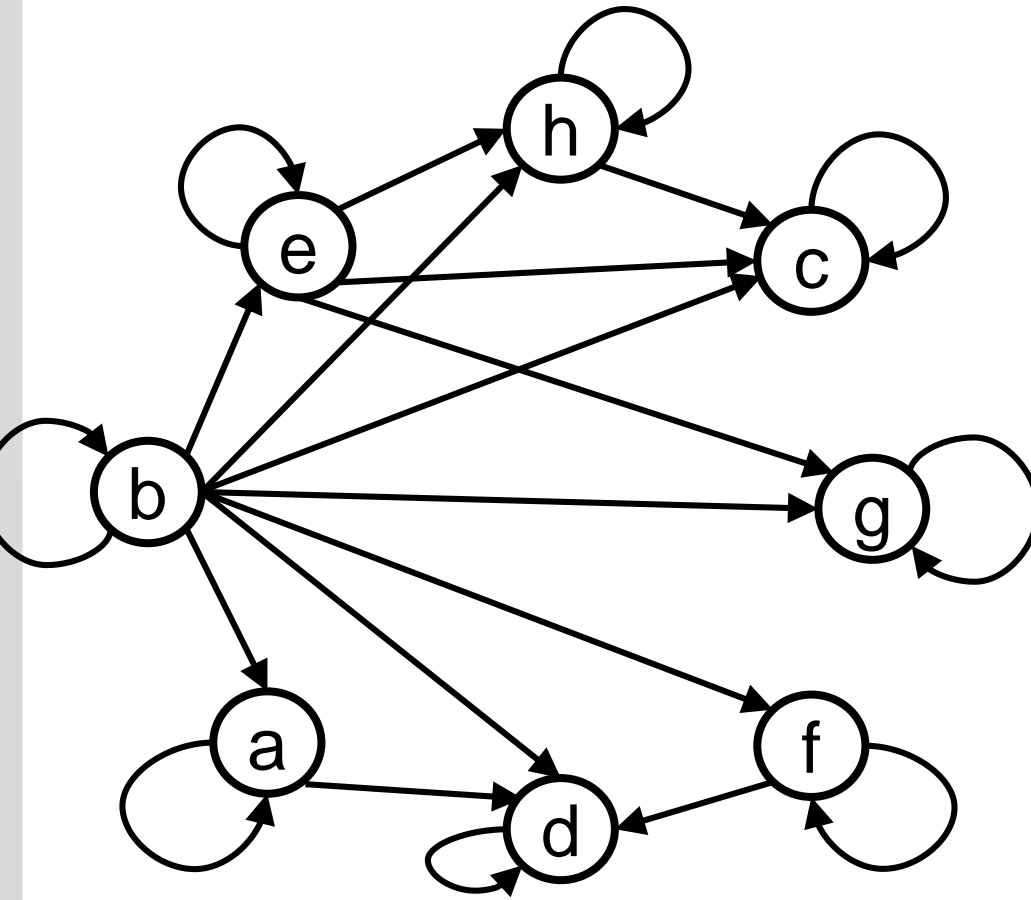
Aufgabe 2.3



| YZ | a | b | c | d | e | f | g | h |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | X | | | X | | | | |
| b | X | X | X | X | X | X | X | X |
| c | | | X | | | | | |
| d | | | | X | | | | |
| e | | | X | | X | | X | X |
| f | | | | X | | X | | |
| g | | | | | | | X | |
| h | | | X | | | | | X |

- Alle Kreuze abarbeiten
- 1. jedes Element ist reflexiv
- b steht mit jedem Element in einer Relation

Aufgabe 2.3



| YZ | a | b | c | d | e | f | g | h |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | X | | | X | | | | |
| b | X | X | X | X | X | X | X | X |
| c | | | X | | | | | |
| d | | | | X | | | | |
| e | | | X | | X | | X | X |
| f | | | | X | | X | | |
| g | | | | | | | X | |
| h | | | X | | | | | X |

