

Fabian Kempf

kempf@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

Digitaltechnik

6. Übung

Fabian Kempf

kempf@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

Minimierung

- Aus den **schaltalgebraischen Ausdrücken** ist ersichtlich, dass der **Beschreibungsaufwand sinkt**, je **weniger Terme** vorhanden sind bzw. je **mehr Literale** aus den Termen **entfallen**
- Bei der **schaltungstechnischen Realisierung** zeigt sich ebenfalls, dass entsprechende Aufwendungen für Schaltelemente von der **Anzahl** der **Terme** und der verwendeten **Literale abhängen**
- Bei der **DNF (KNF)** benötigt man für **jede Einstelle** (Nullstelle) einen **Minterm** (Maxterm)
 - durch **gezieltes Weglassen** von **Literalen** in einem **Minterm** (Maxterm) kann dieser Term **mehrere Einstellen** (Nullstellen) **repräsentieren**
 - **Anzahl der benötigten Terme und Literale wird reduziert**
 - **Minimierung von Schaltfunktionen!**

Beispiele:

$$f(x_4, x_3, x_2, x_1) = x_4 \& \overline{x_3} \& \overline{x_2} \& x_1 \quad E = \{(1,0,0,1)\} \quad |E| = 1$$

$$f(x_4, x_3, x_2, x_1) = x_4 \& \overline{x_3} \& x_1 \quad E = \{(1,0,0,1), (1,0,1,1)\} \quad |E| = 2$$

$$f(x_4, x_3, x_2, x_1) = \overline{x_3} \& x_1 \quad E = \{(0,0,0,1), (0,0,1,1), (1,0,0,1), (1,0,1,1)\} \quad |E| = 4$$

Also: die **Reduzierung** von **Literalen** in einem **Term** hat auch die **Reduzierung** der **Anzahl** von **Termen** zur Folge

Gesucht: **Terme** mit **minimaler Anzahl** von **Literalen**, die trotzdem **nur Einstellen** (Nullstellen) der zu beschreibenden Funktion **erfassen**

→ diese Terme werden **Primterme** genannt

■ Primterme und Eins- bzw. Nullstellenüberdeckung

- **Einsstellen** (Nullstellen) **verschiedener Primterme** können “überlappen”
- (kosten)**günstigste Auswahl** von Primtermen gesucht, die **alle Einsstellen** (Nullstellen) der Funktion **überdecken** -> Überdeckungsproblem!
- das Gesamtproblem nennt man das **Minimierungsproblem**

■ Bewertungskriterium

- zur **Bewertung** unterschiedlicher **Lösungen** des **Minimierungsproblems** wird die **Anzahl der Literale** der Primterme zzgl. der **Zahl** der **verwendeten Terme** verwendet

Beispiel:

$$y = (x_4 \& \overline{x_3} \& x_2 \& \overline{x_1}) \vee (x_4 \& x_3 \& \overline{x_2}) \vee (x_5 \& x_3)$$

$$L(y) = 4 + 3 + 2 + 3 = 12$$

Gesucht: **Auswahl** von **Primtermen** mit **L(y) minimal**

Minimierung am Symmetriediagramm

- Die Minimierung mit Symmetriediagramm stellt eine graphische Methode dar -> Ausnutzung der Symmetrierelationen
- Zusammenfassung von Belegungen zu maximalen Blöcken
 - Finden aller Primblöcke (*charakteristische Terme* $\cong$ *Primterme*)
 - Überdeckung aller Einstellen (bzw. Nullstellen)

x_1				
x_2	0	1	1	0
	0	0	1	1
	0	0	1	-
	-	1	0	0
x_3				
x_4				

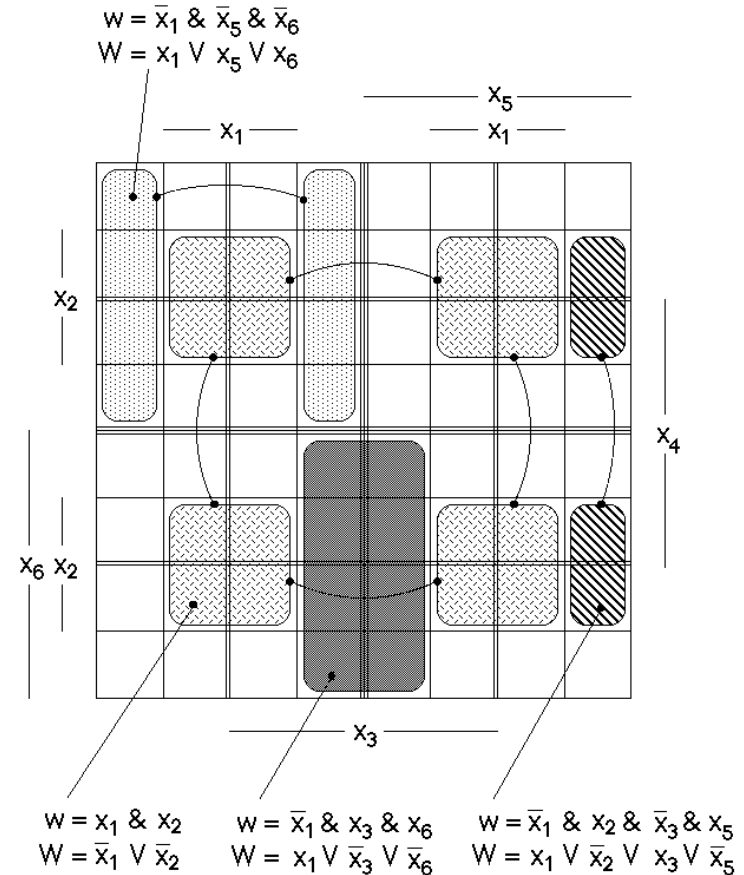
Minimierung am Symmetriediagramm

→ Finden von **Primblöcken (Primtermen)** in Symmetriediagrammen

■ Sukzessive Bildung von **Blöcken** aus **Einsstellen** (Nullstellen) und **Freistellen**

→ durch **Spiegelung** von **kleineren Blöcken** (einzelne Einsstellen sind kleinste Blöcke) an allen möglichen **Symmetrielinien**

■ **Maximal zusammengefasste Blöcke** von **Einsstellen** sind **Primeinsblöcke**, wenn keine Spiegelung mehr möglich



Fabian Kempf

kempf@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

1. Aufgabe: Blocküberdeckung

1. Aufgabe – 1.1

- Die Einstellenmenge einer vollständig definierten Schaltfunktion $y = f(x_3, x_2, x_1)$ sei gegeben mit

$$\{X_j\}_1 = \{0,1,3,4\}$$

- 1.1** Tragen Sie die Funktion in ein Symmetriediagramm ein und geben Sie die Nustellenmenge an $\{X_j\}_0$.

		x_1			
		0	1	5	4
x_2					
		2	3	7	6
		x_3			

$$\{X_j\}_0 = \{2,5,6,7\}$$

1. Aufgabe – 1.2

- 1.2 Geben Sie die vollständige Blocküberdeckung in **disjunktiver** Form an.

		x_1	
x_2		1₀	1₁
		0₅	1₄
		0₂	1₃
		0₇	0₆
		x_3	

$$y = \overline{x_2} \& \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \& \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \& \overline{x_2}$$

$$y = \overline{x_1} \& \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \& \overline{x_2}$$

