

Fabian Kempf

kempf@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

Digitaltechnik

4. Übung

Fabian Kempf

kempf@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

Fließkommazahlen

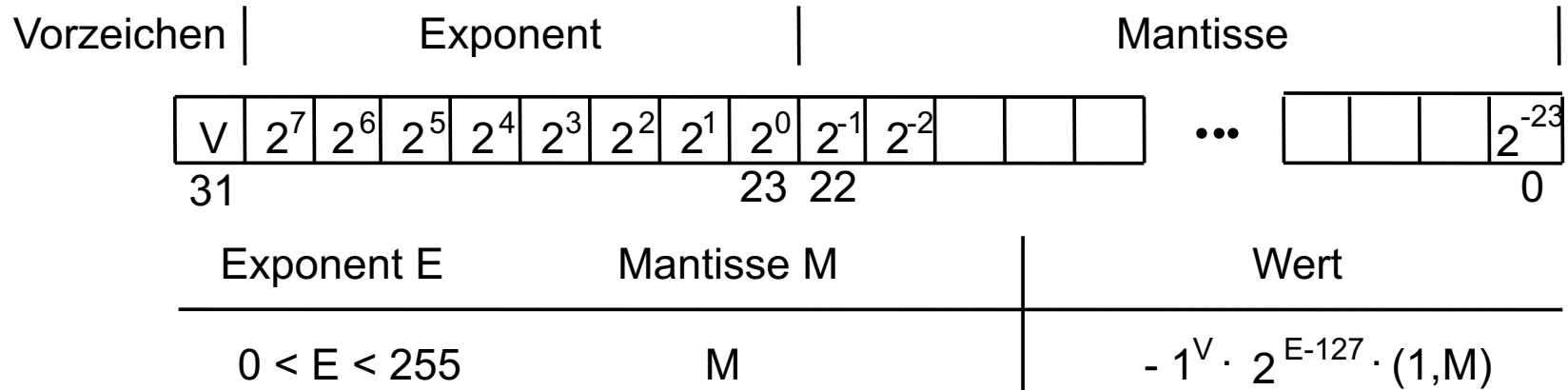
■ Zahendarstellung gemäß IEEE- Standard:

Vorzeichen										Exponent										Mantisse									
V	2 ⁷	2 ⁶	2 ⁵	2 ⁴	2 ³	2 ²	2 ¹	2 ⁰	2 ⁻¹	2 ⁻²										...									2 ⁻²³
31										23 22										0									
Exponent E										Mantisse M										Wert									
255										≠ 0										ungültig									
255										0										- 1 ^V · ∞									
0 < E < 255										M										- 1 ^V · 2 ^{E-127} · (1,M)									
0										≠ 0										- 1 ^V · 2 ⁻¹²⁶ · (0,M)									
0										0										- 1 ^V · 0									

■ Vergleich:

- Die Masse der Erde: $5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
- Die Masse eines Elektron: $9,109\,383\,56 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

■ Zahldarstellung gemäß IEEE- Standard:



■ Die Mantisse ist die Kommazahl, die mit der Basis hoch dem Exponenten multipliziert wird

■ Durch die negativen Wertigkeiten werden reelle Zahlen ermöglicht

■ $1 * 2^{-1} = 1/2^1 = 1/2 = 0,5$

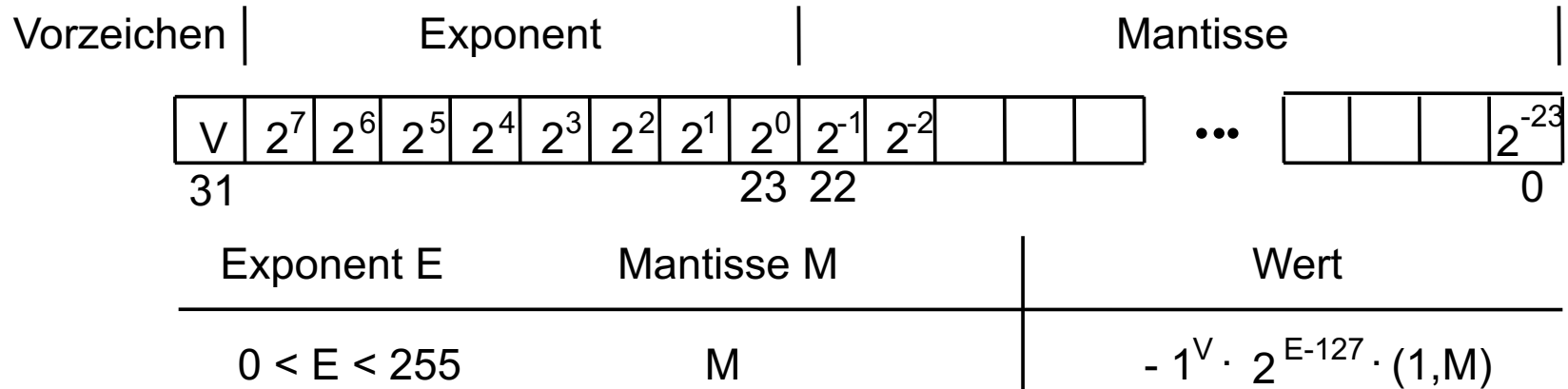
■ $1 * 2^{-2} = 1/2^2 = 1/4 = 0,25$

■ $0 * 2^{-1} + 1 * 2^{-2} + 1 * 2^{-3} = 0/2^1 + 1/2^2 + 1/2^3 = 0/2 + 1/4 + 1/8 = 0,375$

■ Die Anzahl der Bits der Mantisse legt die Genauigkeit der Zahl fest

■ Im IEEE-Standard bis 2^{-23} ($= 1/8.388.608 = 0,00000011920928955078125$)

■ Zahldarstellung gemäß IEEE- Standard:



- Der Exponent ermöglicht sehr große als auch sehr kleine Zahlen
(Vergleich: $1 \cdot 10^{(-)9} = 1 \text{ Million(stel)}$ im Dezimalsystem)

■ Warum 2^{E-127} ?