- Alle Kreuze abarbeiten
- 1. jedes Element ist reflexiv
- b steht mit jedem Element in einer Relation
- Restliche Kreuze einzeichnen

Überdeckungstabelle

Aufgabe 3

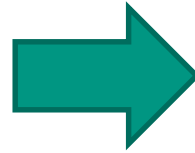
- Relationen der Essgewohnheiten machen
- Eigenschaften ablesen
- Überdeckungstabelle

| Person | Kartoffelbrei | Bratkartoffeln | Kartoffelauflauf | Himbeerkuchen |
|-----------|---------------|----------------|------------------|---------------|
| Linus | | | | X |
| Melanie | | X | X | X |
| Markus | X | | | |
| Theresa | X | X | | |
| Sebastian | | X | X | X |
| Marcel | X | X | X | X |



| Relation γ | Linus | Melanie | Markus | Theresa | Sebastian | Marcel |
|-------------------|-------|---------|--------|---------|-----------|--------|
| Linus | X | X | | | X | X |
| Melanie | X | X | | X | X | X |
| Markus | | | X | X | | X |
| Theresa | | X | X | X | X | X |
| Sebastian | X | X | | X | X | X |
| Marcel | X | X | X | X | X | X |

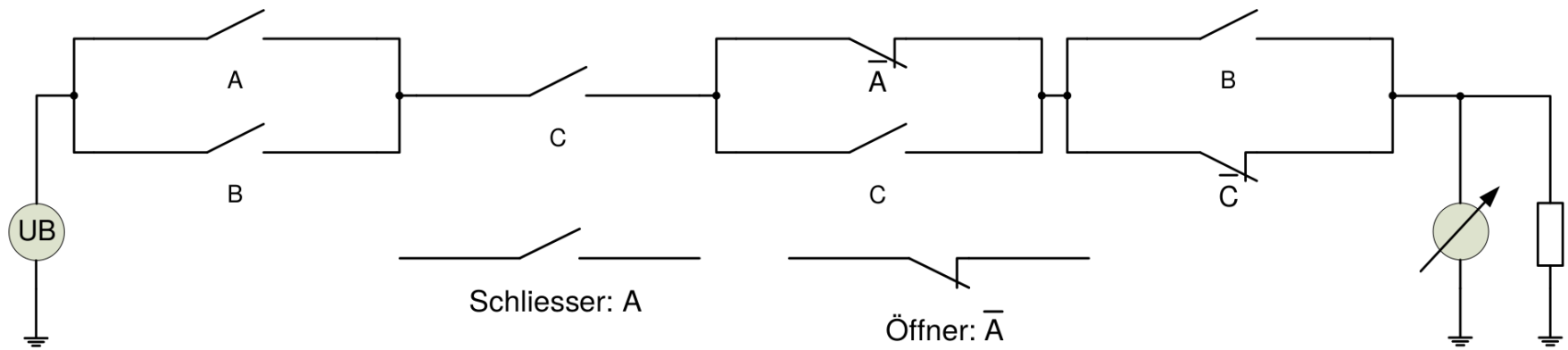
- Reflexiv
- Symmetrisch
- Nicht transitiv