1. Aufgabe – 1.3

- **1.3** Geben Sie die vollständige Blocküberdeckung in **konjunktiver** Form an.

	x_1			
	1 0	1 1	0 5	1 4
x_2	0 2	1 3	0 7	0 6
	x_3			

$$y = (\overline{x_1} \vee \overline{x_3}) \& (\overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \& (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})$$

$$y = (\overline{x_1} \vee \overline{x_3}) \& (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})$$

1. Aufgabe – 1.4

- 1.4 Zur Implementierung der Funktion stehen nur NAND-Gatter (mit mehreren Eingängen) zur Verfügung. Formen Sie die disjunktive Form mit Hilfe der DeMorganschen Regeln entsprechend um.

$$y = (x_1 \& \overline{x_3}) \vee (\overline{x_1} \& \overline{x_2})$$

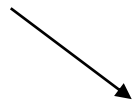
$$= \overline{\overline{(x_1 \& \overline{x_3}) \vee (\overline{x_1} \& \overline{x_2})}}$$

$$= \overline{(x_1 \& \overline{x_3}) \& (\overline{x_1} \& \overline{x_2})}$$

$$= (x_1 \& \overline{x_3}) \& (\overline{x_1} \& \overline{x_2})$$

mit $\overline{a} = \overline{a \& a}$

$$= a \& \overline{a}$$



$$= (x_1 \& (\overline{x_3 \& x_3})) \& ((\overline{x_1 \& x_1}) \& (\overline{x_2 \& x_2}))$$

Fabian Kempf

kempf@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

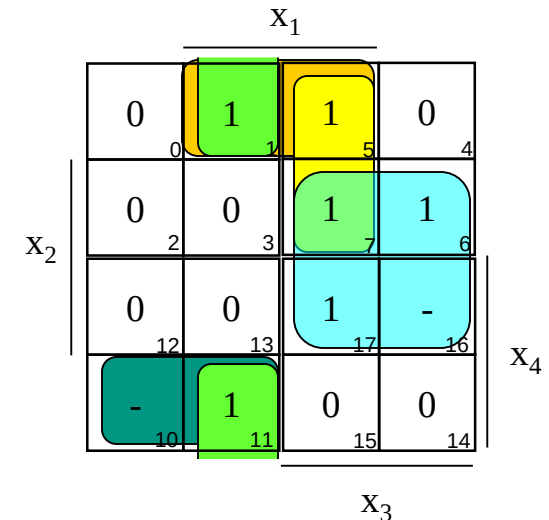
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

2. Aufgabe: DMF

Minimierungsmethode

Beispiel (1):

- Gegeben: $y = f(x_4, x_3, x_2, x_1)$ durch die Angabe der **Eins-** und **Nullstellen** im **Symmetriediagramm**
- Gesucht: Kürzester algebraischer Ausdruck
→ **Disjunktive Minimalform (DMF)**
- **Primterme** zur Bildung einer **DMF** spezifizieren **Primeinsblöcke**
→ werden **Primimplikanten** genannt
(*Primimplikate* für Konjunktive Minimalform KMF)
- Die farbig dargestellten **Primimplikanten** überdecken **Eins-** und **Freistellen**



	x_1				
	0	1	2	3	
x_2	0	0	1	0	4
	1	0	1	1	5
	2	0	1	-	6
	3	-	1	0	7
	8	9	10	11	
	0	1	2	3	
x_3	0	1	2	3	12
	1	0	1	1	13
	2	0	1	-	14
	3	-	1	0	15

TIV

2. Aufgabe – 2.1

- Gegeben sei eine unvollständig definierte Schaltfunktion $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ durch ihre Einsstellenmenge $\{X_j\}_1$ und ihre Nullstellenmenge $\{X_j\}_0$.

$$\{X_j\}_1 = \{0, 7, 10, 14, 15, 16, 17, 20, 24, 34, 37\}$$

$$\{X_j\}_0 = \{1, 2, 3, 5, 6, 12, 21, 22, 23, 25, 26, 31, 32, 33, 35, 36\}$$

- 2.1** Tragen Sie die Funktion in ein Symmetriediagramm ein.

x_1				x_5				
				x_1				
x_2	0	1	5	4	24	25	21	20
	2	3	7	6	26	27	23	22
	12	13	17	16	36	37	33	32
	10	11	15	14	34	35	31	30
				x_3				
				x_4				

2. Aufgabe – 2.1

- Gegeben sei eine unvollständig definierte Schaltfunktion $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ durch ihre Einsstellenmenge $\{X_j\}_1$ und ihre Nullstellenmenge $\{X_j\}_0$.

$$\{X_j\}_1 = \{0, 7, 10, 14, 15, 16, 17, 20, 24, 34, 37\}$$

$$\{X_j\}_0 = \{1, 2, 3, 5, 6, 12, 21, 22, 23, 25, 26, 31, 32, 33, 35, 36\}$$

- **2.1** Tragen Sie die Funktion in ein Symmetriediagramm ein.

x_1				x_5				
				x_1				
x_2	0	1	5	4	24	25	21	20
	2	3	7	6	26	27	23	22
	12	13	17	16	36	37	33	32
	10	11	15	14	34	35	31	30
				x_3				
				x_4				

2. Aufgabe – 2.1

- Gegeben sei eine unvollständig definierte Schaltfunktion $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ durch ihre Einsstellenmenge $\{X_j\}_1$ und ihre Nullstellenmenge $\{X_j\}_0$.

$$\{X_j\}_1 = \{0, 7, 10, 14, 15, 16, 17, 20, 24, 34, 37\}$$

$$\{X_j\}_0 = \{1, 2, 3, 5, 6, 12, 21, 22, 23, 25, 26, 31, 32, 33, 35, 36\}$$

- **2.1** Tragen Sie die Funktion in ein Symmetriediagramm ein.

x_1				x_5							
x_1				x_1							
x_2	1				1			1			
	0	1	5	4	24	25	21	20			
	2	3	1	7	6	26	27	23	22		
	12	13	1	17	1	16	36	1	37	33	32
	1		1	1	1						
	10	11	15	14	34	35	31	30			
x_3				x_4							

2. Aufgabe – 2.1

- Gegeben sei eine unvollständig definierte Schaltfunktion $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ durch ihre Einsstellenmenge $\{X_j\}_1$ und ihre Nullstellenmenge $\{X_j\}_0$.

$$\{X_j\}_1 = \{0, 7, 10, 14, 15, 16, 17, 20, 24, 34, 37\}$$

$$\{X_j\}_0 = \{1, 2, 3, 5, 6, 12, 21, 22, 23, 25, 26, 31, 32, 33, 35, 36\}$$

- 2.1** Tragen Sie die Funktion in ein Symmetriediagramm ein.

				x_5			
x_1				x_1			
x_2	1			1			1
	0	1	5	4	24	25	21
	2	3	7	6	26	27	23
	12	13	17	16	36	37	33
	10	11	15	14	34	35	31
				x_3			

2. Aufgabe – 2.1

- Gegeben sei eine unvollständig definierte Schaltfunktion $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ durch ihre Einsstellenmenge $\{X_j\}_1$ und ihre Nullstellenmenge $\{X_j\}_0$.

