Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Felix Pistorius

pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

Digitaltechnik

3. Übung

Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Felix Pistorius

pistorius@kit.edu

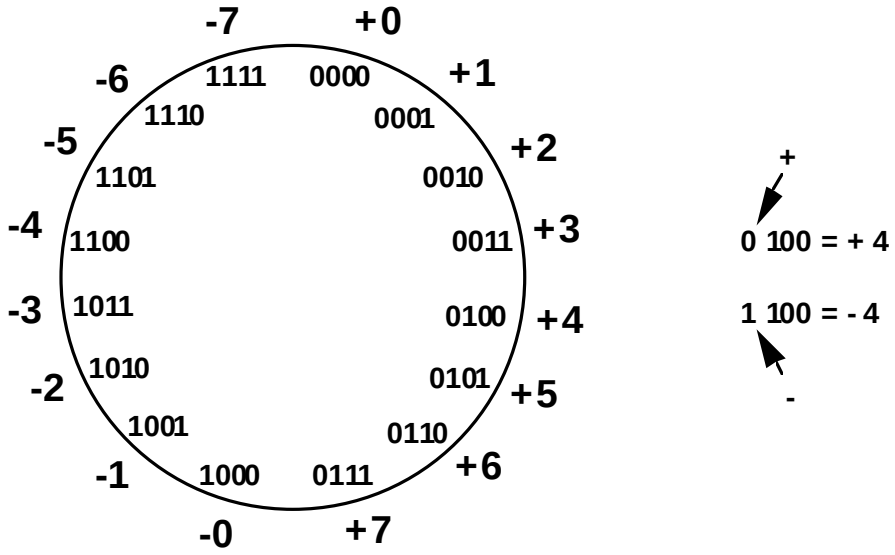
Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

Zahlendarstellung und Komplement

Zahlendarstellung

- ***Vorzeichen und Betrag***

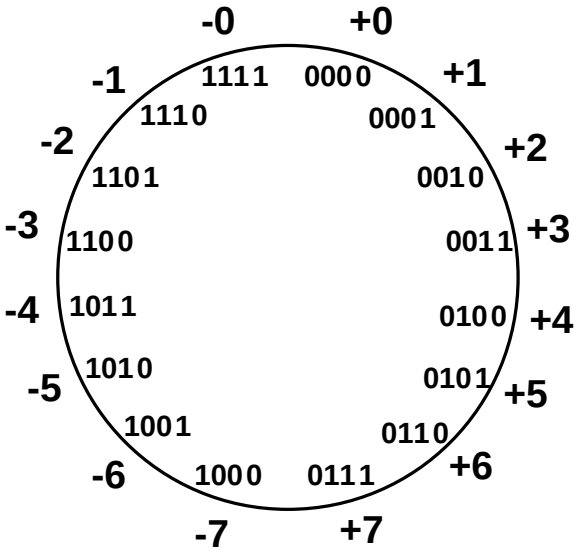


- Höchstes Bit ist Vorzeichen: 0 = positiv (oder NULL), 1 = negativ
- Die restlichen Bits der Betrag: 0 (000) bis 7 (111)
- Zahlenbereich für n Bits = +/- 2^{n-1}
- Darstellung der Null: 0000 und 1000

- **<u>Problematische Addition und Subtraktion</u>**
  → Vergleich von Beträgen und Vorzeichen

Zahlendarstellung

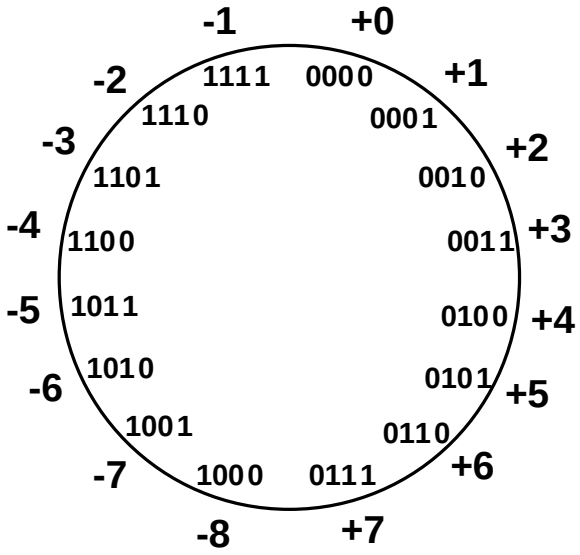
- ***1er Komplement***

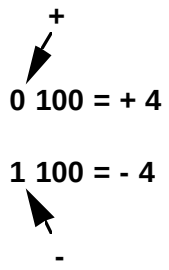


- Subtraktion realisiert durch 1er Komplement und Addition!
- **Zwei Darstellungen der Null nicht optimal !!!**
- **Addition ist ggf. nicht einfach durchzuführen !!!**
  - **eine 1 muss zum Endergebnis dazu addiert werden, wenn:**
    - zwei negativen Zahlen addiert werden
    - bei Addition einer positiven und einer negativen Zahl, aber nur wenn der Betrag der positiven größer ist

Zahlendarstellung

- ***2er Komplement (K2)***





- wie 1er Komplement, zusätzlich jedoch um eine Position im Gegenuhrzeigersinn verschoben
- Nur eine Darstellung der Null
- eine negative Zahl mehr als positive
- **Addition und Subtraktion einfach durchführbar**

K2-Darstellung

- **Vorschrift:**
  - **Positives Zeichen:** Voranstellen einer führenden ‚0‘
  - **Negatives Zeichen:** Voranstellen einer führenden ‚0‘ beim betragsgleichen positiven Zeichen, Invertieren aller Bits, Addition von 1_B
- **K2-Darstellung vereinfacht Subtraktion stark** (entspricht Addition einer negativen Zahl):

dezimal	K2
4	0100
+ (-3)	+ 1101
1	10001

Vorsicht bei Überläufen:

dezimal	K2
5	0 1 0 1
+ 3	+ 0 0 1 1
-8 Überlauf	1 0 0 0

Bsp. Zehnerkomplement, positives Ergebnis

$769_D - 341_D = 428_D$

$769 + (\underbrace{\mathbf{1000 - 341}}_{\text{10er Komplement, K10(341)}}) - 1000 =$

