Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Fabian Kempf

kempf@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

Digitaltechnik

1. Übung

Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Fabian Kempf

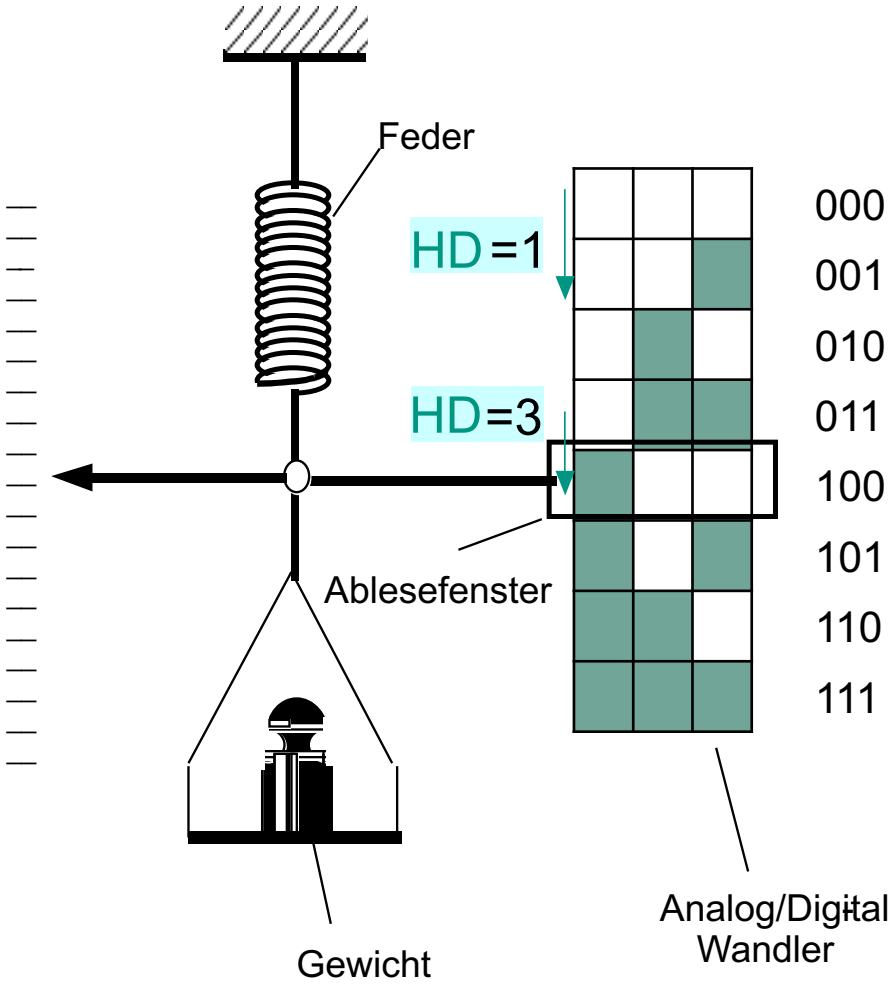
kempf@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

Signale und Digitalisieurng

Überlegung



- Annahme:

  Binärstellen schalten nicht völlig gleichzeitig um

- Mögliche fehlerhafte Binärdarstellungen während des Umschaltens:

- 011 $\Rightarrow$ 100
- 111,001,010,101,110,000

Gray-Code

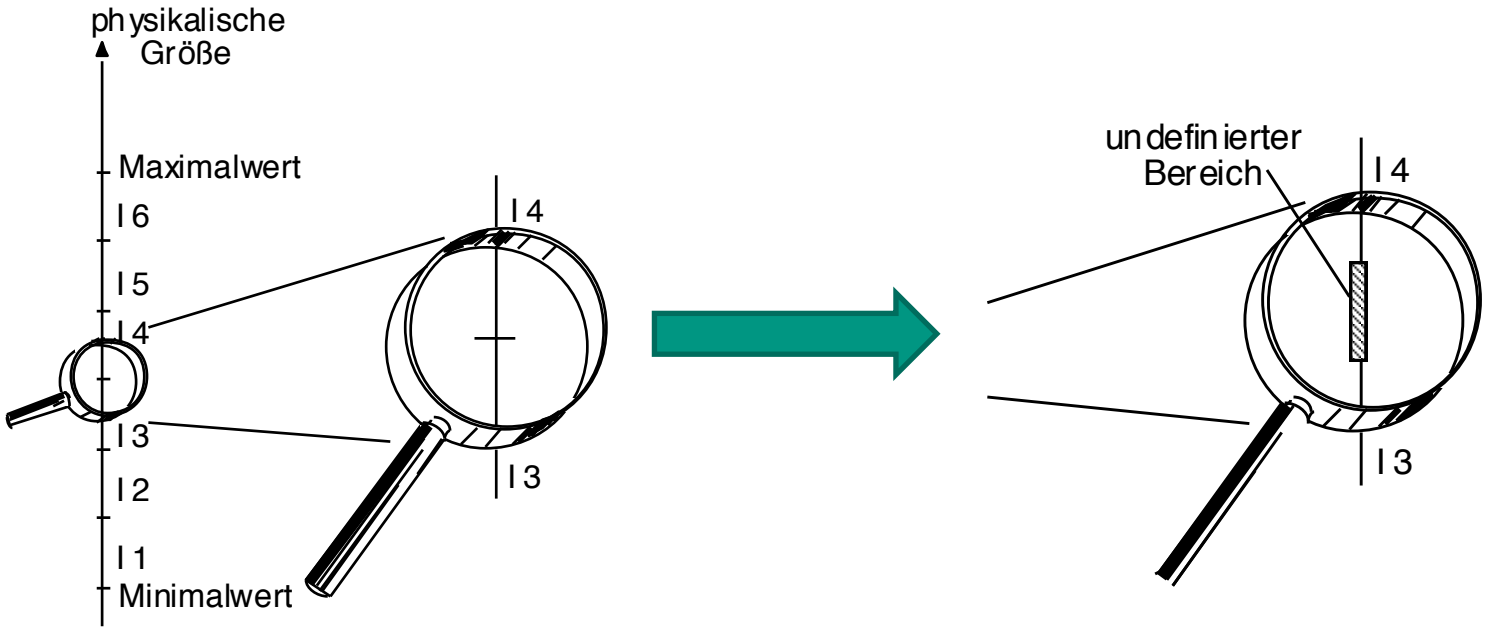
- Das Problem kann umschifft werden durch einschrittige Codes
- zwei benachbarte Codewörter besitzen stets eine Hammingdistanz von eins
- Beispiele für Gray-Codes (stetige, einschrittige Binärcodes):

linear, m=4	**Zyklisch, m=3**
0: 0000	0: 000
1: 0001	1: 001
2: 0011	2: 011
3: 0010	3: 010
4: 0110	4: 110
5: 0111	5: 111
6: 0101	6: 101
7: 0100	7: 100
8: 1100	0: 000
9: 1101	