- IEEE-Standard sieht 8 Bit für den Exponenten vor.
- Bei 8 Bit $\rightarrow 2^8 = 256$ Möglichkeiten $\rightarrow$ Wertebereich $[0, 255]$
 - 0 und 255 sind für Spezialfälle reserviert
 - Bleibt ein Wertebereich von $[1, 254] \rightarrow 254 / 2 = 127$
 - $E - 127$ ist also bei 8 Bit für sehr kleine als auch sehr große Zahlen optimal

Beispiel (1)

■ Wandeln Sie $241,17578125_D$ in eine Fließkommazahl um

1. Schritt: die Zahl beim Komma auftrennen $\rightarrow 241,0_D + 0,17578125_D$
2. Schritt: 241_D in eine Binärzahl umwandeln

$$241 / 2 = 120$$

$$120 / 2 = 60$$

$$60 / 2 = 30$$

$$30 / 2 = 15$$

$$15 / 2 = 7$$

$$7 / 2 = 3$$

$$3 / 2 = 1$$

$$1 / 2 = 0$$

Rest 1

Rest 0

Rest 0

Rest 0

Rest 1

Rest 1

Rest 1

Rest 1

$$2^0 = 1$$

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 4$$

$$2^3 = 8$$

$$2^4 = 16$$

$$2^5 = 32$$

$$2^6 = 64$$

$$2^7 = 128$$

$$\rightarrow 241_D = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0_B$$

Beispiel (2)

3. Schritt: $0,17578125_D$ in eine Binärzahl umwandeln

<u>0</u> ,17578125 * 2 =		$2^0 = 1$
<u>0</u> ,35156250 * 2		$2^{-1} = 1/2$
0,70312500 * 2	Rest 0	$2^{-2} = 1/4$
<u>1</u> ,40625000 * 2	Rest 1	$2^{-3} = 1/8$
0,81250000 * 2	Rest 0	$2^{-4} = 1/16$
<u>1</u> ,62500000 * 2	Rest 1	$2^{-5} = 1/32$
<u>1</u> ,25000000 * 2	Rest 1	$2^{-6} = 1/64$
0,50000000 * 2	Rest 0	$2^{-7} = 1/128$
<u>1</u> ,00000000 * 2	Rest 1	$2^{-8} = 1/256$

$$\rightarrow 0,17578125_D = 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} + 1 \cdot 2^{-6} + 0 \cdot 2^{-7} + 1 \cdot 2^{-8}_B$$

7. In Fließkommaformat $-1^V * 2^{E-127} * (1,M)$ darstellen

0 | 10000110 | 111000100101101 000000 ...

Fabian Kempf

kempf@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

1. Aufgabe: Mengen und Relationen

1. Aufgabe

- Auf der Menge $M = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$ sei eine Verträglichkeitsrelation folgendermaßen definiert: $a \alpha b$ wenn a und b ein kgV (kleinstes gemeinsames Vielfaches) besitzen, das kleiner als 15 ist. ($a, b \in M$)
- 1.1 Weisen Sie für α die Eigenschaften einer Verträglichkeitsrelation nach!

Die Verträglichkeitsrelation „ $\sim$ “

- Folgende Eigenschaften der Relation müssen nachgewiesen werden:
 - **Reflexivität:** $x \sim x$
 - „jedes Element ist mit sich selbst verträglich“
 - **Symmetrie:** aus $x \sim y$ folgt $y \sim x$
 - „die Verträglichkeit zweier Elemente ist immer paarweise erfüllt“
 - **Nicht Transitivität:** aus $[(x \sim y) \wedge (y \sim z)]$ folgt **nicht** $[x \sim z]$
 - „es gibt keine „Verträglichkeits-Kette“ mehrerer, sondern immer nur „Verträglichkeits-Tupel“ zweier Elemente“

1. Aufgabe – 1.1

kgV	2	3	4	5	6	7
2	2	6	4	10	6	14
3	6	3	12	15	6	21
4	4	12	4	20	12	28
5	10	15	20	5	30	35
6	6	6	12	30	6	42
7	14	21	28	35	42	7

1. Aufgabe – 1.1

Eigenschaften

■ reflexiv ?

- ja, wegen der Hauptdiagonale

■ symmetrisch?

- ja, da kommutativ

■ transitiv?

- nein, weil z.B. aus $3 \alpha 2$ und $2 \alpha 7$ nicht folgt $3 \alpha 7$

→ Verträglichkeitsrelation

kgV	2	3	4	5	6	7
2	2	6	4	10	6	14
3	6	3	12	15	6	21
4	4	12	4	20	12	28
5	10	15	20	5	30	35
6	6	6	12	30	6	42
7	14	21	28	32	42	7

1. Aufgabe – 1.2

- 1.2 Ist α für beliebige natürliche Zahlen eine Verträglichkeitsrelation, oder nur für die Menge M ?