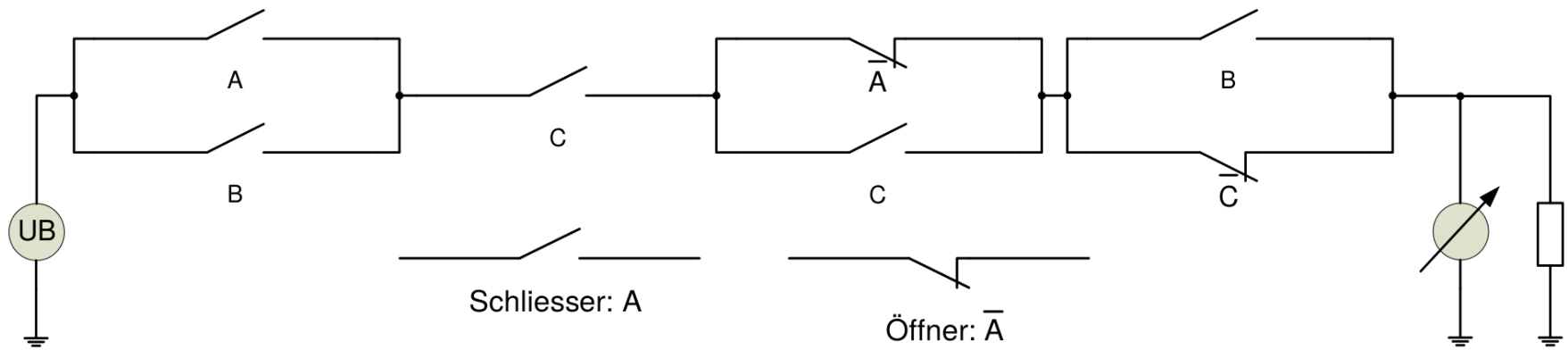
Verträglichkeitsrelation

| Relation γ | Linus | Melanie | Markus | Theresa | Sebastian | Marcel |
|-------------------|-------|---------|--------|---------|-----------|--------|
| Linus | X | X | | | X | X |
| Melanie | X | X | | X | X | X |
| Markus | | | X | X | | X |
| Theresa | | X | X | X | X | X |
| Sebastian | X | X | | X | X | X |
| Marcel | X | X | X | X | X | X |