- Während des Umschaltens sind keine fehlerhaften Übergänge in andere Codewörter mehr möglich

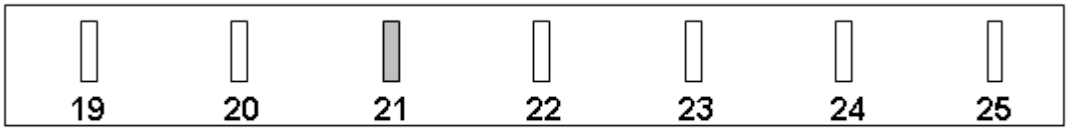
„weiche“ Diskrimination

- An den Übergängen zweier Codewörter können undefinierte Bereiche eingefügt werden
- keine Digitalwertzuordnung in diesen Bereichen; sondern „Festhalten“ des alten Werts, bis der Bereich durchschritten wurde
- „weiche“ Diskrimination (Unterscheidung), kein hartes Umschalten



1. Aufgabe

Für die Anzeige der Wassertemperatur eines Schwimmbads stehe ein Display zur Verfügung. Die Anzeige erlaubt die Darstellung von Temperaturen im Bereich von 19 – 25º C auf 1º C genau.



- **1.1** Ordnen Sie den Anzeigewerten sinnvolle Temperaturintervalle zu
- **1.2** Wie viele Binärstellen sind zur Codierung mindestens notwendig, wenn für das Über– bzw. Unterschreiten des Anzeigebereichs ein Codewort benötigt wird, mit dem die Anzeige abgeschaltet wird. Codieren sie die Intervalle so, dass nur einschrittige Übergänge entstehen.
- **1.3** Der Temperaturfühler liefert ein Signal, das um 0,4% vom tatsächlichen Wert (in ºC) abweichen kann. Bestimmen Sie die undefinierten Bereiche der Digitalwertzuordnung. Wie groß kann die maximale Differenz zwischen angezeigtem und tatsächlichem Wert sein?

1. Aufgabe

- Undefinierte Bereiche: Intervallgrenze (in ° C) · 0,4% · 2

Anzeige	Intervalle	Code	undef. Bereich
Aus	< 18,5°	100	
			0,148°
19 °C	18,5° - 19,5°	000	
			0,156°
20 °C	19,5° - 20,5°	001	
			0,164°
21 °C	20,5° - 21,5°	011	
			0,172°
22 °C	21,5° - 22,5°	010	
			0,180°
23 °C	22,5° - 23,5°	110	
			0,188°
24 °C	23,5° - 24,5°	111	
			0,196°
25 °C	24,5° - 25,5°	101	
			0,204°
Aus	> 25,5°	100	

- Max. Abweichung bei 25° Anzeige und 25,602° gemessener Wert
  → $\Delta T_{Fmax} = 0{,}602°\ C$

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2017

2. Aufgabe (Klausuraufgabe WS1998/99)

- **2.1** Es soll ein analoges Signal in ein 4-wertiges Digitalsignal umgewandelt werden. Der Eingangsspannungsbereich des Analogsignals beträgt 0-10Volt. Der undefinierte Bereich zwischen zwei Digitalwerten soll 1/3 des Intervalls eines Digitalwertes betragen. Geben Sie die Intervalle für die digitalisierten Werte an.

- **2.2** Zeichnen Sie den Verlauf des digitalisierten Signals in das Schaubild ein. Führen Sie eine wertdiskrete Digitalisierung durch. Beim Verlassen eines Werteintervalls soll der digitalisierte Wert solange erhalten bleiben, bis das analoge Signal in das nächste Werteintervall eintritt. Führen Sie anschließend eine wert- und zeitdiskrete Digitalisierung durch. Die Abtastzeitpunkte sind dabei synchron zu den eingezeichneten Gitterlinien.

2. Aufgabe – 2.1

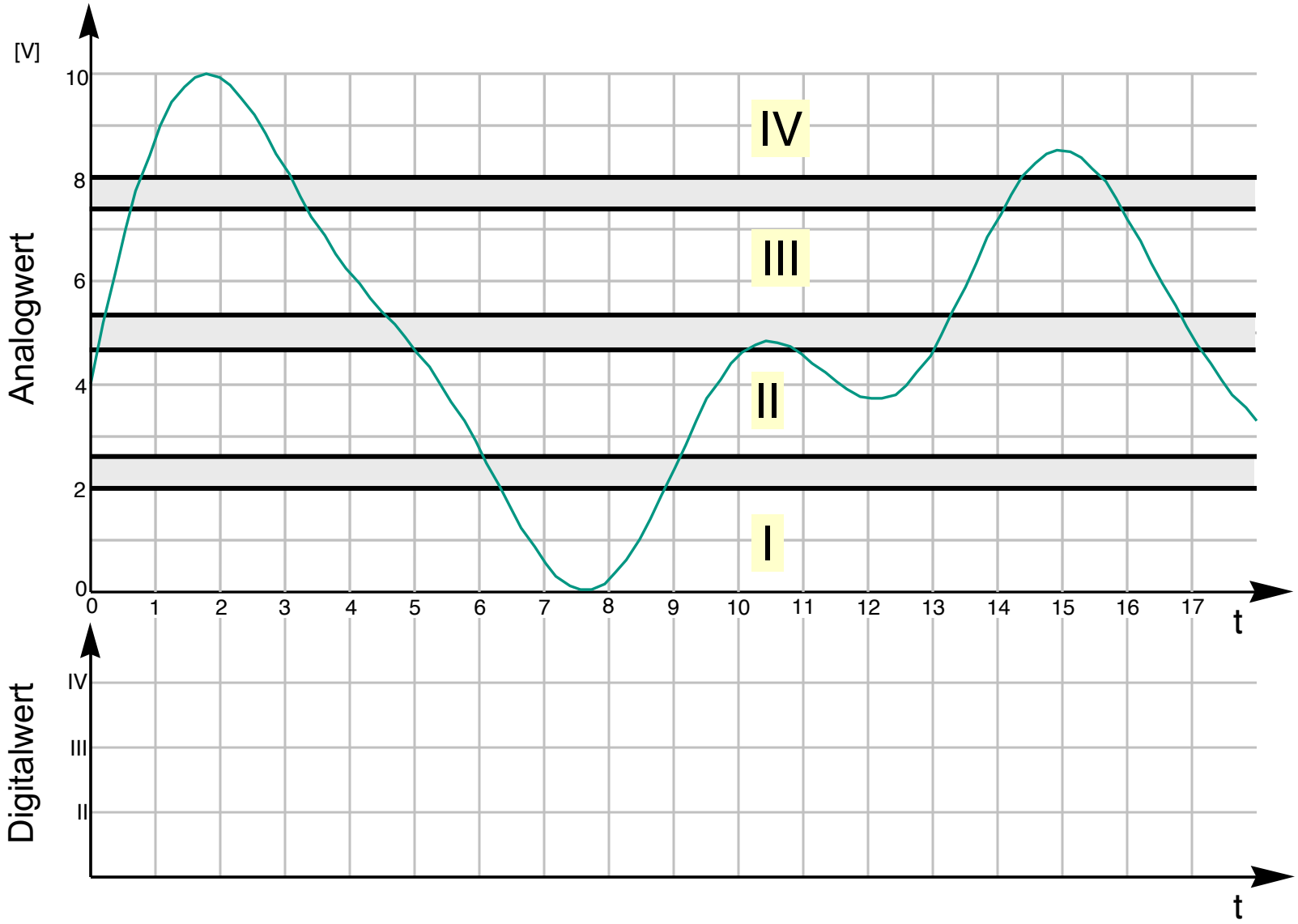
- Gegeben: 4-wertiges Digitalsignal zwischen 0-10 Volt
  undefinierte Bereich soll 1/3 eines Intervalls betragen
- Gesucht: Größe eines Intervalls