Für beliebige natürliche Zahlen ist die Relation α **nicht mehr reflexiv**, da Zahlen, die größer als 15 sind, mit sich selbst ein kgV besitzen, das ebenfalls größer als 15 ist.

z.B.: $17 \rightarrow 17 \not\alpha 17$

1. Aufgabe – 1.3

■ 1.3 Geben Sie eine Überdeckung von M an

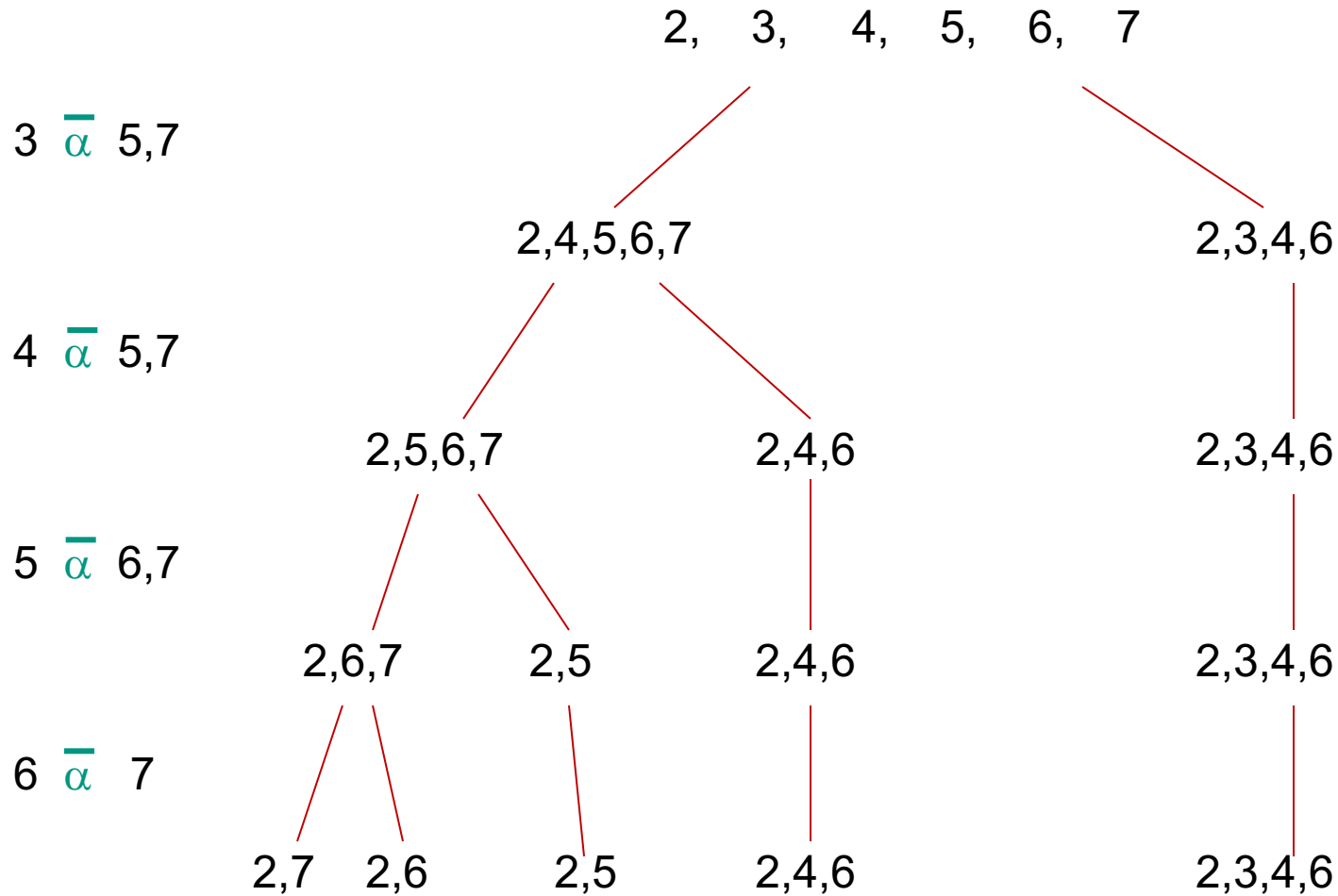
kgV	2	3	4	5	6	7
2	2	6	4	10	6	14
3	6	3	12	15	6	21
4	4	12	4	20	12	28
5	10	15	20	5	30	35
6	6	6	12	30	6	42
7	14	21	28	32	42	7

■ Überdeckung:
Menge aus Untermengen:

- die insgesamt alle Elemente der Grundmenge enthalten
- In sich nur verträgliche Elemente enthalten
- Aus möglichst wenigen Teilmengen besteht

3 $\bar{\alpha}$ 5,7	4 $\bar{\alpha}$ 5,7	5 $\bar{\alpha}$ 6,7	6 $\bar{\alpha}$ 7
----------------------	----------------------	----------------------	--------------------