Schaltalgebra

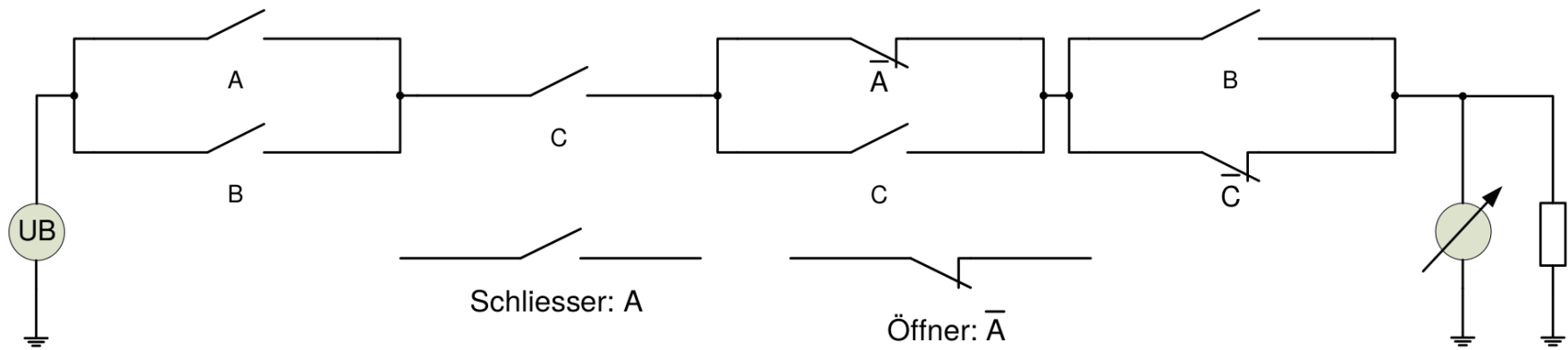


Schaltalgebra



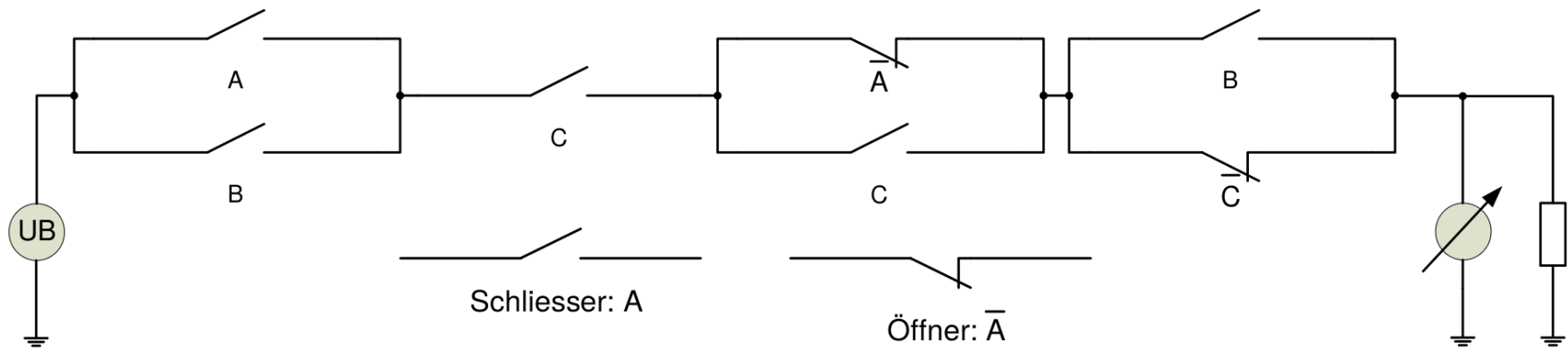
$$Y_1 = (A \vee B) \wedge C \wedge (\bar{A} \vee C) \wedge (B \vee \bar{C})$$

Schaltalgebra



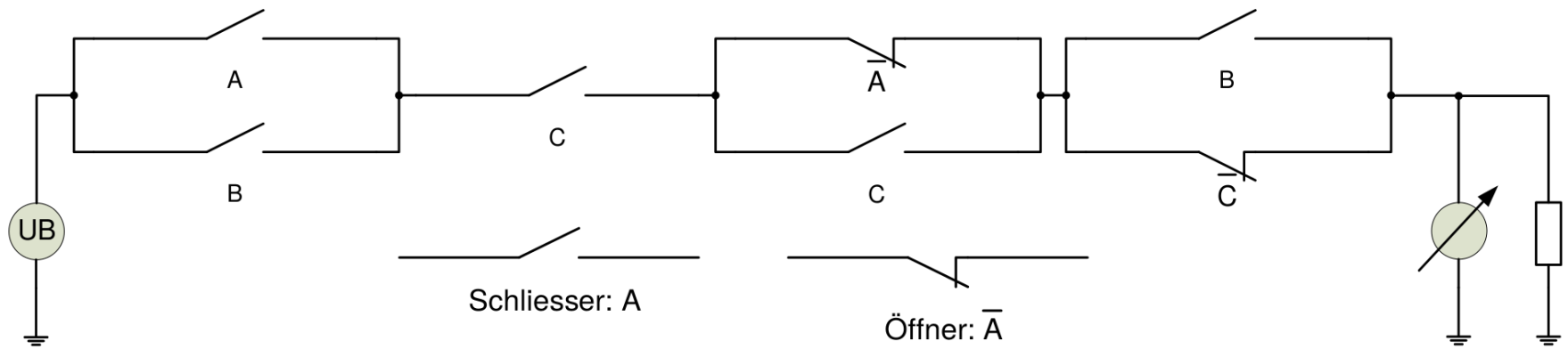
$$\begin{aligned}
 Y_1 &= (A \vee B) \wedge C \wedge (\bar{A} \vee C) \wedge (B \vee \bar{C}) \\
 &= (AC \vee BC)C(\bar{A}B \vee \bar{A}\bar{C} \vee CB)
 \end{aligned}$$