$$\frac{1}{3} * 3 * x + 4 * x = 10V$$

$$\frac{10}{5} V = x = 2V \qquad \Rightarrow \frac{1}{3} * 2\,V = 0{,}6666\text{V}$$

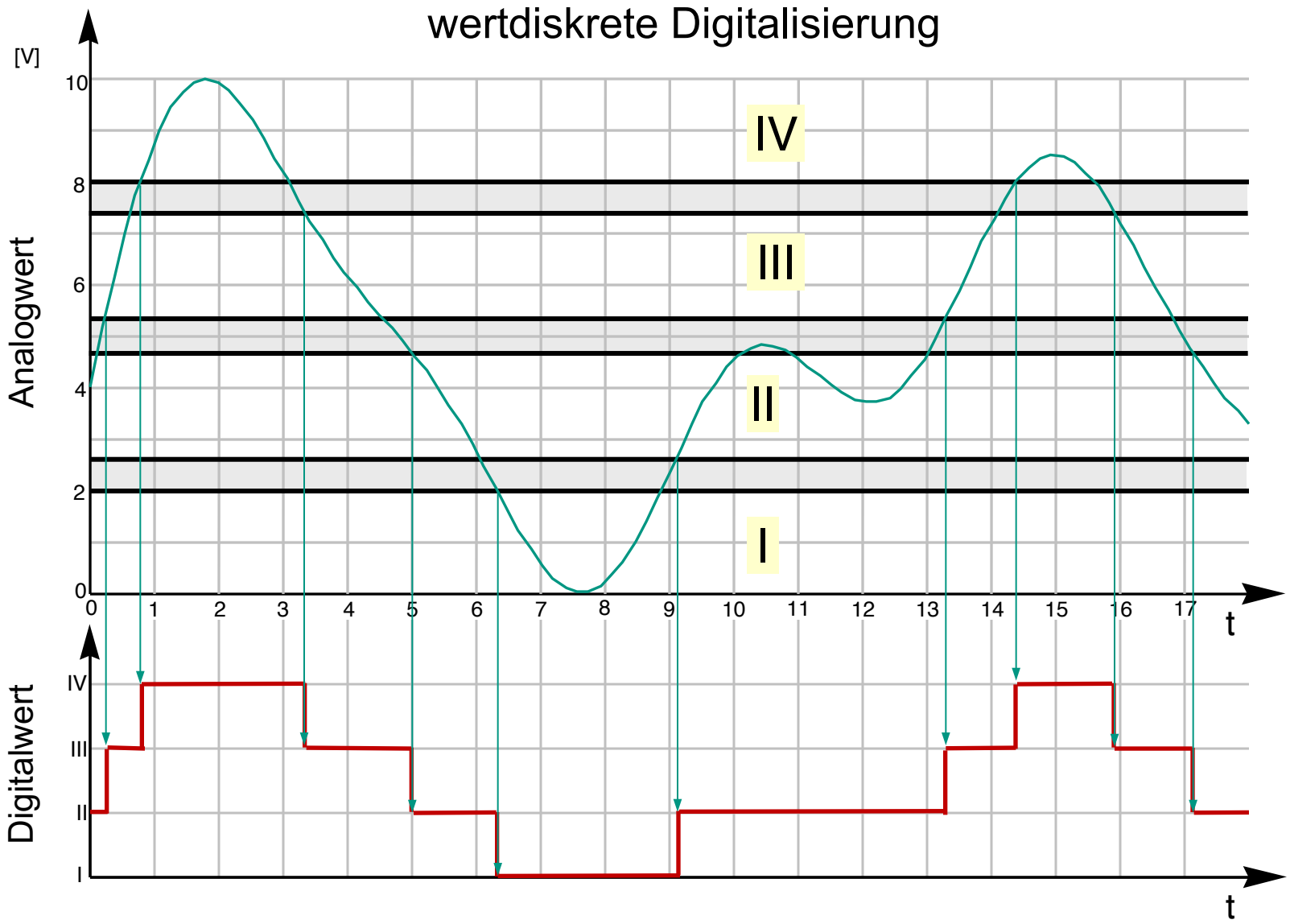
- Es ergeben sich also folgende Intervall Größen:
  1. Digitalwert Bereich 0V – 2V
     - Undefinierter Bereich: 2V – 2,6666V
  2. Digitalwert Bereich 2,66666V – 4,66666V
     - Undefinierter Bereich: 4,6666V – 5,3333V
  3. Digitalwert Bereich 5,33333V – 7,33333V
     - Undefinierter Bereich: 7,3333V – 8V
  4. Digitalwert Bereich 8V – 10V