1. Aufgabe – 1.3



1. Aufgabe – Überdeckungstabelle

	2	3	4	5	6	7
2,7	x					x
2,6	x				x	
2,5	x			x		
2,4,6	x		x		x	
2,3,4,6	x	x	x		x	

■ Überdeckung: $\tau = \{ \{2, 3, 4, 6\}, \{2, 5\}, \{2, 7\} \}$

Fabian Kempf

kempf@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

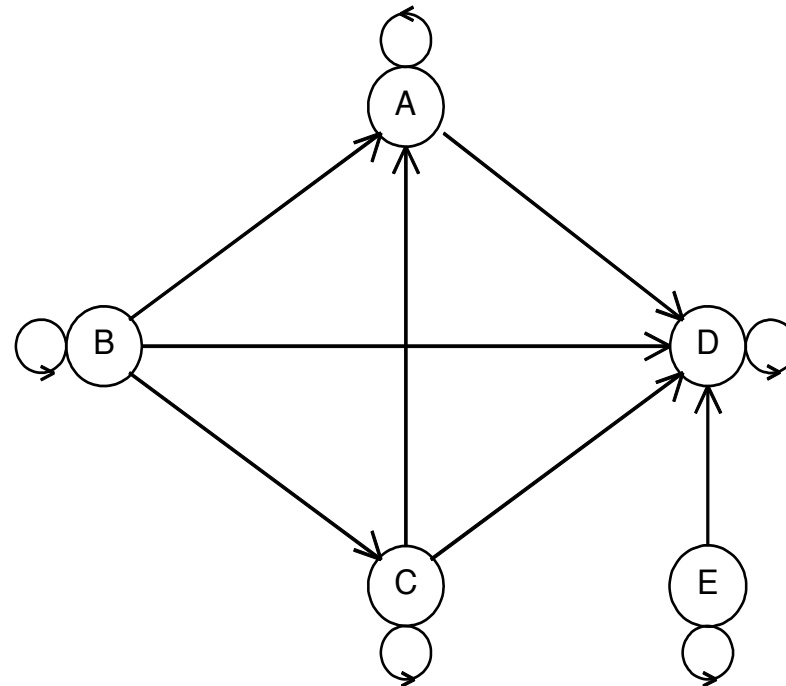
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

2. Aufgabe: Graphen und Relationen

2. Aufgabe

■ Der Graph in folgendem Bild repräsentiere eine Relation

2.1 Welche Eigenschaften hat die Relation?



2. Aufgabe

■ 2.1 Welche Eigenschaften hat die Relation?

■ reflexiv?

- ja, Schleifen an allen Knoten

■ symmetrisch?

- nein, keine antiparallelen Kanten

■ antisymmetrisch?

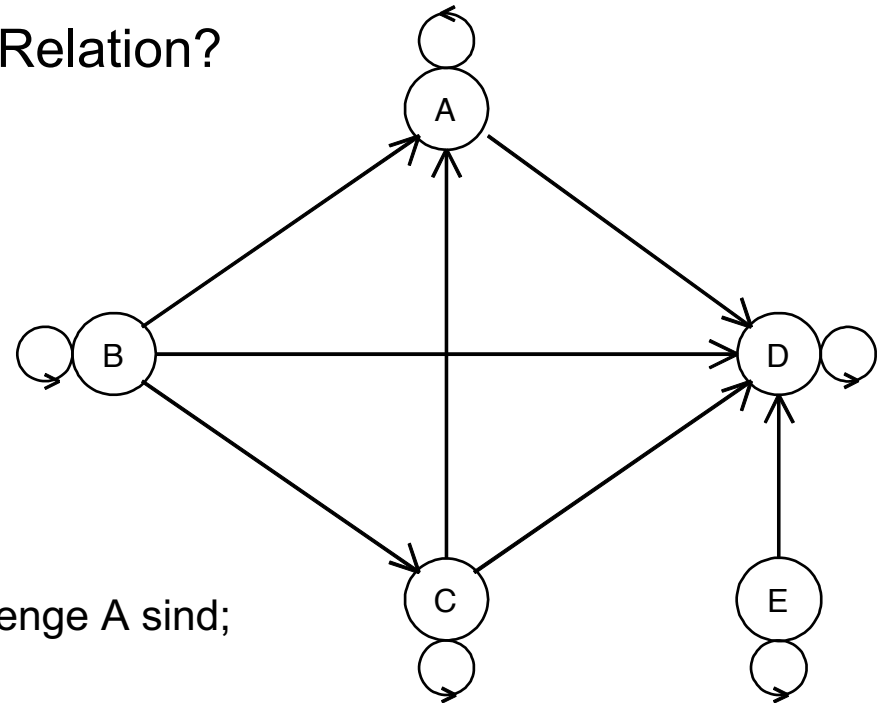
- ja, wenn (a,b) zur Relation gehört, dann gehört (b,a) nicht zur Relation; unter der Bedingung, dass a und b verschiedene Elemente aus einer Menge A sind;
 $x \alpha y$ und $y \alpha x \Rightarrow x = y$

■ transitiv?

- ja, $x \alpha y$ und $y \alpha z \Rightarrow x \alpha z$

■ Um welche spezielle Relation handelt es sich?