$769 + (\underbrace{\mathbf{999 - 341}}_{\text{9er Komplement, K9(341)}} + 1) - 1000 =$

$769 + (999 - 341) + 1 - 1000 =$
$769 + K9(341) + 1 - 1000 =$
$769 + 658 + 1 - 1000 =$
$1427 + 1 - 1000 =$
$1428 - 1000 =$
$= 428$

Eigentliche Rechnung - mit positivem Ergebnis

Einfacher mathem. Trick: Ergänzung um 1000

→ (1000 - 341) ist das 10er Komplement der Zahl 341; leider ist dieses jedoch immer noch nicht leichter zu berechnen

weiterer Trick: Ausklammern einer 1

→ (999 - 341) ist das 9er Komplement der Zahl 341; Dieses hat den Vorteil, dass man es relativ leicht, nämlich Stellenweise berechnen kann (also keine Überträge bei der Berechnung auftreten:

K9(341) = 999 - 348 = 658
{9 - 3 = **6**; 9 - 4 = **5**; 9 - 1 = **8**}

Das K10(341) ergibt sich also aus dem K9(341) + 1

Einziges Problem bleibt nun die abschließende Subtraktion von 1000; Wird aber (wie in diesem Fall) von einer größeren Zahl eine kleinere Abgezogen so entsteht IMMER ein Übertrag von genau 1 in die nächst höhere Stelle, und genau diese 1 muss abschließend abgezogen werden.

Man kann diesen Übertrag also einfach weglassen.

Bsp. Zweierkomplement, positives Ergebnis

$$\mathbf{1101_B - 1010_B = 11_B}$$

$$1101 + (\underbrace{\mathbf{10000 - 1010}}_{\text{2er Komplement, K2(1010)}}) - 10000 =$$

$$1101 + (\underbrace{\mathbf{1111 - 1010}}_{\text{1er Komplement, K1(1010)}} + 1) - 10000 =$$

$$\begin{aligned}
& 1101 + (1111 - 1010) + 1 - 10000 \\
= \; & 1101 + K1(1010) + 1 - 10000 \\
= \; & 1101 + 0101 + 1 - 10000 \\
= \; & 10010 + 1 - 10000 \\
= \; & 10011 - 10000 \\
= \; & 11
\end{aligned}$$

Eigentliche Rechnung – mit positivem Ergebnis

Trick: Ergänzung auf die nächst größere Stelle 10000_B

→ ($10000_B - 1010_B$) ist das 2er Komplement der Zahl 1010_B; leider ist dieses jedoch immer noch nicht leichter zu berechnen

weiterer Trick: Ausklammern einer 1

→ ($1111_B - 1010_B$) ist das 1er Komplement der Zahl 1010_B; Im Dualsystem ist das 1er Komplement einfach durch stellenweises Invertieren berechenbar:

$K_1(1010_B) = 1111_B - 1010_B = 0101_B$

{1 - 1 = **0**; 1 - 0 = **1**; 1 - 1 = **0**; 1 - 0 = **1**}

Das $K_2(1010)$ ergibt sich also aus dem $K_1(1010)$ + 1

Einziges Problem bleibt nun die abschließende Subtraktion von 10000_B

Wird aber (wie in diesem Fall) von einer größeren Zahl eine kleinere Abgezogen so entsteht IMMER ein Übertrag von genau 1 in die nächst höhere Stelle, und genau diese 1 muss abschließend abgezogen werden. Man kann diesen Übertrag also einfach streichen.

Bsp. Zehnerkomplement, negatives Ergebnis

$341_D - 769_D = -428_D$

$341 + (\underbrace{1000 - 769}) - 1000 =$

10er Komplement; K10(769)

$341 + (\underbrace{999 - 769} + 1) - 1000 =$

9er Komplement (K9(769) = 230)

$341 + K9(769) + 1 - 1000 =$
$341 + 230 + 1 - 1000 =$
$571 + 1 - 1000 =$
$_572 - 1000 =$

$-(\underbrace{1000 - 572}) =$

10er Komplement; K10(572)

$-(\underbrace{999 - 572} + 1) =$

9er Komplement (K9(572) = 427)

$-(427 + 1) = -428$

Eigentliche Rechnung - mit negativem Ergebnis

Bilden des K10

Wieder wird das K9 gebildet, um das K10 leichter berechnen zu können (K10(x) = K9(x) + 1)

Nun tritt aber folgendes Problem auf:

→ Da hier eine größere Zahl von einer kleineren abgezogen wird, ergibt sich *kein* Übertrag auf die nächste Stelle womit die einfache Subtraktion der 1000 nicht mehr möglich ist.

Weiterer Trick: Ausklammern des Faktors -1

→ Das so entstandene Zwischenergebnis ist aber gerade das schon bekannte K10(572), welches wiederum aus dem K9(572) + 1 leicht berechnet werden kann

Nicht zu vergessen ist natürlich die –1 die wir zwischendurch ausgeklammert haben, wodurch sich das korrekte negative Ergebnis ergibt

Tritt also bei der Berechnung kein Übertrag auf, so muss vom Zwischenergebnis der Subtraktion nochmals das K10 gebildet werden!

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

Bsp. Zweierkomplement, negatives Ergebnis

$$\mathbf{1010_B - 1101_B = -\,11_B}$$

$$1010 + (\,\mathbf{10000 - 1101}\,) - 10000 =$$

2er Komplement; K2(1101)

$$1010 + (\,\mathbf{1111 - 1101} + 1\,) - 10000 =$$

1er Komplement (K1(1101) = 0010)

$$1010 + K1(1101) + 1 - 10000 =$$
$$1010 + 0010 + 1 - 10000 =$$
$$1100 + 1 - 10000 =$$
$$1101 - 10000 =$$

$$-\,(\,10000 - 1101\,) =$$

2er Komplement; K2(1101)

$$-(\,1111 - 1101 + 1\,) =$$

1er Komplement (K1(1101) = 0010)

$$-\,(\,10 + 1\,) = -\,11$$

Eigentliche Rechnung – mit negativem Ergebnis

Bilden des K2

Wieder wird das K1 gebildet um das K2 leichter berechnen zu können (K2(x) = K1(x) + 1)

Problem:

→ Da hier eine größere Zahl von einer kleineren abgezogen wird, ergibt sich kein Übertrag auf die nächste Stelle womit die einfache Subtraktion der 10000B nicht mehr möglich ist.