$$\{X_j\}_1 = \{0, 7, 10, 14, 15, 16, 17, 20, 24, 34, 37\}$$

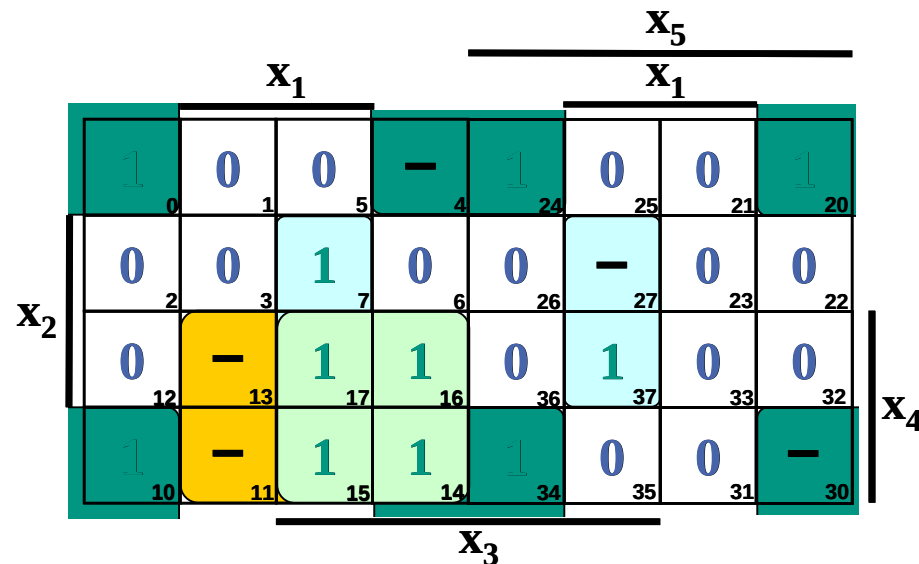
$$\{X_j\}_0 = \{1, 2, 3, 5, 6, 12, 21, 22, 23, 25, 26, 31, 32, 33, 35, 36\}$$

- 2.1** Tragen Sie die Funktion in ein Symmetriediagramm ein.

x_1				x_5				
x_1				x_1				
x_2	1 0	0 1	0 5	— 4	1 24	0 25	0 21	1 20
	0 2	0 3	1 7	0 6	0 26	— 27	0 23	0 22
	0 12	— 13	1 17	1 16	0 36	1 37	0 33	0 32
	1 10	— 11	1 15	1 14	1 34	0 35	0 31	— 30
x_3				x_4				

2. Aufgabe – 2.2

- **2.2** Bestimmen Sie graphisch eine disjunktive Minimalform der Schaltfunktion (DMF), indem Sie alle Primblöcke in das Symmetriediagramm eintragen. Geben Sie den Funktionsausdruck für die DMF an.



-
- Figure 1 shows a 4x8 grid representing a 2D lattice with 32 sites. The grid is divided into four quadrants by a vertical line (x1) and a horizontal line (x2). The quadrants are labeled x1, x2, x3, and x4. The sites are numbered 1 to 32. The values at the sites are: Row 1: 1, 0, 0, -, 1, 0, 0, 1; Row 2: 0, 0, 1, 0, 0, -, 0, 0; Row 3: 0, -, 1, 1, 0, 1, 0, 0; Row 4: 1, -, 1, 1, 1, 0, 0, -. The values are color-coded: 1 (dark green), 0 (white), - (light blue), and 1 (light green).



Fabian Kempf

kempf@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

3. Aufgabe: Gatterschaltung

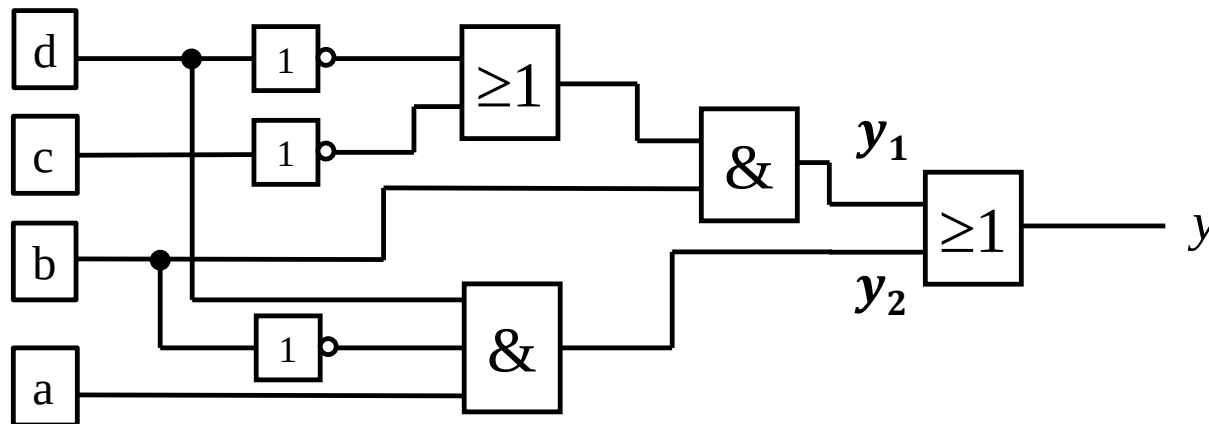
3. Aufgabe – 3.1

- Gegeben sei die Schaltfunktion, $y = f(a, b, c, d)$, welche sich aus der ODER - Verknüpfung der beiden Schaltfunktionen $y_1 = f_1(a, b, c, d)$ und $y_2 = f_2(a, b, c, d)$ ergibt.

$$y_1 = (\bar{c} \vee \bar{d}) \& b$$

$$y_2 = d \& \bar{b} \& a$$

- **3.1** Zeichnen Sie eine Gatterschaltung, die die Funktion y realisiert.



3. Aufgabe – 3.2

- **3.2** Geben Sie die Funktionstabelle für die Funktion y an. Wie lauten die Nullstellen der Funktion? Tragen Sie die Funktion in ein Symmetriediagramm ein.

$$y_1 = (\bar{c} \vee \bar{d}) \& b$$

$$y_2 = d \& \bar{b} \& a$$

$$y = y_1 \vee y_2$$

$$\rightarrow \{X_j\}_0 = \{0, 1, 4, 5, 10, 14, 16, 17\}$$

j_0	d	c	b	a	y_1	y_2	y
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0
2	0	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1	0	1
4	0	1	0	0	0	0	0
5	0	1	0	1	0	0	0
6	0	1	1	0	1	0	1
7	0	1	1	1	1	0	1
10	1	0	0	0	0	0	0
11	1	0	0	1	0	1	1
12	1	0	1	0	1	0	1
13	1	0	1	1	1	0	1
14	1	1	0	0	0	0	0
15	1	1	0	1	0	1	1
16	1	1	1	0	0	0	0
17	1	1	1	1	0	0	0

3. Aufgabe – 3.2

- **3.2** Geben Sie die Funktionstabelle für die Funktion y an. Wie lauten die Nullstellen der Funktion? Tragen Sie die Funktion in ein Symmetriediagramm ein.