- Es handelt sich hier um eine **Ordnungsrelation**.
(antisymmetrische Quasiordnung = Halbordnung)



Fabian Kempf

kempf@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

3. Aufgabe: Relationen

3. Aufgabe

- In der Vorweihnachtszeit stellt sich die Frage:
was besser ist: ewiges Glück oder ein Lebkuchenherz?
- Man sollte meinen, dass nichts besser ist als ewiges Glück.
Andererseits ist ein Lebkuchenherz sicherlich besser als nichts.
“Besser” ist bekanntlich eine transitive Relation.
- Was folgt daraus?
 - transitiv: $\text{aus } x \alpha y \text{ und } y \alpha z \text{ folgt } x \alpha z:$
- Lebkuchenherz besser als nichts
UND
- nichts besser als ewiges Glück

=> Lebkuchenherz besser als ewiges Glück

Fabian Kempf

kempf@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

4. Aufgabe: Graphen

Eigenschaften von Graphen

Endlicher Graph

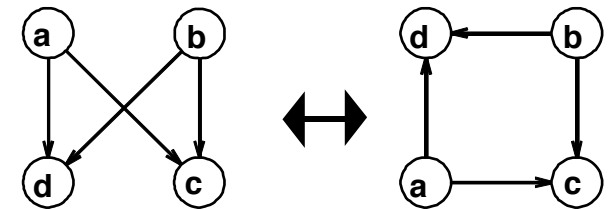
- Kanten- und Knotenmenge sind endlich.

Entarteter Graph

- Kantenmenge ist leer.

Isomorpher Graph

- “Graphen lassen sich ineinander überführen”



Vollständiger Graph

- Jeder Knoten ist über eine Kante mit jedem anderen Knoten verbunden.

Einfacher Graph

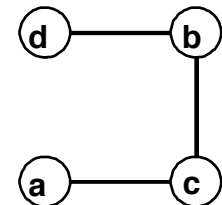
- Zwischen zwei Knoten gibt es höchstens eine Kante.

Gerichteter Graph

- Enthält mindestens eine gerichtete Kante.

Zusammenhängender Graph

- Es existiert von jedem Knoten eine Kantenprogression (Kantenfolge) zu jedem anderen Knoten.



Eigenschaften von Graphen

streng zusammenhängender Graph

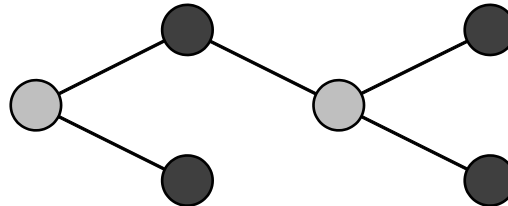
- Bei gerichteten Graphen: Jeder Knoten ist von jedem Knoten aus erreichbar (Kantenrichtung beachten).

zyklischer Graph

- gerichteter Graph mit mindestens einem Zyklus (auch Schleife).

bipartiter Graph

- zwei Knotenmengen, wobei keine Kante Knoten aus derselben Menge verbindet .



planarer Graph

- es existiert ein zugehöriger isomorpher Graph, der in der Ebene überschneidungsfrei ist.

gewichteter Graph

- enthält gewichtete Knoten oder Kanten (z.B.: Entfernungen, Kosten, ...)

■ Kanteneigenschaften

■ Schleife

- verbindet einen Knoten mit sich selbst.

■ Knoteneigenschaften

■ Grad $d(g)$

- Anzahl der inzidenten Kanten eines Knotens.

■ Ausgangsgrad $d^+(g)$

- Anzahl der abgehenden Kanten.

■ Eingangsgrad $d^-(g)$

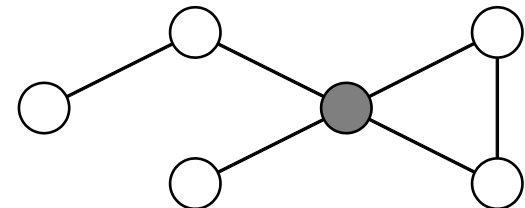
- Anzahl der ankommenden Kanten.

■ benachbarte Knoten $V'(g)$

- sind über eine Kante miteinander verbunden.
- bei gerichteten Graphen Unterscheidung in: Vorgänger: $V'_1(g)$; Nachfolger: $V'_2(g)$

■ Artikulation

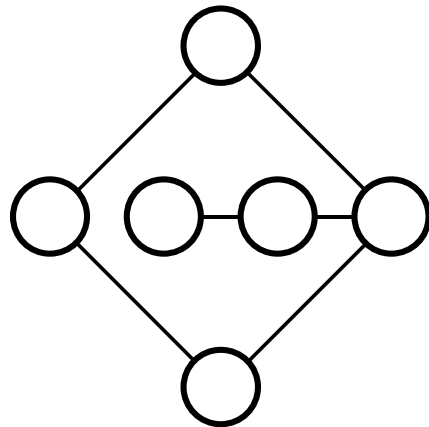
- Knoten, nach dessen Entnahme der Graph in isolierte Teilgraphen zerfällt:



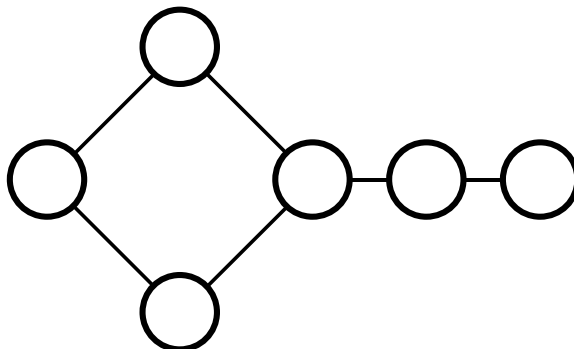
4. Aufgabe

■ 4.1 Zeichnen Sie den zu Graph 1 bzw. zu Graph 2 zugehörigen dualen Graphen

(Kennzeichnen Sie dabei die überführten Knoten eindeutig):