Trick: Ausklammern des Faktors -1

→ Das so entstandene Zwischenergebnis ist wieder gerade das schon bekannte K2(1101B), welches wiederum aus dem K1(1101B) + 1 leicht berechnet werden kann

Nicht zu vergessen ist natürlich wieder der Faktor –1 den wir zwischendurch ausgeklammert haben, wodurch sich das korrekte negative Ergebnis wieder ergibt

Tritt also bei der Berechnung kein Übertrag auf, so muss vom Zwischenergebnis der Subtraktion nochmals das K2 gebildet werden!

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Felix Pistorius

pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

1. Aufgabe: ASCII–Code

1. Aufgabe

41 64 64 69 65 72 65 6E 20 53 69 65 20 69 6D 20 42 43 44
2D 43 6F 64 65 3A 20 33 32 38 20 2B 20 37 33 39

1.1 Obige Aufgabe ist hexadezimal im ASCII-Code codiert.
Führen Sie die Aufgabe durch.

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

ASCII-Zeichentabelle

HEX	00	10	20	30	40	50	60	70
00	NUL	DLE	SP	0	@	P	`	p
01	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
02	STX	DC2	"	2	B	R	b	r
03	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
04	EOT	DC4	$	4	D	T	d	t
05	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
06	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
07	BEL	ETB	´	7	G	W	g	w
08	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
09	HAT	EM	)	9	I	Y	i	y
0A	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
0B	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
0C	FF	FS	,	<	L	\	l	|
0D	CR	GS	-	=	M	]	m	}
0E	SO	RS	.	>	N	↑	n	~
0F	SI	US	/	?	O	→	o	DEL

z.B.:

ASCII Code = 41 Hex

entspricht ‚A‘

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

1. Aufgabe – 1.1

41 64 64 69 65 72 65 6E 20 53 69 65 20 69 6D 20 42 43 44
2D 43 6F 64 65 3A 20 33 32 38 20 2B 20 37 33 39

1.1 Obige Aufgabe ist hexadezimal im ASCII-Code codiert.
Führen Sie die Aufgabe durch.

41 64 64 69 65 72 65 6E 20 53 69 65 20 69 6D 20 42 43 44 2D
A d d i e r e n S i e i m B C D -

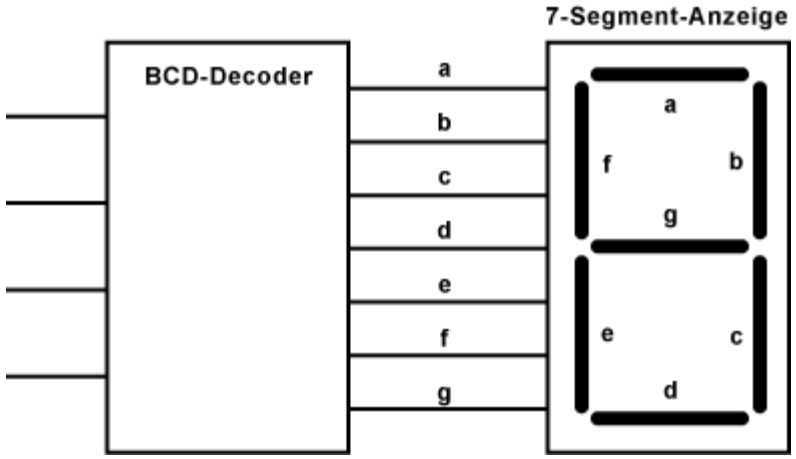
43 6F 64 65 3A 20 33 32 38 20 2B 20 37 33 39
C o d e : 3 2 8 + 7 3 9

Die Aufgabe lautet: ”Addieren Sie im BCD-Code: 328 + 739”

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

BCD-Code

	BCD-Code		BCD-Code
0	0000	10	1010
1	0001	11	1011
2	0010	12	1100
3	0011	13	1101
4	0100	14	1110
5	0101	15	1111
6	0110		
7	0111		
8	1000		
9	1001		



Pseudotetrade

Dezimaler Zahlenbereich

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

Addition im BCD - Code

- Bei der Addition zweier **BCD-Dekaden** sind drei Fälle zu beachten:
  - Tritt **kein Übertrag und keine Pseudotetrade** auf
    - ➢ Einfaches addieren ohne Korrektur
  - Tritt **ein Übertrag** auf
    - ➢ so muss „6_D“ zur Ergebnisdekade addiert werden.
  - ergibt sich als Resultat **eine Pseudotetrade**
    - ➢ so muss „6_D“ zur Ergebnisdekade addiert werden und eine „1_D“ zur Übertragungsdekade

Dezimal	BCD - Code
8	1000
+ 9	1001
	1
	0001 0001
+ Übertrag	0110
= 17	**0001 0111**

Dezimal	BCD - Code
7	0111
+ 6	0110
	1101
+ PSD	1 0110
= 13	**0001 0011**

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

4-Bit-Dualcodes

Code	Dezimal	BCD	Stibitz	Aiken
0000	0	0	PSD	0
0001	1	1	PSD	1
0010	2	2	PSD	2
0011	3	3	0	3
0100	4	4	1	4
0101	5	5	2	PSD
0110	6	6	3	PSD
0111	7	7	4	PSD
1000	8	8	5	PSD
1001	9	9	6	PSD
1010	10	PSD	7	PSD
1011	11	PSD	8	5
1100	12	PSD	9	6
1101	13	PSD	PSD	7
1110	14	PSD	PSD	8
1111	15	PSD	PSD	9

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

Addition im Stibitz - Code

- Bei der Addition zweier **Stibitz-Dekaden** sind zwei Fälle zu beachten:
  - Tritt **kein Übertrag** auf
    - so muss „3_D“ abgezogen werden
    - dies entspricht einer Addition von „1101_B“ ohne Übertrag
  - Tritt **ein Übertrag** auf
    - so muss „3_D“ addiert werden
    - dies entspricht einer Addition von „0011_B“ ohne Übertrag