2. Aufgabe – 2.1



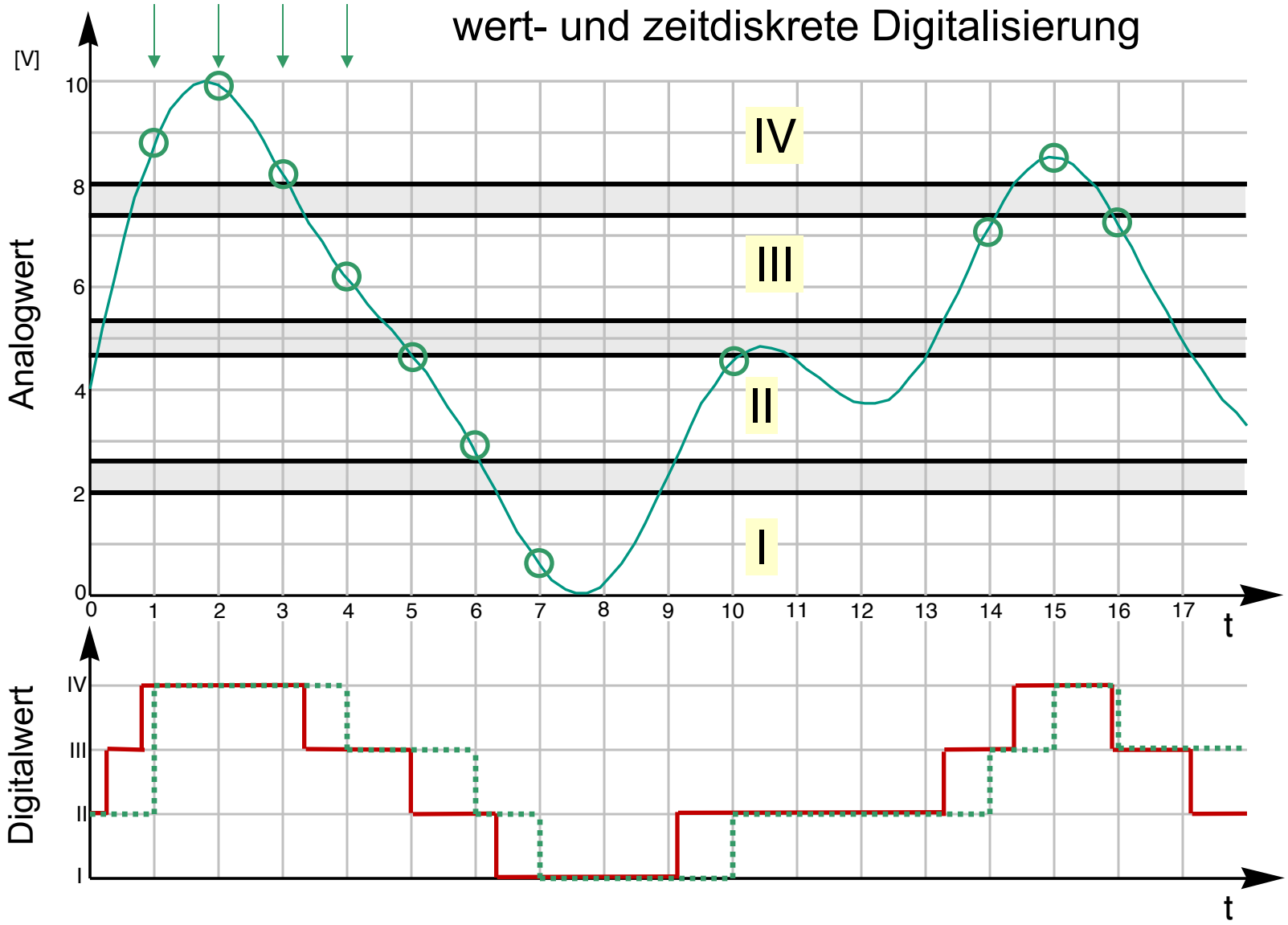
KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2017

2. Aufgabe – 2.2



KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2017

2. Aufgabe – 2.2



KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2017

Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Fabian Kempf

kempf@kit.edu

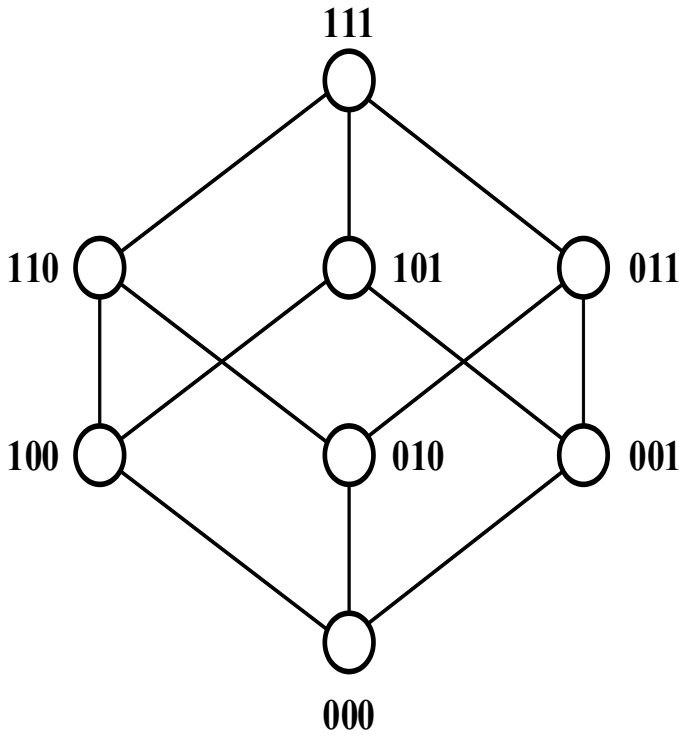
Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

Fehlererkennung und -korrektur

Überlegung

- Das nachfolgende Bild zeigt ein Hasse-Diagramm, das die Nachbarschaftsbeziehungen für einen Code mit drei Binärstellen darstellt.



KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2017

Codes für Fehlererkennung

- **Problem in der Praxis**
  Störeinflüsse können bei der Übertragung oder Speicherung von binär kodierten Informationen den Wert der zur Darstellung verwendeten physikalischen Größe verfälschen → Bits „kippen“

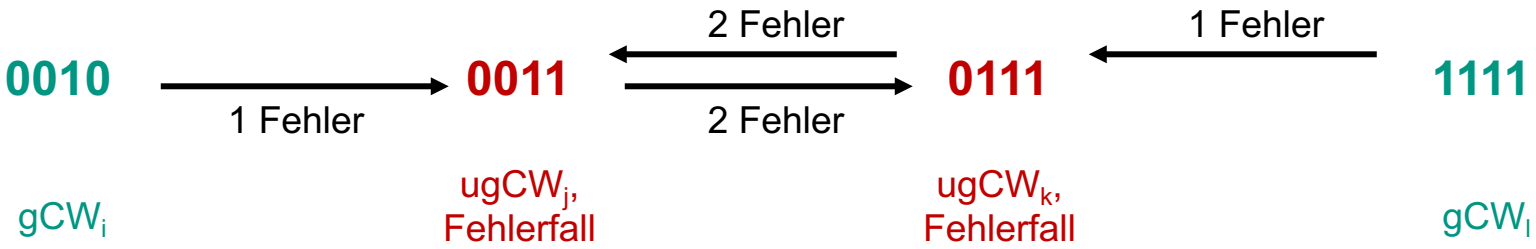
- **Lösung:** unbenutzte Codewörter (CW) „geschickt“ nutzen

- einzelne Bitfehler (1 Bit “kippt“) sind erkennbar bei Codes mit minimaler Hammingdistanz HDmin = 2

  → jeder denkbare Bitfehler führt zu ungültigem (d.h. unbenutztem) Codewort

Fehlererkennung / Fehlerkorrektur

- **2-Fach Fehlererkennung:**



- **1-Fach Fehlerkorrektur:**

- **Es gilt** Bei Codes mit HDmin = 3:
  → Zweifachfehler erkennbar oder Einfachfehler korrigierbar

(minimale) Hamming-Distanz

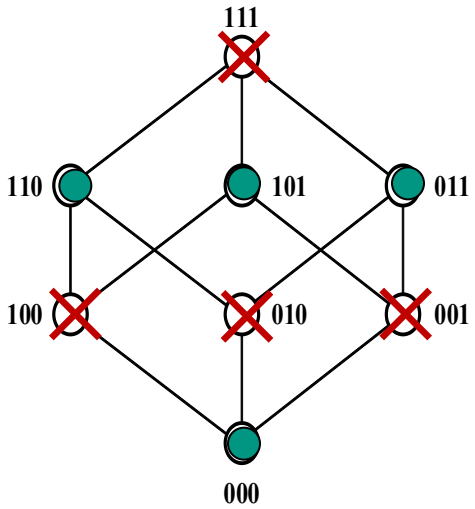
- **Definition:** Hammingdistanz **HD** (auch Hammingabstand genannt)
  - HD_{ij} = Anzahl der Stellen, an denen sich CW_i und CW_j unterscheiden.
- **Definition**: Minimale Hammingdistanz **HDmin** eines Codes
  - $HD_{min}(X) = \min\{HD_{ij} \mid CW_i, CW_j \in X \wedge CW_i \neq CW_j\}$
    = minimale Hammingdistanz, die beim Vergleich aller Codewörter CW_i und CW_j (mit $CW_i \neq CW_j$) auftritt
- Die minimale Hammingdistanz ist eine entscheidende Eigenschaft eines Codes, um Übertragungsfehler erkennen und korrigieren zu können:
- Bei gegebenem $h = HD_{min}(X)$ sind
  - **h – 1** Bitfehler **erkennbar** und
  - **k < h / 2** Bitfehler **korrigierbar**

3. Aufgabe – 3.1

- **3.1** Welche Hamming–Distanz müssen die gültigen Codeworte aufweisen, damit Einzelfehler erkannt werden können?
- Wie viele Zeichen können so mit drei Binärstellen maximal codiert werden?

$\Rightarrow$ Für die Erkennung wird eine Hamming–Distanz (HD) von 2 benötigt.

N=3

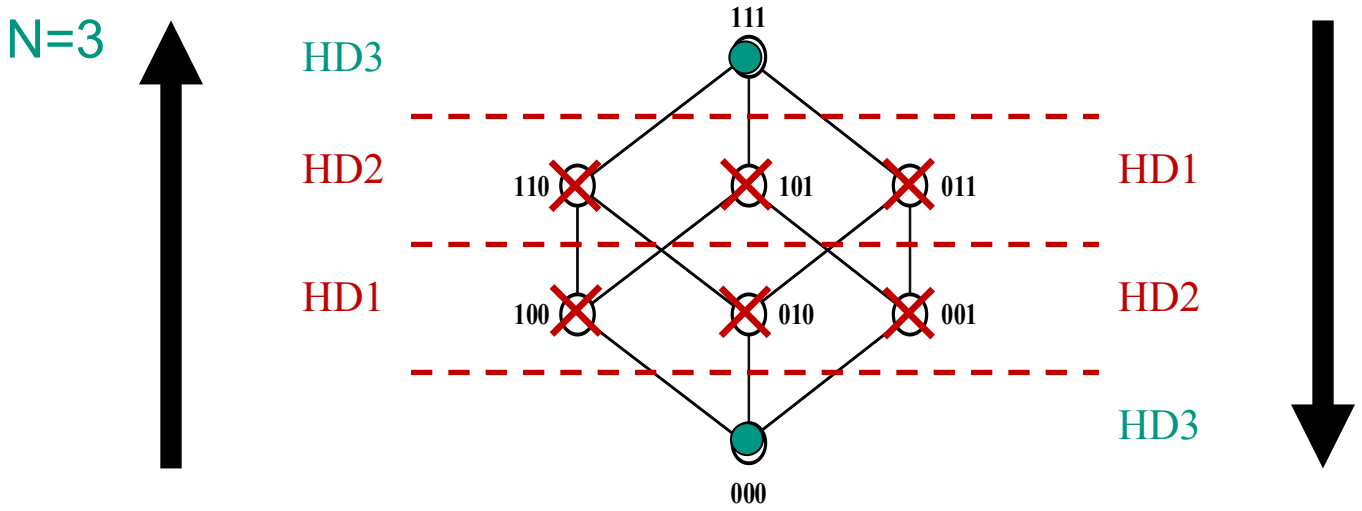


$\Rightarrow$ man erhält damit maximal 4 codierbare Zeichen.

3. Aufgabe – 3.2

- **3.2** Welche Hamming–Distanz müssen die gültigen Codeworte aufweisen, damit die Korrektur von Einzelfehlern möglich ist?
- Wie viele Zeichen können jetzt maximal codiert werden?

⇒ Für die Korrektur wird eine Hamming–Distanz von 3 benötigt;



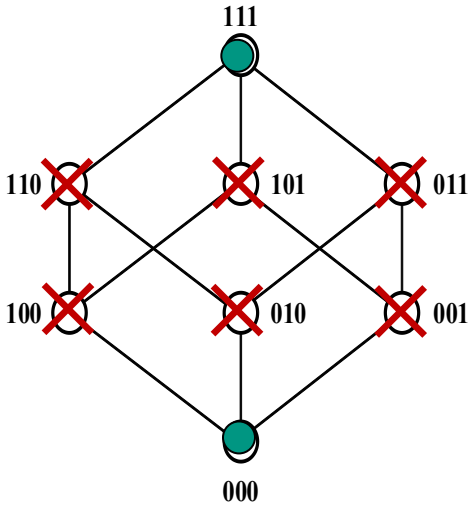
⇒ dann erhält man maximal 2 codierbare Zeichen.