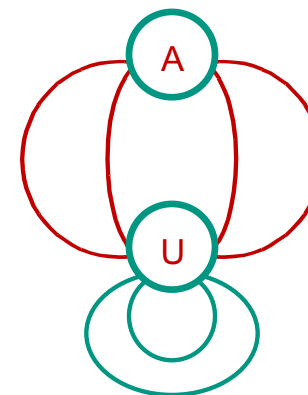
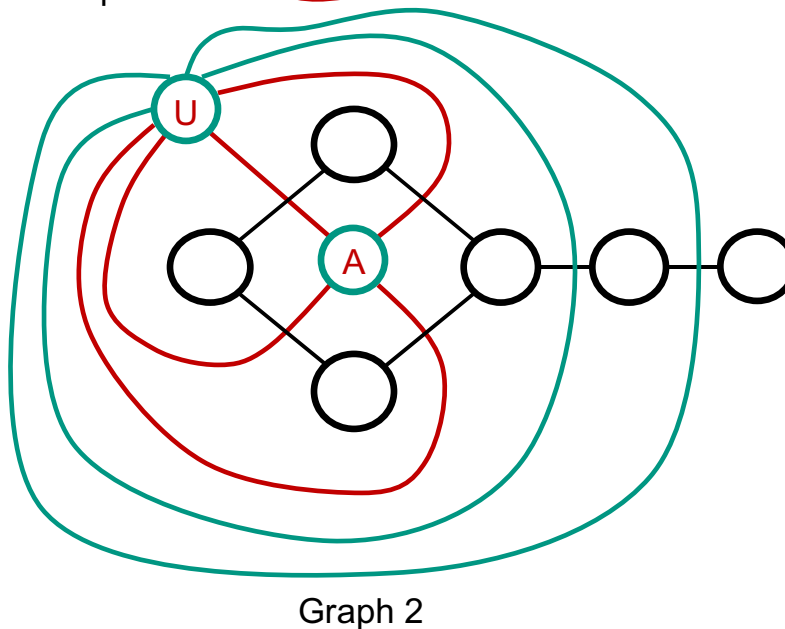
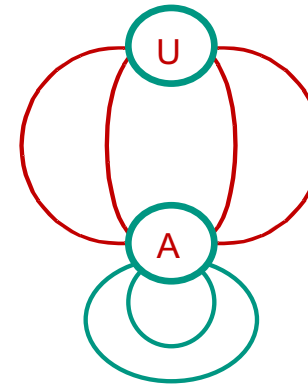
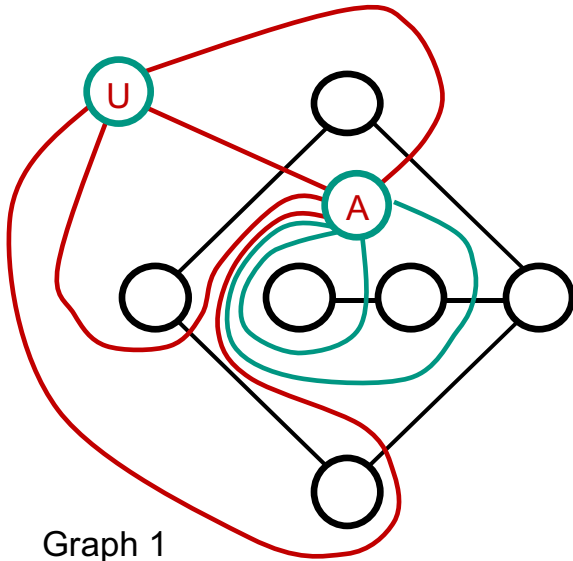


Graph 1



Graph 2

4. Aufgabe – 4.1



=> Duale Graphen sind isomorph

Fabian Kempf

kempf@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

5. Aufgabe: boolische Algebra

5. Aufgabe

- Beweisen Sie unter ausschließlicher Benutzung der Huntingtonschen Axiome, dass folgende Regeln für jede boolesche Algebra gelten.
 - Hinweis: Folgendes Vorgehen bietet sich häufig an:
Erweiterung mit einem neutralen Element. Ersetzen des neutralen Elements nach H5. Anwendung des Distributivgesetzes.
 - Ein **Axiomensystem** (auch: Axiomatisches System) ist ein System von grundlegenden Aussagen (**Axiomen**) die ohne Beweis angenommen und aus denen alle Sätze (**Theoreme**) des Systems logisch abgeleitet werden.

■ Aufgabe 5.1 $a \top a = a$

$$a \perp a = a$$

■ Aufgabe 5.2 $a \top O = O$

$$a \perp I = I$$

■ Aufgabe 5.3 $a \top (a \perp b) = a$

$$a \perp (a \top b) = a$$

Huntingtonschen Axiome

Allgemeine Boolesche Algebra: $[K, \top, \perp, \bar{}, O, I]$

H3: Distributivgesetz

$$\begin{array}{lll} (x \perp y) \top z = & (x \top y) \perp z = & \forall x, y, z \in K \\ (x \top z) \perp (y \top z) & (x \perp z) \top (y \perp z) & \end{array}$$

H4: Neutrales Element

$$\begin{array}{lll} I \top x = x & O \perp x = x & x, O, I \in K \end{array}$$

H5: Komplement

$$\begin{array}{lll} x \perp k = I & x \top k = O & x, k \in K \\ & & \bar{\bar{x}} = k \end{array}$$

⇔ Dualität!!!