	Dezimal	Stibitz - Code
	4	0011 0111
+	9	0011 1100
		1
		0111 0011
+		~~1~~ 1101 0011
=	**13**	**0100 0110**

	Dezimal	Stibitz - Code
	3	0110
+	4	0111
		1101
+	Ohne Ü.	~~1~~ 1101
=	**7**	**1010**

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

1. Aufgabe – 1.1

- Die Aufgabe lautet: ”Addieren Sie im BCD-Code: 328 + 739”

	Dezimal	BCD-Code			
	328		0011	0010	1000
+	739		0111	0011	1001
			111	11 1	Ziffern-Übertrag
			1010	0110	0001 Zwischenergebnis
+			0110		0110 Korrektur
=	1067	0001	0000	0110	0111

wegen Pseudotetrade

wegen Übertrag

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

1. Aufgabe – 1.2

1.2 Führen Sie das Gleiche nach Umwandlung in den STIBITZ–Code durch.

	Dezimal	STIBITZ-Code				
	328	0011	0110	0101	1011	
+	739	0011	1010	0110	1100	
		111	11	1111		Ziffern-Übertrag
		0111	0000	1100	0111	Zwischenergebnis
+		1101	0011	1101	0011	Korrektur
=	1067	0100	0011	1001	1010	

Übertrag : + 0011

Sonst: - 0011 oder eben + 1101

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Felix Pistorius

pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

Zusatz: BCD vs. Stibitz

Schwierigkeiten bei BCD - Addition

- **Beispiel:** Addition von 339_D und 662_D im BCD – Code
  - ggf. mehrmalige Korrektur notwendig

		0011	0011	1001	339_D
	+	0110	0110	0010	$+ 662_D$
		1 1	1 1		
		1001	1001	1011	Pseudotetrade
Korrektur:				+0110	
			1	1 1	
		1001	1010	0001	Pseudotetrade
Korrektur:			+0110		
		1	11		
		1010	0000	0001	Pseudotetrade
Korrektur:		+0110			
	1	11			
Endergebnis:	**0001**	**0000**	**0000**	**0001**	**1001_D**

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

Addition im Stibitz - Code

- **Beispiel:** Addition von 339_D und 662_D im Stibitz- Code
  - **Bei Übertrag:** 0011_B muss addiert werden
  - **Ohne Übertrag:** es muss 0011_B **abgezogen** werden, was durch Addition von 1101_B **ohne Übertrag** erreicht werden kann

	0011	0110	0110	1100	339_D
+	0011	1001	1001	0101	$+ 662_D$
	111 1	1111	1111	1	
	0111	0000	0000	0001	
Korrektur:	+1101	+0011	+0011	+0011	
	~~1~~ 111			11	
Endergebnis:	**0100**	**0011**	**0011**	**0100**	**1001_D**

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

Symmetrie-Eigenschaften

- BCD – Code

Dezimal	0	1	2	3	4
BCD	0000	0001	0010	0011	0100
BCD	1001	1000	0111	0110	0101
Dezimal	9	8	7	6	5

- Stibitz - Code

Dezimal	0	1	2	3	4
STIBITZ	0011	0100	0101	0110	0111
STIBITZ	1100	1011	1010	1001	1000
Dezimal	9	8	7	6	5

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

Subtraktion im BCD – Code

- Bsp. 53 – 16 im BCD - Code

	Dezimal	BCD-Code	
	53	0101	0011
+	84	1000	0100
		1101	0111
+		0110	
		1	
	37	0011	0111

1

Wegen Übertrag ist das Ergebnis positiv!!!

Wie wird das 10er-Komplement gebildet?!?!
100 – 16 = 84

Ziffern-Übertrag

Zwischenergebnis

Korrektur

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

Subtraktion im Stibitz – Code

- Bsp. 53 – 16 im Stibitz - Code

	Dezimal	Stibitz -Code	
	53	1000	0110
+	(-16)	1011	0111
		1	11
		0011	1101
+		0011	1101
		11	1 1
	37	0110	1010

Wegen Übertrag ist das Ergebnis positiv!!!

10er-Komplement?!?!
9er Komplement bilden
→(Stibitz-Code invertieren)
+ 1_B
(nur einmal!)

Ziffern-Übertrag

Zwischenergebnis

Korrektur

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

Subtraktion im BCD – Code

- Bsp. 16 – 53 im BCD - Code

	Dezimal	BCD-Code		
	16	0001	0110	
+	47	0100	0111	
	(100-53 =47)			
			11	Ziffern-Übertrag
		0101	1101	Zwischenergebnis
+			0110	Korrektur
		0	11 1	
	63	0110	0011	Zwischenergebnis

Abermals muss das 10er-Komplement gebildet werden !!!
100 – 63 = 37

Wegen **KEINEM** Übertrag ist das Ergebnis negativ!!!

-37	**0011**	**0111**	**Endergebnis**

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

Subtraktion im Stibitz – Code

- Bsp. 16 – 53 im Stibitz - Code

Dezimal	Stibitz - Code		
16	0100	1001	
+ (- 53)	0111	1010	
	0 1111		Ziffern-Übertrag
	1100	0011	Zwischenergebnis
+	1101	0011	Korrektur
	1	11	
63	1001	0110	Zwischenergebnis

Abermals muss das 10er-Komplement gebildet werden !!!
Invertieren + 1_B

Wegen **KEINEM** Übertrag ist das Ergebnis negativ!!!