Schaltalgebra



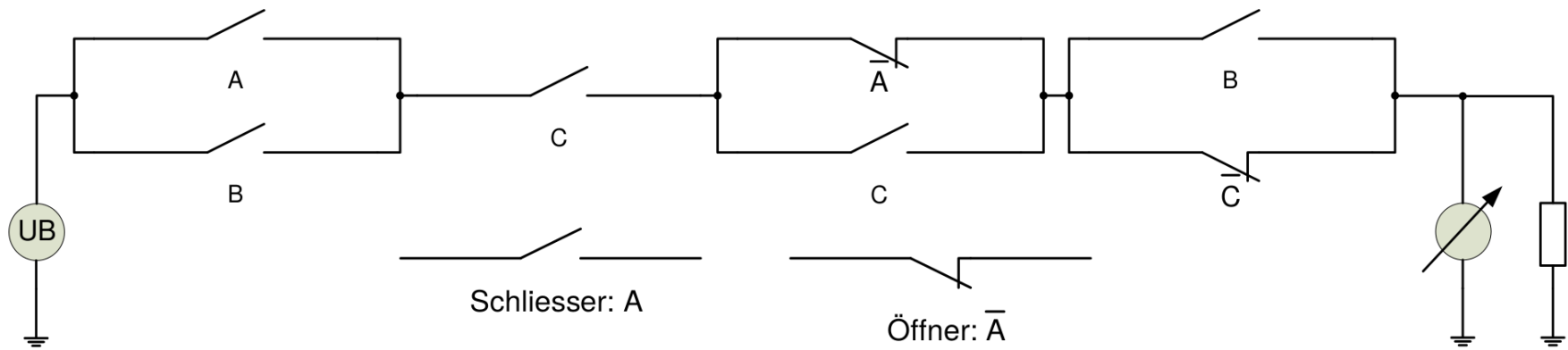
$$\begin{aligned}
 Y_1 &= (A \vee B) \wedge C \wedge (\bar{A} \vee C) \wedge (B \vee \bar{C}) \\
 &= (AC \vee BC)C(\bar{A}B \vee \bar{A}\bar{C} \vee CB) \\
 &= ACB \vee \bar{A}BC \vee BC
 \end{aligned}$$

Schaltalgebra

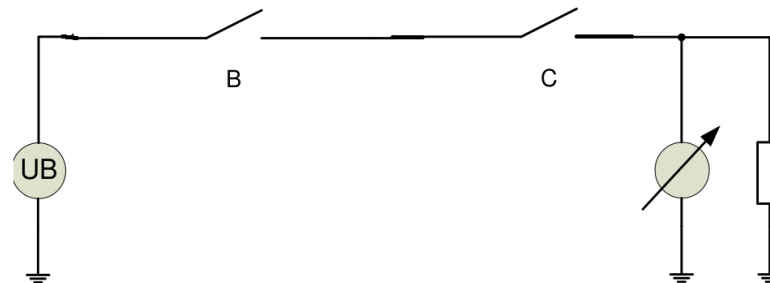


$$\begin{aligned}
 Y_1 &= (A \vee B) \wedge C \wedge (\bar{A} \vee C) \wedge (B \vee \bar{C}) \\
 &= (AC \vee BC)C(\bar{A}B \vee \bar{A}\bar{C} \vee CB) \\
 &= ACB \vee \bar{A}BC \vee BC \\
 &= BC
 \end{aligned}$$