$$\rightarrow \{X_j\}_0 = \{0, 1, 4, 5, 10, 14, 16, 17\}$$

(f)

a			
0 ₀	0 ₁	0 ₅	0 ₄
1 ₂	1 ₃	1 ₇	1 ₆
1 ₁₂	1 ₁₃	0 ₁₇	0 ₁₆
0 ₁₀	1 ₁₁	1 ₁₅	0 ₁₄
c			

b d

3. Aufgabe – 3.3

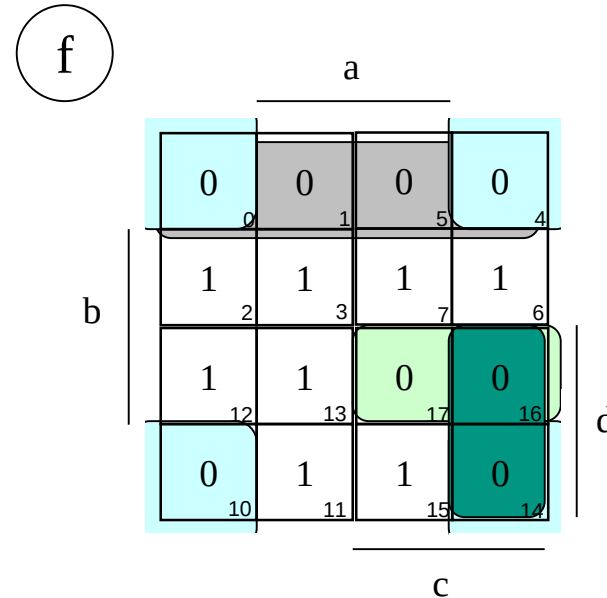
3.3 Geben Sie *alle* Primnullblöcke der Funktion an.

$$A : b \vee d$$

$$B : b \vee c \vee d$$

$$C : a \vee b$$

$$D : a \vee c \vee d$$



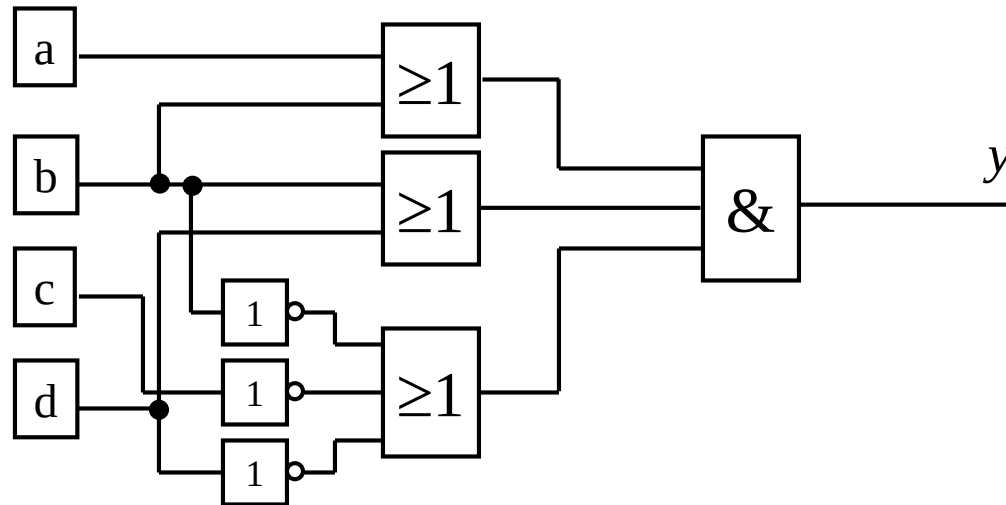
■ 3.4 Geben Sie eine konjunktive Minimalform der Funktion an.

$$y = (a \vee b) \& (\bar{b} \vee \bar{c} \vee \bar{d}) \& (b \vee d)$$

3. Aufgabe – 3.5

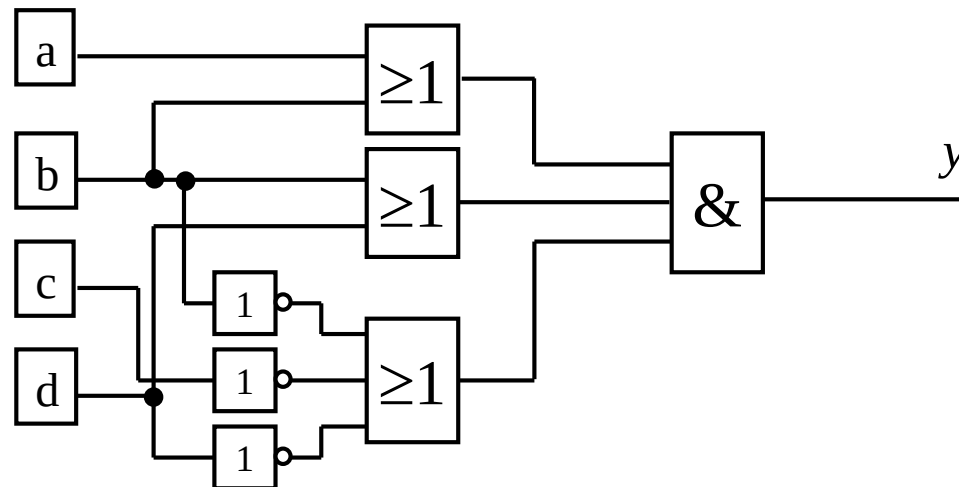
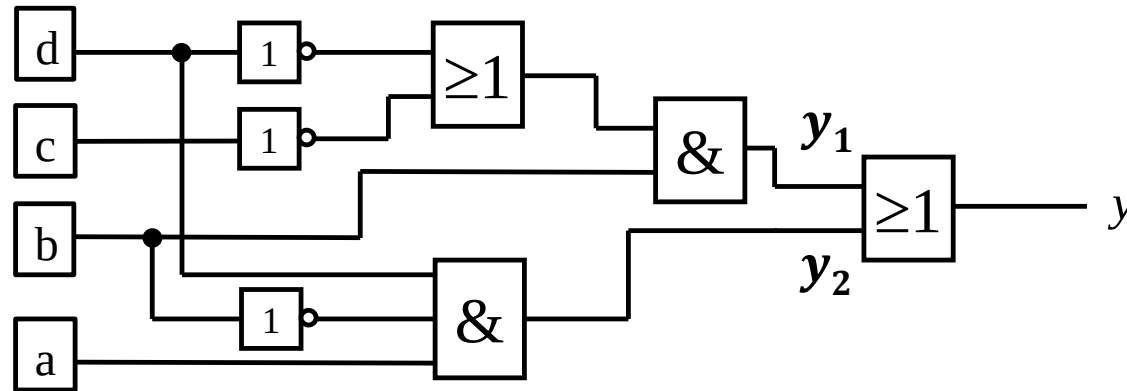
- 3.5 Geben Sie eine Gatterschaltung an, die die minimierte Funktion realisiert.

$$y = (a \vee b) \& (\bar{b} \vee \bar{c} \vee \bar{d}) \& (b \vee d)$$



3. Aufgabe

Vergleich der beiden Schaltungsrealisierungen vor und nach der Minimierung.



Fabian Kempf

kempf@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

Nelson-Patrick-Verfahren

Minimierungsmethoden

Formale algebraische Minimierung

→ Das Nelson/Petrick-Verfahren

- sehr **leistungsfähiges algebraisches** Verfahren
- **Nelson-Verfahren:** Bestimmung der **Menge aller Primimplikanten** (bzw. Primimplikaten)
- **Petrick-Verfahren:** Bestimmung der **kostenminimalen Auswahl** von **Primimplikanten** zur **Einstellenüberdeckung** (bzw. Primimplikaten zur Nullstellenüberdeckung)
Alternativ: graphisch mit Überdeckungstabelle
+ Regeln zur Abarbeitung/Vereinfachung

Ergebnis: **kostenminimaler algebraischer Ausdruck** der zu realisierenden digitalen Schaltfunktion

- Ziel: liefert zu einer (ggf. unvollständig definierten) Schaltfunktion f alle...