-37	**0110**	**1010**	**Endergebnis**

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Felix Pistorius

pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

6. Aufgabe

6. Aufgabe – 6.1

- Führen Sie die folgenden Berechnungen im angegebenen Zahlensystem aus, ohne die Zahlen ins Dezimalsystem umzuwandeln:

6.1 Addition im Dualsystem

$$
\begin{array}{rcccccccccccc}
 & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
+ & & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
\hline
= & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline\hline
\end{array}
$$

Übertrag

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

6. Aufgabe – 6.2

- Führen Sie die folgenden Berechnungen im angegebenen Zahlensystem aus, ohne die Zahlen ins Dezimalsystem umzuwandeln:

6.2 Multiplikation im Dualsystem

1 1 1 0 1 0 1 0 x 1 0 1 1

=

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

6. Aufgabe – 6.2

- Führen Sie die folgenden Berechnungen im angegebenen Zahlensystem aus, ohne die Zahlen ins Dezimalsystem umzuwandeln:

6.2 Multiplikation im Dualsystem

					1	1	1	0	1	0	1	0	
					1	1	1	0	1	0	1	0	1
+				1	1	1	0	1	0	1	0		1
+			0	0	0	0	0	0	0	0			0
+		1	1	1	0	1	0	1	0				1
	1	1	1 1	1 1	1 1	1	1						
=	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	

Verknüpfung entspricht:

- $\cdot 2^0$ UND - Operation
- $\cdot 2^1$ UND + LShift um eine Stelle
- $\cdot 2^2$ UND + LShift um zwei Stellen
- $\cdot 2^3$ UND + LShift um drei Stellen

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

6. Aufgabe – 6.3

- Führen Sie die folgenden Berechnungen im angegebenen Zahlensystem aus, ohne die Zahlen ins Dezimalsystem umzuwandeln:

6.3 Subtraktion im Dualsystem

$$\begin{array}{rcccccccc} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ - & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline = & & & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccccc} & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ - & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline = & & & & & & & & \end{array}$$

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

6. Aufgabe – 6.3

6.3 Subtraktion im Dualsystem

		1	1	0	1	0	0	1	0	a
		1	0	1	1	0	1	0	1	b
		1	1	0	1	0	0	1	0	a
+		0	1	0	0	1	0	1	1	Zweierk. von b
	1	1				1				Übertrag
=	1	0	0	0	1	1	1	0	1	
=		0	0	0	1	1	1	0	1	c

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

6. Aufgabe – 6.3

6.3 Subtraktion im Dualsystem

	0	1	1	1	0	1	1	0	a
	1	0	0	1	1	0	0	1	b
	0	1	1	1	0	1	1	0	
+	0	1	1	0	0	1	1	1	Zweierk. von b
	1	1			1	1			Übertrag
=	1	1	0	1	1	1	0	1	c
	0	0	1	0	0	0	1	1	Zweierk. von c

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

6. Aufgabe – 6.4

6.4 Addition im Hexadezimalsystem

	B	6	7	4	F	C	1	2
+	2	D	A	9	D	4	B	2
	1	1		1	1			
=	E	4	1	E	D	0	C	4

Dez	Bin	Hex
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7

Dez	Bin	Hex
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Felix Pistorius

pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

2. Aufgabe: Fließkommadarstellung

2. Aufgabe

Im Speicher eines Digitalrechners ist folgende Bitkombination abgelegt:

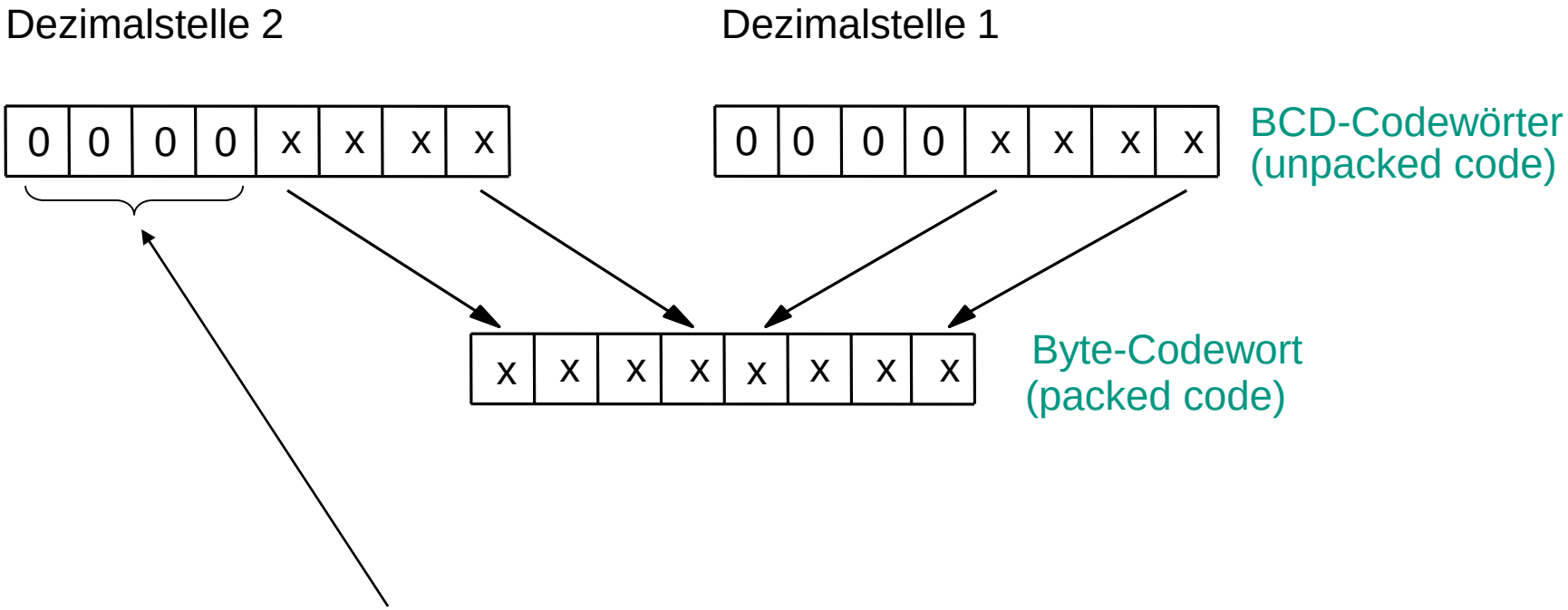
00011001 01010100 10011000 00110000.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, diese Bitkombination zu interpretieren. Geben Sie die jeweils dazugehörenden Werte als Dezimalzahl an:

2.1 Interpretieren Sie die Bitkombination als BCD-Zahl.
Handelt es sich um “packed code” oder “unpacked code”?

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

Kompakte Darstellung von BCD-Zahlen



Bei unpacked BCD-Darstellung sind immer vier führende Nullen zu finden!!!