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2017

3. Aufgabe – 3.3

- **3.3** Die beiden Zeichen A und B sollen so codiert werden, dass Einzelfehler korrigierbar sind.
- Wie viele Lösungen sind für die Codierung der beiden Zeichen mit drei Binärstellen möglich? Geben Sie eine Lösung an.

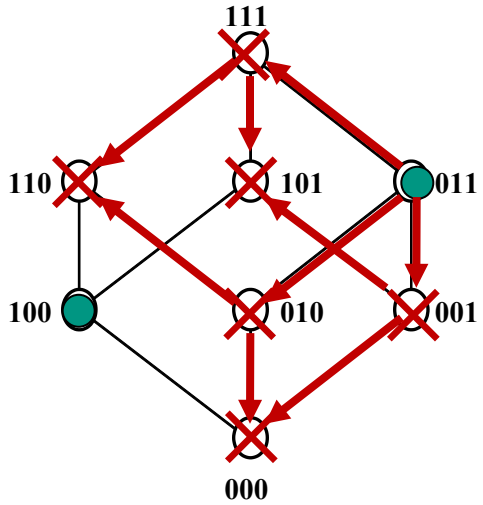
Eine mögliche Lösung:



HD = 3

z. B. **A=**000, **B=**111

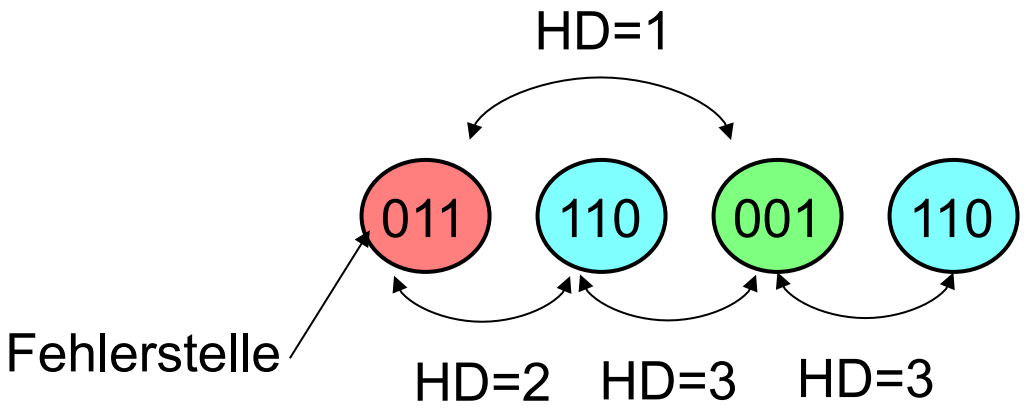
Eine andere mögliche Lösung:



Es sind insgesamt 8 Lösungen möglich

3. Aufgabe

- **3.4** Bei der Datenübertragung mit einer Codierung nach 3.3 wurde genau eine Binärstelle falsch übertragen.
- Die folgenden Daten wurden empfangen: 011110 001110
  Korrigieren Sie den Fehler.

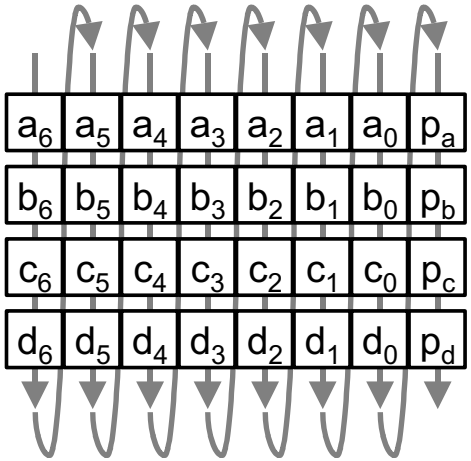


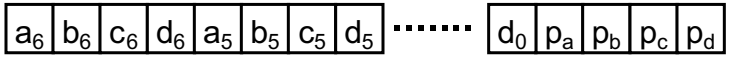
Korrektur: 011 $\Rightarrow$ 001

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2017

4. Aufgabe - Überlegung

- **4.1** Für die Übertragung von ASCII-Zeichen über eine störanfällige Übertragungsstrecke soll eine sogenannte Blocksicherung mit Paritätsbits verwendet werden. Dazu wird jedes ASCII-Zeichen um ein Paritätsbit ergänzt. Für die Übertragung von jeweils 4 Zeichen werden dann zuerst alle höchstwertigen Bits übertragen, dann die niederwertigeren.
  Wie viele Fehler sind bei dieser Art der Übertragung maximal erkennbar?