...Primimplikanten:

- Bildung der **Einsstellenergänzung** f^E : Alle Freistellen werden zu „1“ deklariert
- Mittels bekannter algebraischer Verfahren wird die **KNF** [!] von f^E gebildet

...Primimplikate:

- Bildung der **Nullstellenergänzung** f^N : Alle Freistellen werden zu „0“ deklariert
- Mittels bekannter algebraischer Verfahren wird die **DNF** [!] von f^N gebildet

- Schrittweise ausdistribuierten, Termanteile, die **ausschließlich Freistellen** von f überdecken, direkt streichen
- Die Anzahl der Primblöcke kann anschließend mit dem **Petricks-Verfahren** minimiert werden

Beispiel:

■ Man nehme eine **Nullblocküberdeckung**:

$$f^E = (\overline{x_1} \vee x_2) \& (\overline{x_1} \vee x_3)$$

	$\overline{x_1}$			
	1	0	0	1
x_2	-	0	1	-
	x_3			

■ Durch **Ausdistribuierten** + **Umformung** erhält man:

$$\begin{aligned}
 f^E &= (\overline{x_1} \vee x_2) \& (\overline{x_1} \vee x_3) \\
 &= \overline{x_1} \overline{x_1} \vee \overline{x_1} x_3 \vee \overline{x_1} x_2 \vee x_2 x_3 \\
 &= \overline{x_1} \vee \overline{x_1} x_3 \vee \overline{x_1} x_2 \vee x_2 x_3 \\
 &= \overline{x_1} \vee \overline{x_1} x_2 \vee x_2 x_3 \\
 &= \overline{x_1} \vee x_2 x_3 \\
 &= \overline{x_1} \vee (x_2 \& x_3)
 \end{aligned}$$

Distributivgesetz

Regel R7

Absorption (R11)

Absorption (R11)

	$\overline{x_1}$			
	1	0	0	1
x_2	-	0	1	-
	x_3			

Überdeckungsproblem

- Bei dem **Nelson-Verfahren** erfolgte nur die Ermittlung **aller Primterme**
- Weiterhin gesucht: **optimale Auswahl** der **Primterme**
 - eine **Auswahl** von **Primtermen**, die **alle Einsstellen** (Nullstellen) der gewünschten Funktion berücksichtigt wird **Überdeckung** genannt
- Lösung: graphische **Auswahl** der **Primterme** mit **Überdeckungstabelle**
 - für **jeden Primterm** wird angegeben, **welche Einsstellen** (bzw. Nullstellen) er **überdeckt**
 - zur **Bewertung** wird eine Spalte mit **Kosten c_k** angefügt
 - **Überdeckungstabelle** wird mit Hilfe bestimmter Regeln abgearbeitet (vereinfacht) -> **Kernermittlung** + **Dominanzregeln**
 - **algebraische** Behandlung der **optimalen Auswahl** von **Primtermen** auch möglich:
 - Bildung und Auswertung des **Petrick-Ausdrucks**!
- Ergebnis: **kostenminimale Überdeckung** der Schaltfunktion

Kernermittlung:

- Wenn eine **Einsstelle** (Nullstelle) nur durch einen **einzigsten Primterm abgedeckt** wird, nennt man den **Primimplikanten** (Primimplikaten) **Kernimplikant** (Kernimplikat)
- **Kernimplikanten** (Kernimplikate) **müssen** auf jeden Fall in die **Überdeckungslösung** aufgenommen werden
- **Spalten von Einstellen** (Nullstellen) in der **Überdeckungstabelle**, die von **Kernimplikanten** (Kernimplikaten) **abgedeckt** werden, können **gestrichen** werden, und müssen in der weiteren Abarbeitung nicht mehr berücksichtigt werden

Minimierungsmethoden

Kernermittlung und Vereinfachung der Überdeckungstabelle

Beispiel:

k	PI	j							p_i	c_i
		0	2	4	11	12	14	16		
1	$x_4 x_2$					x		x	p_1	c_1
2	$\overline{x_3} x_2$		x			x			p_2	c_2
3	$x_4 x_3 \overline{x_1}$						x	x	p_3	c_3
4	$\overline{x_4} \overline{x_3} \overline{x_1}$				x				p_4	c_4
5	$x_4 x_2 x_1$	x		x					p_5	c_5
6	$\overline{x_4} \overline{x_3} \overline{x_1}$	x	x						p_6	c_6
7	$x_3 \overline{x_2} \overline{x_1}$			x			x		p_7	c_7

Dominanzregeln

Spaltendominanzregeln:

■ Spaltendominanz in der Überdeckungstabelle:

i_1	i_2	
X	X	p_1
		p_2
X	X	p_3
X		p_4
X		p_5

i_1	i_2	
X	X	p_1
		p_2
X	X	p_3
X		p_4
X		p_5

■ Wenn die Spalte i_2 durch einen der Terme p_1 oder p_3 *überdeckt* wird, so wird dadurch auch i_1 überdeckt

also: Einststelle der Spalte i_1 ist durch p_1 oder p_3 auch realisiert

■ Man sagt: ("Vektor" i_1) *dominiert* ("Vektor" i_2) und schreibt: $i_1 \geq i_2$

■ **Dominierende Spalten** (hier: i_1) können **gestrichen** werden

Dominanzregeln

Zeilendominanzregeln:

■ Zeilendominanz in der Überdeckungstabelle:

i_1	X	X	X	X	p_1	c_1
i_2		X			p_2	c_2
...						
i_k	X		X	X	p_k	c_k

i_1	X	X	X	X	p_1	c_1
i_2		X			p_2	c_2
...						
i_k	X		X	X	p_k	c_k

■ Wenn eine Zeile i_2 ($\cong$ Primterm p_2) nur Spalten ($\cong$ Einstellen) überdeckt, die auch von einer anderen Zeile i_1 ($\cong$ Primterm p_1) überdeckt werden

→ i_2 wird von i_1 dominiert: $i_2 \leq i_1$, und

es gilt: $(\text{Kosten } c_1) \leq (\text{Kosten } c_2)$

→ die Zeile i_2 kann gestrichen werden

Petrack-Verfahren:

- Das Petrick-Verfahren ist eine algebraische Methode
 - dient zur Bestimmung kostenminimaler Lösungen von Überdeckungsproblemen
- Es kann direkt nach dem Nelson-Verfahren zur kostenminimalen Auswahl von Primtermen verwendet werden
- Spaltendominanzen und Zeilendominanzen können algebraisch mit Hilfe des Petrick-Verfahrens in Form von Absorptionsregeln bzw. Ausdistribuierten abgearbeitet bzw. bewiesen werden
- Petrick-Verfahren wird bei *zyklischen Resttabellen* verwendet