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

2. Aufgabe – 2.1

Im Speicher eines Digitalrechners ist folgende Bitkombination abgelegt:

00011001 01010100 10011000 00110000.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, diese Bitkombination zu interpretieren.
Geben Sie die jeweils dazugehörenden Werte als Dezimalzahl an:

2.1 Interpretieren Sie die Bitkombination als BCD-Zahl.
Handelt es sich um “packed code” oder “unpacked code”?

00011001 01010100 10011000 00110000

Es kann sich hier nur um ”packed code” handeln, da bei keinem der vier Bytes vier führende Nullen vorhanden sind.

2. Aufgabe – 2.1

- Interpretation der Bitkombinationen:

0001	1001	0101	0100	1001	1000	0011	0000
1	9	5	4	9	8	3	0

Ergebnis: $19\,549\,830_D$

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

2. Aufgabe – 2.2

2.2 Interpretieren Sie die Bitkombinationen als 16-bit Dualzahlen.

0001 1001 0101 0100 1001 1000 0011 0000

Zusammenfassen und umwandeln von jeweils 16 Bits zu einer dezimalen Zahl:

0001 1001 0101 0100

$a_D = 2^{12} + 2^{11} + 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^2 = 6484_D$

1001 1000 0011 0000

$a_D = 2^{15} + 2^{12} + 2^{11} + 2^5 + 2^4 = 38960_D$

Hier ist eine Interpretation als negative Zahl in K2-Darstellung möglich:

Komplementbildung:

1001 1000 0011 0000 $= 0110011111001111_B + 1_B =$

$= 0110011111010000_B$

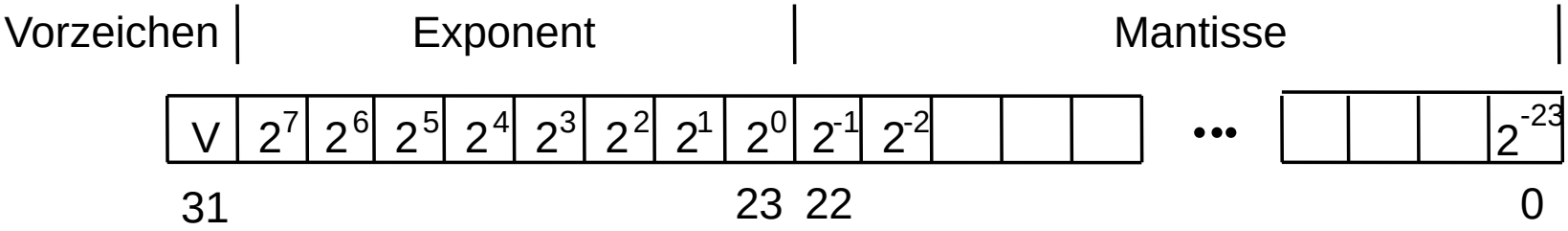
$= 26\,576_D \quad => \quad -26\,576_D$

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

2. Aufgabe – 2.3

2.3 Interpretieren Sie die Bitkombination als IEEE-Fließkommazahl.

- **Zahlendarstellung gemäß IEEE- Standard:**



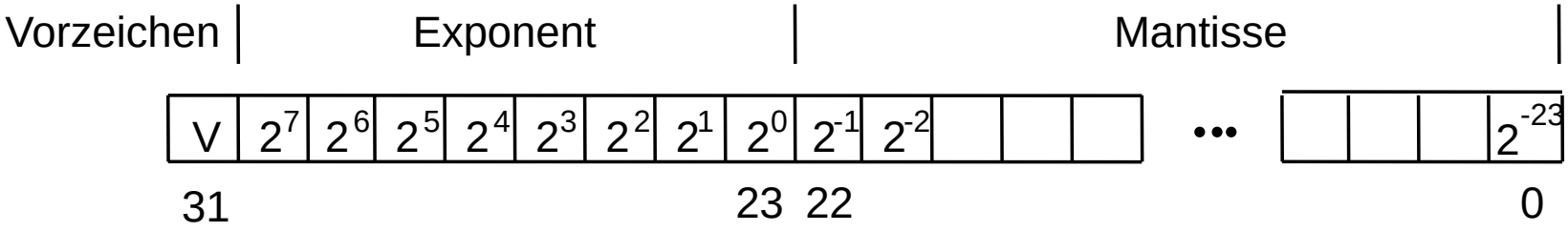
Exponent E	Mantisse M	Wert
255	≠ 0	ungültig
255	0	$-1^V \cdot \infty$
0 < E < 255	M	$-1^V \cdot 2^{E-127} \cdot (1,M)$
0	≠ 0	$-1^V \cdot 2^{-126} \cdot (0,M)$
0	0	$-1^V \cdot 0$

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

2. Aufgabe – 2.3

2.3 Interpretieren Sie die Bitkombination als IEEE-Fließkommazahl.

- **Zahlendarstellung gemäß IEEE- Standard:**



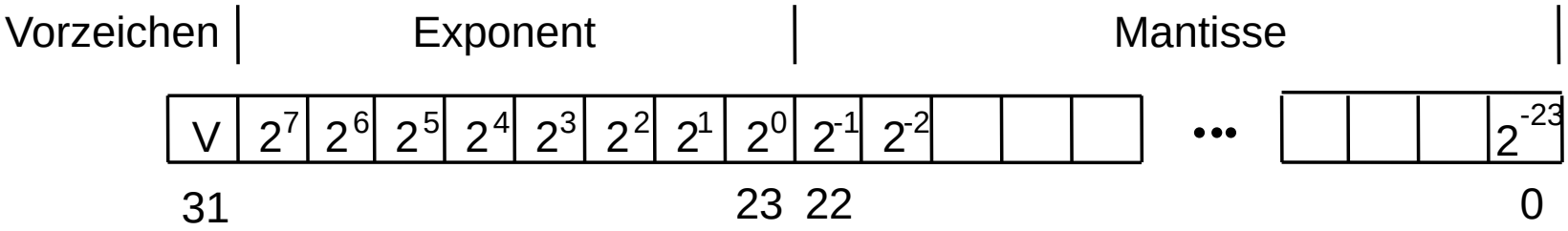
Bitkombination

00011001 01010100 10011000 00110000

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

2. Aufgabe – 2.3

2.3 Interpretieren Sie die Bitkombination als IEEE-Fließkommazahl.



Bitkombination

0 00110010 10101001001100000110000

Vorzeichen => V = 0 => positiv

Exponent => $E = 2^5 + 2^4 + 2^1 = 50$

Mantisse => $2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-5} + 2^{-8} + 2^{-11} + 2^{-12} + 2^{-18} + 2^{-19}$
$= 0{,}66089439392089843 75$