5. Aufgabe – 5.1

$$a \top a = (a \top a) \perp \mathbf{O} \quad (\text{H4})$$

$$= (a \top a) \perp (a \top \bar{a}) \quad (\text{H5})$$

$$= a \top (a \perp \bar{a}) \quad (\text{H3})$$

$$= a \top \mathbf{I} \quad (\text{H5})$$

$$= \underline{\underline{a}} \quad (\text{H4})$$

$$a \perp a = (a \perp a) \top \mathbf{I} \quad (\text{H4})$$

$$= (a \perp a) \top (a \perp \bar{a}) \quad (\text{H5})$$

$$= a \perp (a \top \bar{a}) \quad (\text{H3})$$

$$= a \perp \mathbf{O} \quad (\text{H5})$$

$$= \underline{\underline{a}} \quad (\text{H4})$$

5. Aufgabe – 5.2

$$a \top O = (a \top O) \perp O \quad (\text{H4})$$

$$= (a \top O) \perp (a \top \bar{a}) \quad (\text{H5})$$

$$= a \top (O \perp \bar{a}) \quad (\text{H3})$$

$$= a \top \bar{a} \quad (\text{H4})$$

$$= \underline{\underline{O}} \quad (\text{H5})$$

$$a \perp I = (a \perp I) \top I \quad (\text{H4})$$

$$= (a \perp I) \top (a \perp \bar{a}) \quad (\text{H5})$$

$$= a \perp (I \top \bar{a}) \quad (\text{H3})$$

$$= a \perp a \quad (\text{H4})$$

$$= \underline{\underline{I}} \quad (\text{H5})$$

5. Aufgabe – 5.3

$$a \top (a \perp b) = (a \perp O) \top (a \perp b) \quad (\text{H4})$$

$$= a \perp (O \top b) \quad (\text{H3})$$

$$= a \perp O \quad (5.2)$$

$$= \underline{\underline{a}} \quad (\text{H4})$$

$$a \perp (a \top b) = (a \top I) \perp (a \top b) \quad (\text{H4})$$

$$= a \top (I \perp b) \quad (\text{H3})$$

$$= a \top I \quad (5.2)$$

$$= \underline{\underline{a}} \quad (\text{H4})$$

Fabian Kempf

kempf@kit.edu

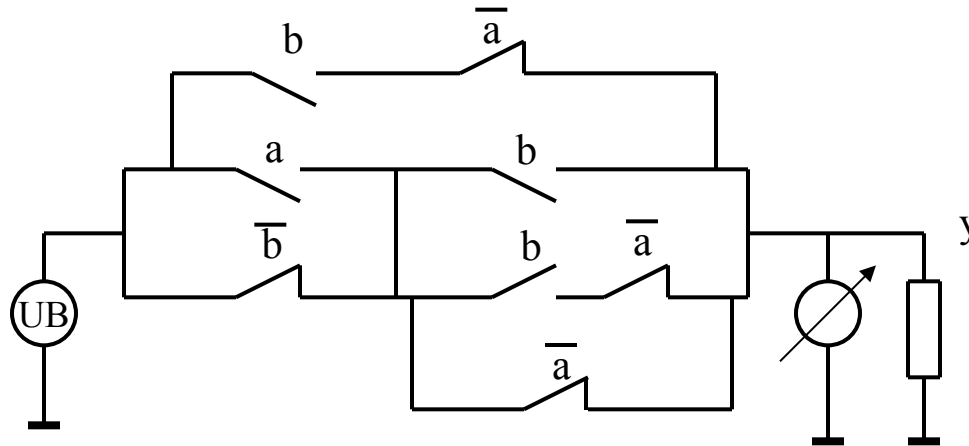
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

6. Aufgabe: Relaisschaltnetz

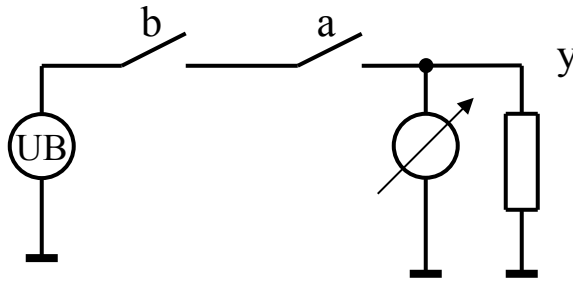
6. Aufgabe

- Gegeben sei das im Bild dargestellte Relaisschaltnetz



- 6.1 Bilden Sie daraus den entsprechenden schaltalgebraischen Ausdruck und vereinfachen Sie ihn.