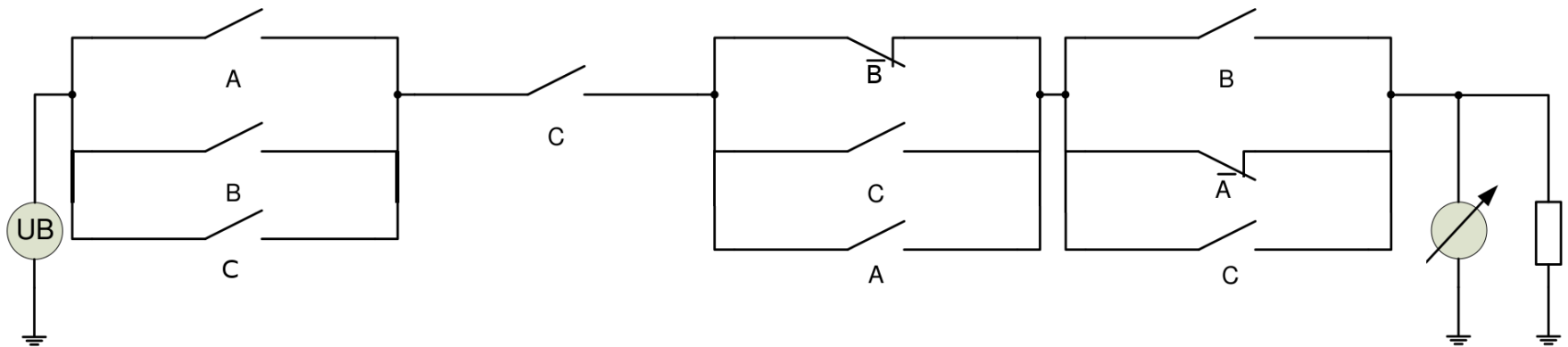
Schaltalgebra



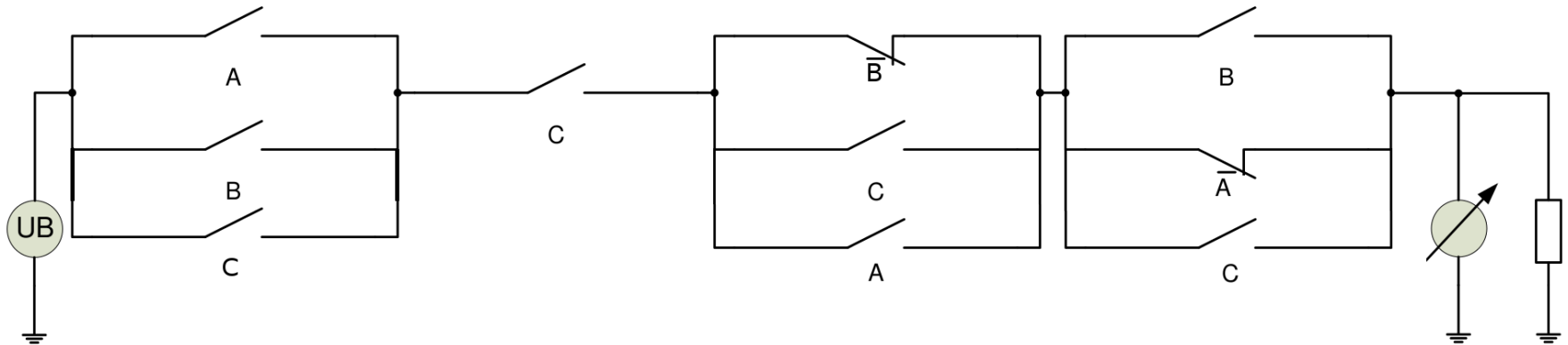
$$\begin{aligned}
 Y_1 &= (A \vee B) \wedge C \wedge (\bar{A} \vee C) \wedge (B \vee \bar{C}) \\
 &= (AC \vee BC)C(\bar{A}B \vee \bar{A}\bar{C} \vee CB) \\
 &= ACB \vee \bar{A}BC \vee BC \\
 &= BC
 \end{aligned}$$



Schaltalgebra



Schaltalgebra



$$\begin{aligned}
 Y_2 &= (A \vee B \vee C) \wedge (C) \wedge (A \vee \bar{B} \vee C) \wedge (\bar{A} \vee B \vee C) \\
 &= (A \vee B \vee C)(C)(A \vee \bar{B} \vee C)(\bar{A} \vee B \vee C) = C
 \end{aligned}$$