=> $(-1)^V \cdot 2^{E-127} \cdot 1{,}M = (-1)^0 \cdot 2^{50-127} \cdot 1{,}66089439392089843 75$
$= 1 \cdot 2^{-77} \cdot 1{,}66089439392089843 75$
$= 1{,}09908771371950273119850061 1483 \cdot 10^{-23}$

Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Felix Pistorius

pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

3. Aufgabe: Addition von Fließkommazahlen

3. Aufgabe

- Ein 16 bit Mikroprozessor verwendet zum Speichern großer Zahlen eine 16-Bit-Fließkommadarstellung.
- Die Zahlendarstellung erfolgt mit 1-Bit-Vorzeichen, 6-Bit-Exponent und 9-Bit-Mantisse.
- Berechnen Sie die Summe der beiden Fließkommazahlen, indem Sie beide Zahlen auf den selben Exponenten umrechnen und dann die Mantissen addieren.
- Geben Sie das Ergebnis in 16-Bit-Fließkommadarstellung an und geben Sie auch alle Zwischenschritte an.

16-Bit-Exponentialzahl = $-1^{V} \cdot 2^{(E - 31)} \cdot (1,M)$

	V	E5	E4	E3	E2	E1	E0	M8	M7	M6	M5	M4	M3	M2	M1	M0
Zahl 1: $47E1_H$																
+																
Zahl 2: 4261_H																

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

3. Aufgabe

V	E5	E4	E3	E2	E1	E0	M8	M7	M6	M5	M4	M3	M2	M1	M0
Zahl 1: $47E1_H$	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1
+ Zahl 2: 4261_H	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1

Zahl 1: $+ 2^{(35-31)} \cdot 1{,}111100001$

Zahl 2: $+ 2^{(33-31)} \cdot 1{,}001100001 = + 2^{(35-31)} \cdot 0{,}01001100001$

Addition der Mantissen:

$1{,}111100001_B$

$+ \; 0{,}01001100001_B$

$= 10{,}00111100101_B = 2^1 \cdot 1{,}000111100_B$

(Mantisse auf 9 Stellen gekürzt!)

Ergebnis: $\Rightarrow \quad + 2^{(35-31)} \cdot 2^1 \cdot 1{,}000111100$

$= + 2^{(36-31)} \cdot 1{,}000111100$

0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0

Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Felix Pistorius

pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

4. Aufgabe: Mengen

Bemerkung

- Potenzmenge: Menge aller Untermengen inkl. der Menge ø
- Kartesisches Produkt: S x T, Menge aller geordneten Paare (s,t) mit $s \in S$, $t \in T$, nicht kommutativ => $S \times T \neq T \times S$
- Leere Menge ist Untermenge jeder beliebigen Menge
- Mächtigkeit oder Kardinalität ist die Anzahl der Elemente einer Menge
- Potenzmenge P von M ist die Menge aller Untermengen der Menge M

4. Aufgabe – 4.1

- Auf der Grundmenge G = { a, b, c, d, e, 1, 2, 3 } seien zwei Mengen gegeben:
- $A = \{ x \mid x \in G, x = a \text{ oder } (x-3)^2 = 1 \text{ oder } x^3 = 27 \}$ und
- $B = \{ a, b, c, 2 \}$

4.1 Wie lauten die Elemente x der Menge A?

$(x-3)^2 = 1 \quad \Rightarrow x = 2$ oder 4 (nicht in G)
$x^3 = 27 \quad \Rightarrow x = 3$

$\Rightarrow A = \{ a , 2 , 3 \}$

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

4. Aufgabe – 4.2

- Auf der Grundmenge G = { a, b, c, d, e, 1, 2, 3 } seien zwei Mengen gegeben:

- A = { x | x ∈ G, x = a oder $(x-3)^2 = 1$ oder $x^3 = 27$ } und
- B = { a, b, c, 2 }

4.2 Bilden Sie die Potenzmengen P(A) und P(B).

A = { a , 2 , 3 }

P(A) = { { } , { a } , { 2 } , { 3 } , { a,2 } , { a,3 } , { 2,3 } , { a,2,3 } }

B = { a, b, c, 2 }

P(B)={ { } , { a } , { b } , { c } , { 2 } , { a,b } , { a,c } , { a,2 } , { b,c } ,
{ b,2 } , { c,2 } , { a,b,c } , { a,b,2 } , { a,c,2 } , { b,c,2 } , { a,b,c,2 } }

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

4. Aufgabe – 4.3

- Auf der Grundmenge G = { a, b, c, d, e, 1, 2, 3 } seien zwei Mengen gegeben:

- $A = \{ x \mid x \in G, x = a \text{ oder } (x-3)^2 = 1 \text{ oder } x^3 = 27 \}$ und
- $B = \{ a, b, c, 2 \}$

4.3 Bilden Sie die kartesischen Produkte A x B und B x A.

$A = \{ a , 2 , 3 \}$ $B = \{ a , b , c , 2 \}$

$A \times B = \{ (a, a), (a, b), (a, c), (a, 2), (2, a), (2, b), (2, c), (2, 2), (3, a), (3, b), (3, c), (3, 2) \}$

$B \times A = \{ (a, a), (a, 2), (a, 3), (b, a), (b, 2), (b, 3), (c, a), (c, 2), (c, 3), (2, a), (2, 2), (2, 3) \}$