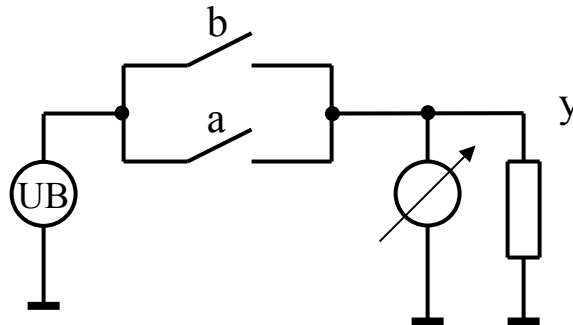
■ Serienschaltung



a	b	y
L	L	L
L	H	L
H	L	L
H	H	H

$$y = a \& b$$

■ Parallelschaltung

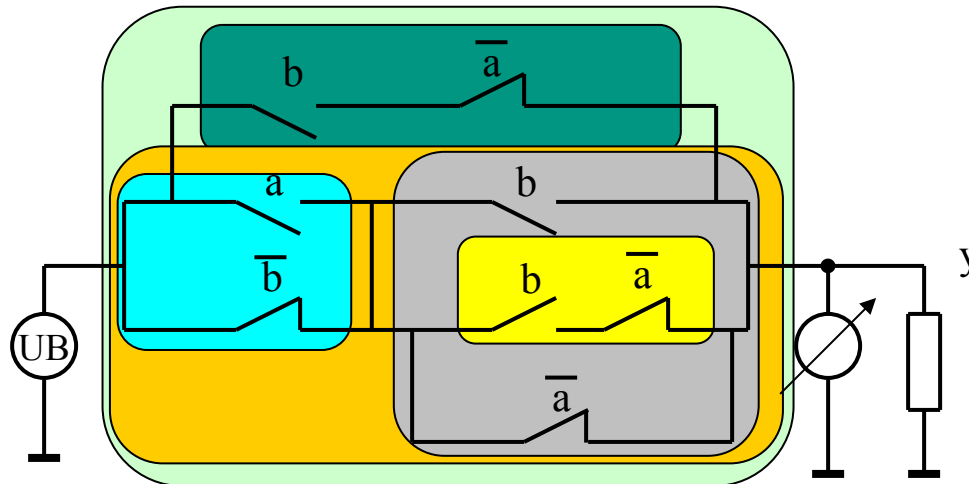


a	b	y
L	L	L
L	H	H
H	L	H
H	H	H

$$y = a \vee b$$

6. Aufgabe

- Bilden Sie daraus den entsprechenden schaltalgebraischen Ausdruck und vereinfachen Sie ihn.



$$y = [((b \& \bar{a}) \vee b \vee \bar{a}) \& (a \vee \bar{b})] \vee b \& \bar{a}$$

■ Regeln für ein Element

■ R5a $a \vee 0 = a$

■ R6a $a \vee 1 = 1$

■ R7a $a \vee a = a$

■ R8a $a \vee \bar{a} = 1$

R5b $a \& 1 = a$

R6b $a \& 0 = 0$

R7b $a \& a = a$

R8b $a \& \bar{a} = 0$

■ Regeln für zwei oder mehr Elemente

■ R10a

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = a \vee b \vee c$$

■ (assoziative Gesetze)

R10b

$$a \& (b \& c) = (a \& b) \& c = a \& b \& c$$

■ R11a $a \& (a \vee b) = a$

■ (Absorptionsgesetze)

R11b $a \vee (a \& b) = a$

■ R12a $\overline{(a \vee b)} = \bar{a} \& \bar{b}$

■ DeMorgansche Regeln

R12b $\overline{(a \& b)} = \bar{a} \vee \bar{b}$

6. Aufgabe – 6.1 Vereinfachung

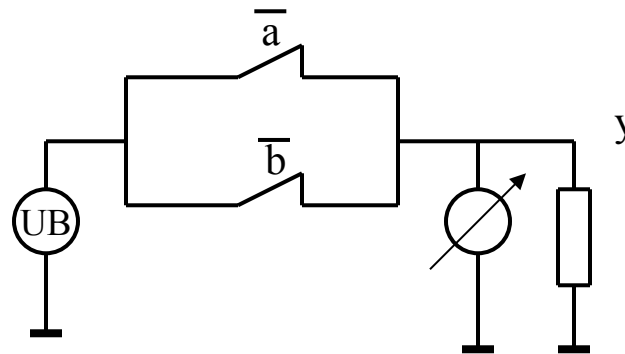
R11a

$$\begin{aligned}
 y &= b \& \bar{a} \vee [(a \vee \bar{b}) \& (b \vee \overline{a \vee (b \& \bar{a})})] \\
 &= b \& \bar{a} \vee [(a \vee \bar{b}) \& (b \vee \bar{a})] \\
 &= b \& \bar{a} \vee [((a \vee \bar{b}) \& b) \vee ((a \vee \bar{b}) \& \bar{a})] \\
 &= b \& \bar{a} \vee [(a \& b) \vee (b \& \bar{b}) \vee (a \& \bar{a}) \vee (\bar{b} \& \bar{a})] \\
 &= b \& \bar{a} \vee (a \& b) \vee (\bar{b} \& \bar{a}) \quad \text{R8b} \\
 &= b \& (a \vee \bar{a}) \& (a \vee b) \vee (\bar{b} \& \bar{a}) \\
 &= b \& 1 \vee (b \& \bar{a}) \quad \text{R8a} \quad \text{R11b} \quad b \vee (\bar{b} \& \bar{a}) \\
 &= b \vee \bar{a} \quad \Rightarrow \quad \underline{\text{Implikation, } a \text{ impliziert } b, a \rightarrow b}
 \end{aligned}$$

6. Aufgabe

- 6.2 Entwerfen Sie ein Relaisschaltnetz, das die negative Konjunktion realisiert.

$$y = \overbrace{a \ \& \ b}^{\text{R12b}} = \bar{a} \vee \bar{b}$$





**Fröhliche Weihnachten und
einen guten Rutsch ins Neue Jahr !!!**