Petricks-Verfahren

Beispiel:

k	PI	j							p_i	c_i
		0	2	4	11	12	14	16		
1	$x_4 x_2$					x		x	p_1	c_1
2	$\overline{x_3} x_2$		x			x			p_2	c_2
3	$x_4 \overline{x_3} \overline{x_1}$						x	x	p_3	c_3
4	$\overline{x_4} \overline{x_3} x_1$				x				p_4	c_4
5	$\overline{\overline{x_4} \overline{x_2} \overline{x_1}}$	x		x					p_5	c_5
6	$\overline{\overline{x_4} \overline{x_3} \overline{x_1}}$	x	x						p_6	c_6
7	$\overline{\overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_1}}$			x			x		p_7	c_7

$$PA = \underbrace{(p_5 \vee p_6)}_{\text{blue}} \& \underbrace{(p_2 \vee p_6)}_{\text{green}} \& \underbrace{(p_5 \vee p_7)}_{\text{red}} \& p_4 \& (p_1 \vee p_2) \& (p_3 \vee p_7) \& (p_1 \vee p_3) = 1$$

- Im **Petricks-Ausdruck** kann man erfassen (beweisen!), dass die **Präsenzvariablen** der **Kernimplikanten** (p_4) **immer eins** sein müssen

- Auch der **Petrick-Ausdruck** wird durch **Distributionsregeln** und **Absorptionsregeln** vereinfacht

Beispiel:

$$PA = (p_5 \vee p_6) \& (p_2 \vee p_6) \& (p_5 \vee p_7) \& p_4 \& (p_1 \vee p_2) \& (p_3 \vee p_7) \& (p_1 \vee p_3) = 1$$

= ...

$$= p_1 p_4 p_6 p_7 \vee p_2 p_3 p_4 p_5 \vee p_1 p_3 p_4 p_5 p_6 \vee p_2 p_3 p_4 p_6 p_7 \vee p_1 p_2 p_4 p_5 p_7 = 1$$

$$= p_4 \& (p_1 p_6 p_7 \vee p_2 p_3 p_5 \vee p_1 p_3 p_5 p_6 \vee p_2 p_3 p_6 p_7 \vee p_1 p_2 p_5 p_7) = 1$$

$$PA = p_1 p_4 p_6 p_7 \vee p_2 p_3 p_4 p_5 \vee p_1 p_3 p_4 p_5 p_6 \vee p_2 p_3 p_4 p_6 p_7 \vee p_1 p_2 p_4 p_5 p_7 = 1$$

Überdeckungsproblem

- Damit der Petrick-Ausdruck ~ 1 wird, muss mindestens einer der disjunktiv (oder) verknüpften konjunktiven (und) Teilterme eins sein
- Jeder konjunktive Teilterm repräsentiert genau eine mögliche Lösung des Auswahlproblems
- Zur Auswahl der optimalen Lösung:
 - die Kosten c_k der Primterme p_k werden herangezogen
 - Anzahl der Literale von p_k
- Vergleich der Kostensummen K aller möglichen Lösungen
(K = Summe der Literale der jeweils notwendigen Primterme)
 - diejenige Überdeckung mit optimalen Kosten kann ermittelt werden

Überdeckungsproblem

Beispiel:

$$PA = p_1 p_4 p_6 p_7 \vee p_2 p_3 p_4 p_5 \vee p_1 p_3 p_4 p_5 p_6 \vee p_2 p_3 p_4 p_6 p_7 \vee p_1 p_2 p_4 p_5 p_7 = 1$$

mit $c_1=c_2=2$; $c_3 \dots c_7=3$

$p_1 p_4 p_6 p_7$ $K = 11$

$p_2 p_3 p_4 p_5$ $K = 11$

$p_1 p_3 p_4 p_5 p_6$ $K = 14$

$p_2 p_3 p_4 p_6 p_7$ $K = 14$

$p_1 p_2 p_4 p_5 p_7$ $K = 13$

k	PI	j							p_i	c_i
		0	2	4	11	12	14	16		
1	$x_4 x_2$					x		x	p_1	c_1
2	$\overline{x_3} x_2$		x			x			p_2	c_2
3	$x_4 x_3 x_1$						x	x	p_3	c_3
4	$\overline{x_4} x_3 x_1$				x				p_4	c_4
5	$\overline{x_4} x_2 x_1$	x		x					p_5	c_5
6	$\overline{x_4} x_3 x_1$	x	x						p_6	c_6
7	$x_3 x_2 x_1$			x			x		p_7	c_7

■ Damit ergeben sich **zwei kostenminimale Lösungen:**

$p_1 p_4 p_6 p_7$ und $p_2 p_3 p_4 p_5$

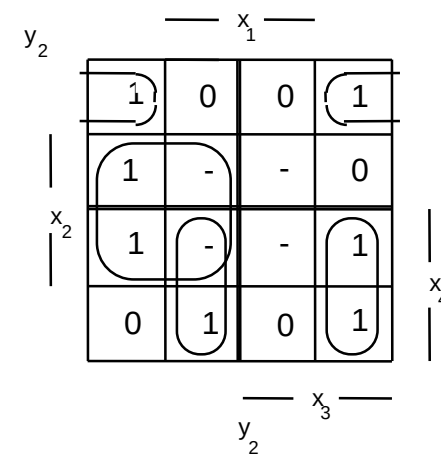
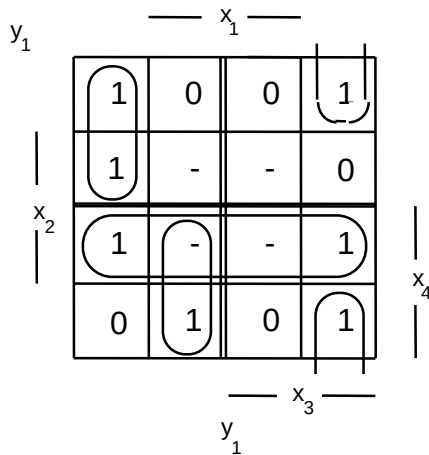
Überdeckungsproblem

Beispiel:

- die zugehörigen **disjunktiven Minimallösungen (DMF)** mit nur **11 Literalen** sind:

$$y_1 = x_4 x_2 \vee \overline{x_4} \overline{x_3} x_1 \vee \overline{x_4} \overline{x_2} \overline{x_1} \vee x_3 \overline{x_2} \overline{x_1} \quad \text{und}$$

$$y_2 = \overline{x_3} x_2 \vee x_4 x_3 \overline{x_1} \vee x_4 \overline{x_3} x_1 \vee \overline{x_4} \overline{x_2} \overline{x_1}$$



Fabian Kempf

kempf@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)



Aufgabe 4

4. Aufgabe – 4.1

Gegeben sei eine unvollständige definierte Schaltfunktion $y = (d, c, b, a)$ durch ihre Nullstellenmenge $\{X_j\}_0$ und ihre Freistellenmenge $\{X_j\}_-$.

$$\{X_j\}_0 = \{ (-,0,-,0), (1,-,0,1), (0, 1, 1, 0) \}$$

$$\{X_j\}_- = \{ (-,-,1,1) \}$$

- **4.1** Geben Sie für y eine Gleichung an, die eine Konjunktion der Nullblöcke darstellt.