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

4. Aufgabe – 4.4

- Auf der Grundmenge G = { a, b, c, d, e, 1, 2, 3 } seien zwei Mengen gegeben:

- $A = \{ x \mid x \in G, x = a \text{ oder } (x-3)^2 = 1 \text{ oder } x^3 = 27 \}$ und
- $B = \{ a, b, c, 2 \}$

4.4 Bilden Sie bezüglich der Grundmenge G das Komplement $C_G (A \cup B)$.

$A = \{ a, 2, 3 \}, \quad B = \{ a, b, c, 2 \}$

$C_G(A \cup B) = C_G(\{a, b, c, 2, 3\}) = \{ d, e, 1 \}$

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

4. Aufgabe – 4.5

- Auf der Grundmenge G = { a, b, c, d, e, 1, 2, 3 } seien zwei Mengen gegeben:
- $A = \{ x \mid x \in G, x = a \text{ oder } (x-3)^2 = 1 \text{ oder } x^3 = 27 \}$ und
- $B = \{ a, b, c, 2 \}$

4.5 Sind folgende Aussagen wahr oder falsch ?

a) $\{ 2, a \} \in B$ ✗ Korrektur: $\{ 2, a \} \subseteq B$

b) $a \in B \times A$ ✗

c) $\{ 2, a \} \in A \times B$ ✗ Korrektur: $(2, a) \in A \times B$

d) $\{ a, a \} \subseteq A \times B$ ✗ Korrektur: $(a, a) \in A \times B$

e) $\emptyset \subseteq P(A)$ ✓

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

4. Aufgabe

f) $\emptyset \in P(A)$ ✓

g) $\{ 2,a \} \subseteq P(B)$ ✗ Korrektur: $\{\{ 2, a \}\} \subseteq P(B)$

h) $\{ 2,a \} \in P(B)$ ✓

i) $|A \times B| = |B \times A|$ ✓

j) $|P(A \cap B)| = 2^2$ ✓

k) $| \emptyset | = 0$ ✓

l) $| P(\emptyset) | = 0$ ✗ Korrektur: $| P(\emptyset) | = 1$

m) $| P(\emptyset) | = \emptyset$ ✗

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Felix Pistorius

pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

5. Aufgabe: Relationen

Zweistellige Relationen α auf einer Menge M

- Eigenschaften:
  - reflexiv: $x \alpha x, \forall x \in M$
  - symmetrisch: aus $x \alpha y$ folgt $y \alpha x, \forall x, y \in M$
  - antisymmetrisch: aus $x \alpha y$ und $y \alpha x$ folgt $x = y, \forall x, y \in M$
  - transitiv: aus $x \alpha y$ und $y \alpha z$ folgt $x \alpha z, \forall x, y, z \in M$
- Ordnungsrelation (Zeichen: $\leq$)
  - reflexiv
  - antisymmetrisch
  - Transitiv
- Äquivalenzrelation (Zeichen: $\equiv$)
  - reflexiv
  - symmetrisch
  - transitiv
- Verträglichkeitsrelation (Zeichen: $\sim$)
  - reflexiv
  - symmetrisch
  - nicht transitiv

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

5. Aufgabe – 5.1

- Zur Auswertung der letzten DT-Klausur wurden die untenstehenden Aussagen gemacht, wobei *a* und *b* Elemente der Menge M aller Teilnehmer/innen seien.

  Bestimmen Sie Eigenschaften und Art der Aussagen:

  5.1 ”*a* hat die gleiche Note wie *b*.”

reflexiv?	✓	a α a
symmetrisch?	✓	a α b = > b α a
transitiv?	✓	a α b, b α c => a α c
antisymmetrisch?	✗	a α b, b α a ~~=>~~ a = b

=> Äquivalenzrelation

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

5. Aufgabe – 5.2

- Zur Auswertung der letzten DT-Klausur wurden die untenstehenden Aussagen gemacht, wobei *a* und *b* Elemente der Menge M aller Teilnehmer/innen seien.

  Bestimmen Sie Eigenschaften und Art der Aussagen:

  5.2 ”*a* ist mindestens so gut wie *b*.”

reflexiv?	✓	$a \alpha a$
symmetrisch?	✗	$a \alpha b \not\Rightarrow b \alpha a$
transitiv?	✓	$a \alpha b, b \alpha c \Rightarrow a \alpha c$
antisymmetrisch?	✗	$a \alpha b, b \alpha a \not\Rightarrow a = b$

=> Quasiordnung

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

5. Aufgabe – 5.3

- Zur Auswertung der letzten DT-Klausur wurden die untenstehenden Aussagen gemacht, wobei *a* und *b* Elemente der Menge M aller Teilnehmer/innen seien.

  Bestimmen Sie Eigenschaften und Art der Aussagen:

  5.3 ”*a* ist durchgefallen.”

  Es handelt sich um eine Mengenoperation: Teilmenge von M.

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

5. Aufgabe – 5.4

- Zur Auswertung der letzten DT-Klausur wurden die untenstehenden Aussagen gemacht, wobei *a* und *b* Elemente der Menge M aller Teilnehmer/innen seien.

  Bestimmen Sie Eigenschaften und Art der Aussagen:

  5.4 ”*a* und *b* liegen weniger als eine ganze Note auseinander.”

reflexiv?	✓	$a \alpha a$
symmetrisch?	✓	$a \alpha b => b \alpha a$
transitiv?	✗	$a \alpha b, b \alpha c \not\Rightarrow a \alpha c$
antisymmetrisch?	✗	$a \alpha b, b \alpha a \not\Rightarrow a = b$

=> Verträglichkeitsrelation

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016

5. Aufgabe – 5.5

- Zur Auswertung der letzten DT-Klausur wurden die untenstehenden Aussagen gemacht, wobei *a* und *b* Elemente der Menge M aller Teilnehmer/innen seien.

  Bestimmen Sie Eigenschaften und Art der Aussagen:

  5.5 ”*a* behauptet, die Klausur sei zu schwer gewesen.”

  Es handelt sich um eine Mengenoperation:

  Teilmenge von M, typischerweise eine leere Menge ☺

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2016