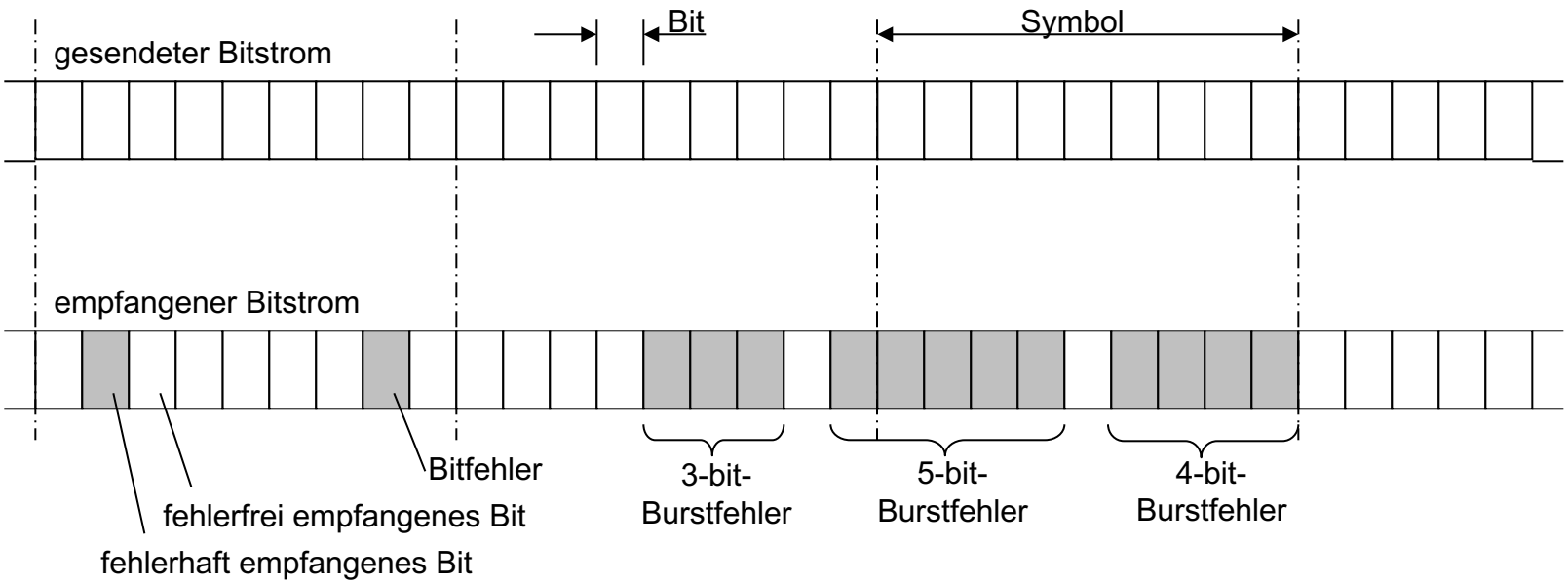




KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2017

Überlegung

- Fehlerschutz umfasst **Fehlererkennung** und **Fehlerkorrektur**
- **Schutzwirkung** wird durch **Codierung** realisiert
- Unterscheidung abhängig von Lage und Menge fehlerhaft empfangener Bits: **Bitfehler, Burstfehler und Symbolfehler** können innerhalb des übertragenen Bitstroms auftreten



KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2017

Fehlererkennung durch Parität

- Erklärung des **Paritätsbit** am Beispiel

Dezimal	Binär	gerade Parität	ungerade Parität
0	0000	0000 **0**	0000 **1**
1	0001	0001 **1**	0001 **0**
2	0010	0010 **1**	0010 **0**
3	0011	0011 **0**	0011 **1**
4	0100	0100 **1**	0100 **0**
5	0101	0101 **0**	0101 **1**
6	0110	0110 **0**	0110 **1**
7	0111	0111 **1**	0111 **0**
8	1000	1000 **1**	1000 **0**
9	1001	1001 **0**	1001 **1**
Fehler:	1001	10**1**1 **0**	10**1**1 **1**

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2017

Fehlerkorrektur durch Blocksicherung

- Das Prinzip der Paritätssicherung ist zweidimensional anwendbar
  → Blocksicherungsverfahren mit doppelter Quersummenergänzung
- Nachricht wird in Blöcke von n Codewörtern mit Paritätsbit eingeteilt
  - zusätzlich: am Ende jedes Blocks ein weiteres Codewort einfügen
    → enthält alle Paritätsbits der Spalten
- bei Auftreten von Einfachfehlern lassen sich Spalte und Zeile eindeutig ermitteln:
  → Einfachfehler sind damit korrigierbar
  → gleichzeitig sind noch **weitergehende Fehlererkennungsverfahren** möglich: **Bündelstörung** erkennbar
- **Bündelstörung:** zeitlich konzentrierte Fehler, d.h. über einen Zeitraum ist die Verbindung gestört, können erkannt bzw. behoben werden

Blocksicherung mittels Paritätsbits

- Zusammenfassung **mehrerer** Codeworte zu einem Block
- Hinzufügen eines **Prüfwortes** (Spaltenparitäten) an jeden Block

Ziffer	Codewörter mit gerader Parität				
5	0	1	0	1	0
4	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1
3	0	0	1	1	0
9	1	0	0	1	0
8	1	0	0	0	1
Prüfwort	0	0	1	0	1

Zeile mit Fehler
(ungerade Parität)

Spalte mit Fehler
(ungerade Parität)

- Einfachfehlerkorrektur: Spalte und Zeile **eindeutig** ermittelbar
- Mehrfachfehler: ggf. nicht ermittelbar oder erkennbar

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2017

Fehlererkorrektur durch Blocksicherung

- Beispiel — Falsches Paritätsbit

Ziffer	Codewörter mit gerader Parität				
5	0	1	0	1	0
4	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
3	0	0	1	1	0
9	1	0	0	1	0
8	1	0	0	0	1
Prüfwort	0	0	1	0	1

Zeile mit Fehler (ungerade Parität)

Spalte mit Fehler (ungerade Parität)

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2017

Fehlererkorrektur durch Blocksicherung

- Beispiel Mehrfachfehler (erkennbar)

Ziffer	Codewörter mit gerader Parität				
5	0	1	0	1	0
4	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
3	0	0	1	1	0
9	1	0	0	1	0
8	1	1	0	0	1
Prüfwort	0	0	1	0	1

Zeilen mit Fehler (ungerade Parität)

Spalten mit Fehler (ungerade Parität)

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2017

Fehlererkorrektur durch Blocksicherung

- Beispiel — Mehrfachfehler (nicht erkennbar)

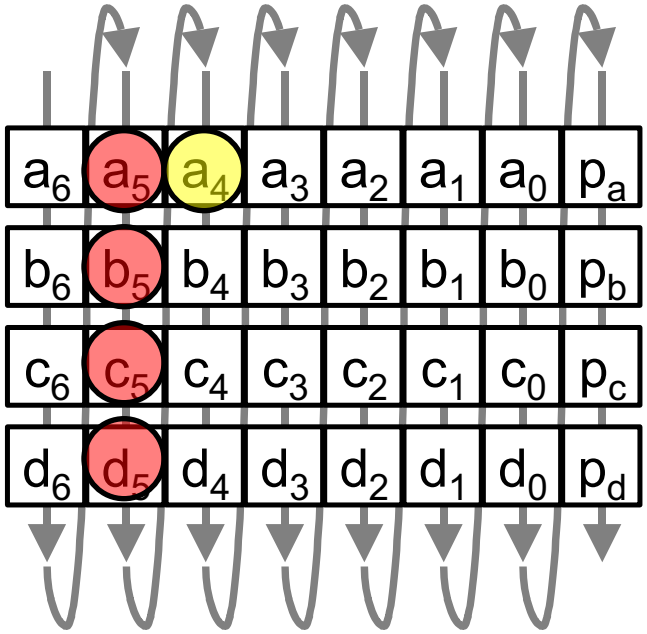
Ziffer	Codewörter mit gerader Parität				
5	0	1	0	1	0
4	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
3	0	0	1	1	0
9	1	0	0	1	0
8	1	1	0	1	1
Prüfwort	0	0	1	0	1

Spalten mit 2 Fehlern
(gleichbleibende, gerade Parität)

Zeilen mit 2 Fehlern
(gleichbleibende, gerade Parität)

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2017

4. Aufgabe – 4.1



Mit einem Paritätsbit =>
1 Fehler pro Wort/Zeile erkennbar

Sequentielle Übertragung =>
1 Fehler pro Wort(8 Bit)

Umordnung =>
4 Fehler am Stück pro Block
(32 Bit) erkennbar

Bei 5 Fehlern ist keine Erkennung möglich !!!