4. Aufgabe – 4.1

- **4.1** Geben Sie für y eine Gleichung an, die eine Konjunktion der Nullblöcke darstellt.

$$\{X_j\}_0 = \{(-,0,-,0), (1,-,0,1), (0,1,1,0)\}$$

$$\{X_j\}_- = \{(-,-,1,1)\}$$

$$\downarrow$$

$$(d,c,b,a)$$

- Zunächst die Nullstellenmenge eintragen
- Anschließend die Freistellenmenge
- Einstellen vervollständigen und Funktion aufstellen

	a			
	0	1	1	1
	0	-	-	0
	0	-	-	1
	0	0	0	1
b				d
				c

$$y = (a+c) \cdot (\bar{a}+b+\bar{d}) \cdot (a+\bar{b}+\bar{c}+d)$$

4. Aufgabe – 4.2

- 4.2 Bestimmen Sie daraus alle Primimplikanten mit Hilfe des NELSON-Verfahrens.

$$\begin{aligned}
 y &= (a + c) \cdot (\bar{a} + b + \bar{d}) \cdot (a + \bar{b} + \bar{c} + d) \\
 &= (\cancel{a\bar{a}} + ab + a\bar{d} + c\bar{a} + cb + c\bar{d}) \cdot (a + \bar{b} + \bar{c} + d) \\
 &= (ab + a\bar{d} + c\bar{a} + cb + c\bar{d}) \cdot (a + \bar{b} + \bar{c} + d) \\
 &= \boxed{ab\bar{a}} + \cancel{abb} + \boxed{abc} + \boxed{abd} + \boxed{a\bar{d}a} + \boxed{a\bar{d}b} + \boxed{a\bar{d}c} + \cancel{a\bar{d}d} + \cancel{caa} + \cancel{cab} + \cancel{cac} + \cancel{cad} + \\
 &\quad \boxed{cba} + \cancel{cbb} + \cancel{cbc} + cbd + \boxed{c\bar{d}a} + \cancel{c\bar{d}b} + \cancel{c\bar{d}c} + \cancel{c\bar{d}d} \\
 &= \boxed{ba} + a\bar{d} + c\bar{a}\bar{b} + c\bar{a}\bar{d} + cbd + c\bar{b}\bar{d} \\
 &\quad \swarrow \\
 &\quad \text{Nur Freistellen} \rightarrow \text{kann entfallen} \\
 &= a\bar{d} + c\bar{a}\bar{b} + c\bar{a}\bar{d} + cbd + c\bar{b}\bar{d}
 \end{aligned}$$

	a			
	0	1	1	1
	0	1	5	4
b	0	-	-	0
	2	3	7	6
	0	-	-	1
	12	13	17	16
	0	0	0	1
	10	11	15	14
	d			

4. Aufgabe – 4.3

- **4.3** Stellen Sie für die Einsstellen von y eine Überdeckungstabelle auf.

Diagram of a 4x4 Karnaugh map for variables a, b, c, d . The map is labeled with a (horizontal), b (vertical), c (bottom), and d (right). The cells are numbered 0 to 15. The values in the cells are:

0	1	1	1
0	-	-	0
0	-	-	1
0	0	0	1

The cells containing '1' are highlighted in light blue. The cells containing '-' are also highlighted in light blue.

	1	4	5	14	16
$\overline{b}\overline{c}\overline{d}$		X	X		
$b\overline{c}\overline{d}$					X
$\overline{a}\overline{c}\overline{d}$				X	X
$\overline{a}\overline{b}\overline{c}$		X		X	
$\overline{a}\overline{d}$	X		X		

4. Aufgabe – 4.4

- 4.4 Ordnen Sie den Primimplikanten eine Präsenzvariable zu und geben Sie den Petrickausdruck an.

	1	4	5	14	16	Präsenzvar.
$\bar{b}c\bar{d}$		X	X			p_1
bcd					X	p_2
$\bar{a}cd$				X	X	p_3
$\bar{a}bc$		X		X		p_4
$a\bar{d}$	X		X			p_5

$$P_e = p_5 \cdot (p_1 + p_4) \cdot (p_1 + p_5) \cdot (p_3 + p_4) \cdot (p_2 + p_3)$$

$$= p_1 p_2 p_4 p_5 + p_1 p_3 p_5 + p_2 p_4 p_5 + p_3 p_4 p_5$$



4. Aufgabe – 4.5

■ 4.5 Bestimmen Sie daraus alle disjunktiven Minimalformen

	1	4	5	14	16	Präsenzvar.
$\overline{b}\overline{c}\overline{d}$		X	X			p_1
bcd					X	p_2
$\overline{a}cd$				X	X	p_3
$\overline{a}bc$		X		X		p_4
$a\overline{d}$	X		X			p_5

$$P_e = p_5 \cdot (p_1 + p_4) \cdot (p_1 + p_5) \cdot (p_3 + p_4) \cdot (p_2 + p_3)$$

$$= p_1 p_3 p_5 + p_2 p_4 p_5 + p_3 p_4 p_5$$

$$\text{DMF}_1: y = \overline{b}\overline{c}\overline{d} + \overline{a}cd + a\overline{d}$$

$$\text{DMF}_2: y = bcd + \overline{a}bc + a\overline{d}$$

$$\text{DMF}_3: y = \overline{a}cd + \overline{a}bc + a\overline{d}$$

4. Aufgabe – 4.6

- **4.6** Bearbeiten Sie die Überdeckungstabelle aus 4.3 mit Hilfe der Kernbestimmung und der Dominanzregeln

	1	4	5	14	16	Präsenzvar.
$\overline{bcd}$		X	X			p_1
bcd					X	p_2
$\overline{acd}$				X	X	p_3
$\overline{abc}$		X		X		p_4
$\overline{ad}$	X		X			p_5

Kernimplikant $p_5!!!$

4. Aufgabe – 4.6

- **4.6** Bearbeiten Sie die Überdeckungstabelle aus 4.3 mit Hilfe der Kernbestimmung und der Dominanzregeln

	1	4	5	14	16	Präsenzvar.
$\bar{b}c\bar{d}$		X	X			p_1
bcd					X	p_2
$\bar{a}cd$				X	X	p_3
$\bar{a}bc$		X		X		p_4
$\bar{a}\bar{d}$	X		X			p_5

- keine Spaltendominanz
- Zeilendominanz

$p_3 > p_2$ und $c_3 = c_2 \rightarrow p_2$ streichen

$p_4 > p_1$ und $c_4 = c_1 \rightarrow p_1$ streichen

4. Aufgabe – 4.6

- **4.6** Bearbeiten Sie die Überdeckungstabelle aus 4.3 mit Hilfe der Kernbestimmung und der Dominanzregeln

	1	4	5	14	16	Präsenzvar.
$\overline{bcd}$		X	X			p_1
bcd					X	p_2
$\overline{acd}$				X	X	p_3
$\overline{abc}$		X		X		p_4
$a\overline{d}$	X		X			p_5

- keine Spaltendominanz
- Zeilendominanz

$p_3 > p_2$ und $c_3 = c_2 \rightarrow p_2$ streichen

$p_4 > p_1$ und $c_4 = c_1 \rightarrow p_1$ streichen

4. Aufgabe – 4.6

- **4.6** Bearbeiten Sie die Überdeckungstabelle aus 4.3 mit Hilfe der Kernbestimmung und der Dominanzregeln

	1	4	5	14	16	Präsenzvar.
$\overline{bcd}$		X	X			p_1
bcd					X	p_2
$\overline{acd}$				X	X	p_3
$\overline{abc}$		X		X		p_4
$a\overline{d}$	X		X			p_5

p_3 und p_4 sind Kerngrößen

4. Aufgabe – 4.6

- **4.6** Bearbeiten Sie die Überdeckungstabelle aus 4.3 mit Hilfe der Kernbestimmung und der Dominanzregeln

	1	4	5	14	16	Präsenzvar.
$\overline{b}c\overline{d}$		X	X			p_1
bcd					X	p_2
$\overline{a}cd$				X	X	p_3
$\overline{a}bc$		X		X		p_4
$a\overline{d}$	X		X			p_5

Eine mögliche kostenminimale Realisierung umfasst somit die Primimplikanten p_3 , p_4 und p_5 !!!