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2017

4. Aufgabe – 4.2

- **4.2** Mit welcher Datenübertragungsrate (in bit/s) dürfen die Daten übertragen werden, wenn Störungen von 1ms Dauer auftreten können und diese sicher erkannt werden müssen?

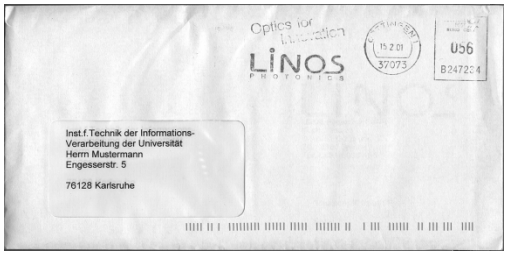
maximal 4 Fehler am Stück erkennbar

=> max. 4 Bits pro ms

=> Maximale Datenübertragungsrate 4000bit/s

5. Aufgabe

- Zur maschinenlesbaren Codierung von Briefen verwendet die Deutsche Post einen Strichcode aus fluoreszierender Farbe. Der Strichcode benutzt zur Codierung der Postleitzahl einen 3-aus-5 Code, bei dem eine 1 durch einen senkrechten Strich dargestellt wird. Bei einer 0 wird kein Strich aufgedruckt. Zudem befinden sich auf dem folgenden Beispiel noch zusätzliche posttechnische Codes.



Strukturierte Codes

- Allgemein: Codes legen fest, wie Codewörter zu interpretieren sind
- Beispiel: Strukturierter Code
  - Anzahl Wörter im (2 aus 5)-Code: $N = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$
  - m = 5 k = 2
- Folgende Codewörter sind möglich:

00011	00110	01010	10001	10100
00101	01001	01100	10010	11000

- Der (2 aus 5)-Code eignet sich mit seinen 10 Codewörtern besonders zur Darstellung von Dezimalziffern

Aufgabe 5 – 5.1

- **5.1** Wie viele verschiede Codeworte können Sie mit einem 3-aus-5 Code darstellen? Geben Sie auch die allgemeine Formel für einen n-aus-m Code an.
  - Anzahl Wörter im (3 aus 5)-Code: $N = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$
- **5.2** Erstellen Sie nun eine Codierung für die Ziffern von 0 bis 9 im 3-aus-5 Code. Weisen Sie dabei den Ziffern die Codeworte derart zu, dass die niederwertigere Ziffer mit einem Codewort mit dem geringeren dualen Wert codiert ist.

Ziffer	Codewort		Ziffer	Codewort
0	00111		5	10101
1	01011		6	10110
2	01101		7	11001
3	01110		8	11010
4	10011		9	11100

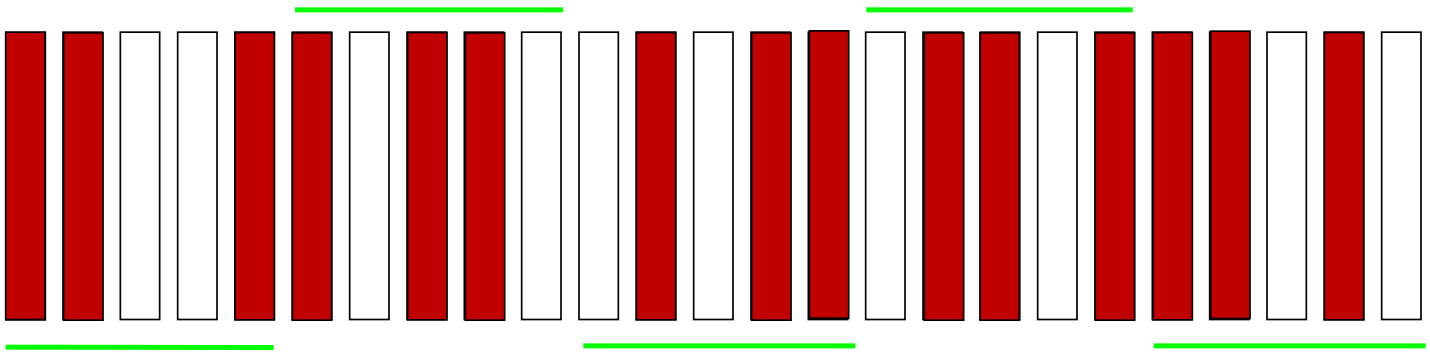
- **5.3** 76128 => 11001 10110 01011 01101 11010

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2017

5. Aufgabe – 5.4

- **5.4** Zeichnen Sie den Strichcode für die Postleitzahl 76128 in das vorgegebene Raster ein.

7	6	1	2	8
11001	10110	01011	01101	11010



KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2017

5. Aufgabe – 5.5

Damit Fehler, die beim Lesen der Briefe auftreten erkannt werden können, wird die Postleitzahl vor der 3-aus-5 Codierung um eine weitere Stelle ergänzt. Der Wert dieser Stelle wird nun so bestimmt, dass die niederwertige Stelle der Quersumme über alle Ziffern gleich 0 wird.

- **5.5** Bestimmen Sie die Prüfziffer für die Postleitzahl 10178, damit Ihre Briefe an das Bundeskanzleramt auch zuverlässig ankommen.

1	0	1	7	8	**3**

$1 + 0 + 1 + 7 + 8 = 17$

$17 + x = 20 \Rightarrow x = 3$

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2017

5. Aufgabe

- **5.6** Nun sind vier Postleitzahlen nach dem oben genannten Verfahren codiert worden. Welche der Postleitzahlen sind korrekt, welche sind fehlerhaft?

1	2	3	4	5	5	✓	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 5 = 20
5	0	2	2	3	2	f	5 + 0 + 2 + 2 + 3 + 2 = 14
6	8	1	2	0	9	f	6 + 8 + 1 + 2 + 0 + 9 = 26
7	6	2	2	8	5	✓	7 + 6 + 2 + 2 + 8 + 5 = 30

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2017