Vergleich von 4.4 und 4.6

Vergleich!

Ergebnis aus 4.4

	1	4	5	14	16	Präsenzvar.
$\bar{b}\bar{c}\bar{d}$		X	X			p_1
bcd					X	p_2
$\bar{a}cd$				X	X	p_3
$\bar{a}bc$		X		X		p_4
$a\bar{d}$	X		X			p_5

$$P_e = p_5 \cdot (p_1 + p_4) \cdot (p_1 + p_5) \cdot (p_3 + p_4) \cdot (p_2 + p_3)$$

$$= p_1 p_2 p_4 p_5 + p_1 p_3 p_5 + p_2 p_4 p_5 + p_3 p_4 p_5$$

Ergebnis aus 4.6

	1	4	5	14	16	Präsenzvar.
$\bar{b}\bar{c}\bar{d}$		X	X			p_1
bcd					X	p_2
$\bar{a}cd$				X	X	p_3
$\bar{a}bc$		X		X		p_4
$a\bar{d}$	X		X			p_5

Eine mögliche kostenminimale Realisierung umfasst somit die Primimplikanten p_3 , p_4 und p_5 !!!

Fabian Kempf

kempf@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

6. Aufgabe: zyklische Resttabelle

6. Aufgabe – 6.1

Gegeben sei die folgende boolesche Funktion f in vier Variablen durch ihre Dezimaläquivalentdarstellung $\{0, 1, 2, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 15\}$

- **6.1** Bestimmen Sie alle Primimplikanten und deren Typ aus dem Symmetrie diagramm. Stellen Sie die Überdeckungsmatrix auf und bestimmen Sie den zyklischen Kern (falls vorhanden).

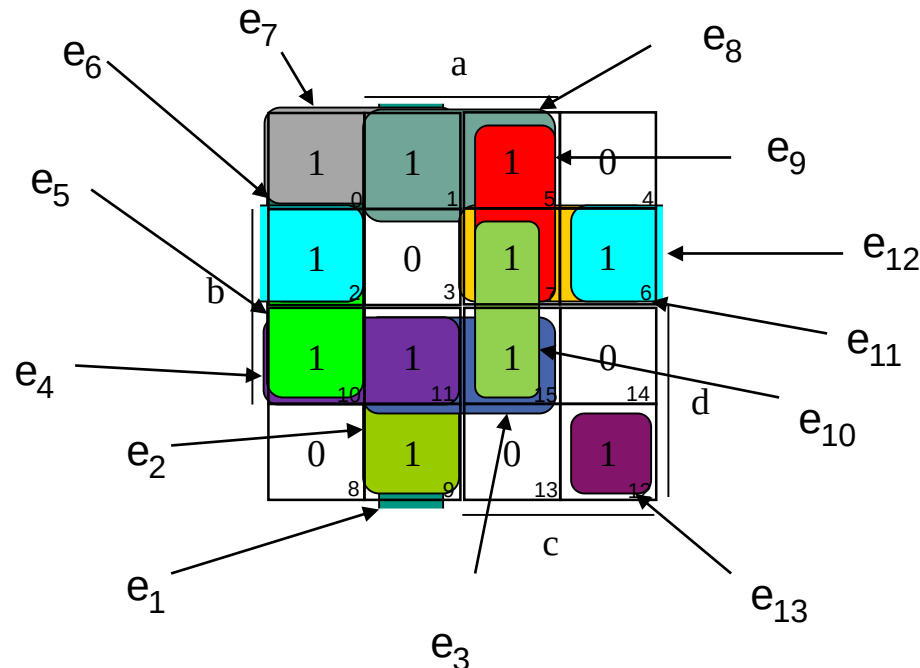
a

	1	1	1	0	
	0	1	5	4	
b	1	0	1	1	
	2	3	7	6	
	1	1	1	0	
	10	11	15	14	d
	0	1	0	1	
	8	9	13	12	
					c

6. Aufgabe – 6.1

Gegeben sei die folgende boolesche Funktion f in vier Variablen durch ihre Dezimaläquivalentdarstellung $\{0, 1, 2, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 15\}$

- **6.1** Bestimmen Sie alle Primimplikanten und deren Typ aus dem Symmetriediagramm. Stellen Sie die Überdeckungsmatrix auf und bestimmen Sie den zyklischen Kern (falls vorhanden).



6. Aufgabe – 6.1

	0	1	2	5	6	7	9	10	11	12	15
e_1		X					X				
e_2							X		X		
e_3									X		X
e_4								X	X		
e_5			X					X			
e_6	X		X								
e_7	X	X									
e_8		X		X							
e_9				X		X					
e_{10}						X					X
e_{11}					X	X					
e_{12}			X		X						
e_{13}											

essentielle Spalten

überdeckte Spalten

überdeckte Zeilen

6. Aufgabe – 6.1

- Fallunterscheidung nötig, um Verfahren fortzusetzen
- Beachte: es ist NICHT ausreichend das Verfahren nur für einen Fall zum Ende zu bringen, sondern es müssen alle möglichen Pfade verfolgt werden.
- Bsp. für eine Fallunterscheidung:
 - Entscheidung für e_8
 - im Anschluss ist das Verfahren auch für den Fall, dass e_9 statt e_8 verwendet wird, durchzuführen

6. Aufgabe – 6.1

	0	1	2	5	6	7	9	10	11	12	15
e_1		X					X				
e_2							X		X		
e_3									X		X
e_4								X	X		
e_5			X					X			
e_6	X		X								
e_7	X	X									
e_8		X		X							
e_9				X		X					
e_{10}						X					X
e_{11}					X	X					
e_{12}			X		X						
e_{13}										X	

Entscheidung für e_8 !!!

überdeckte Spalten

überdeckte Zeilen

1. Fall: wir entscheiden uns für e_8 !!!

6. Aufgabe – 6.1

	0	1	2	5	6	7	9	10	11	12	15
e_1		X					X				
e_2							X		X		
e_3									X		X
e_4								X	X		
e_5			X					X			
e_6	X		X								
e_7	X	X									
e_8		X		X							
e_9				X		X					
e_{10}						X					X
e_{11}					X	X					
e_{12}			X		X						
e_{13}										X	

essentielle Spalten

überdeckte Spalten

überdeckte Zeilen

1. Fall: wir entscheiden uns für e_8 !!!

6. Aufgabe – 6.1

	0	1	2	5	6	7	9	10	11	12	15
e_1		X					X				
e_2							X		X		
e_3									X		X
e_4								X	X		
e_5			X					X			
e_6	X		X								
e_7	X	X									
e_8		X		X							
e_9				X		X					
e_{10}						X					X
e_{11}					X	X					
e_{12}			X		X						
e_{13}										X	

essentielle Spalten

überdeckte Spalten

überdeckte Zeilen

1. Fall: wir entscheiden uns für e_8 !!!

6. Aufgabe – 6.1

	0	1	2	5	6	7	9	10	11	12	15
e_1		X					X				
e_2							X		X		
e_3									X		X
e_4								X	X		
e_5			X					X			
e_6	X		X								
e_7	X	X									
e_8		X	X				X				
e_9				X		X					
e_{10}						X					X
e_{11}					X	X					
e_{12}			X		X						
e_{13}										X	

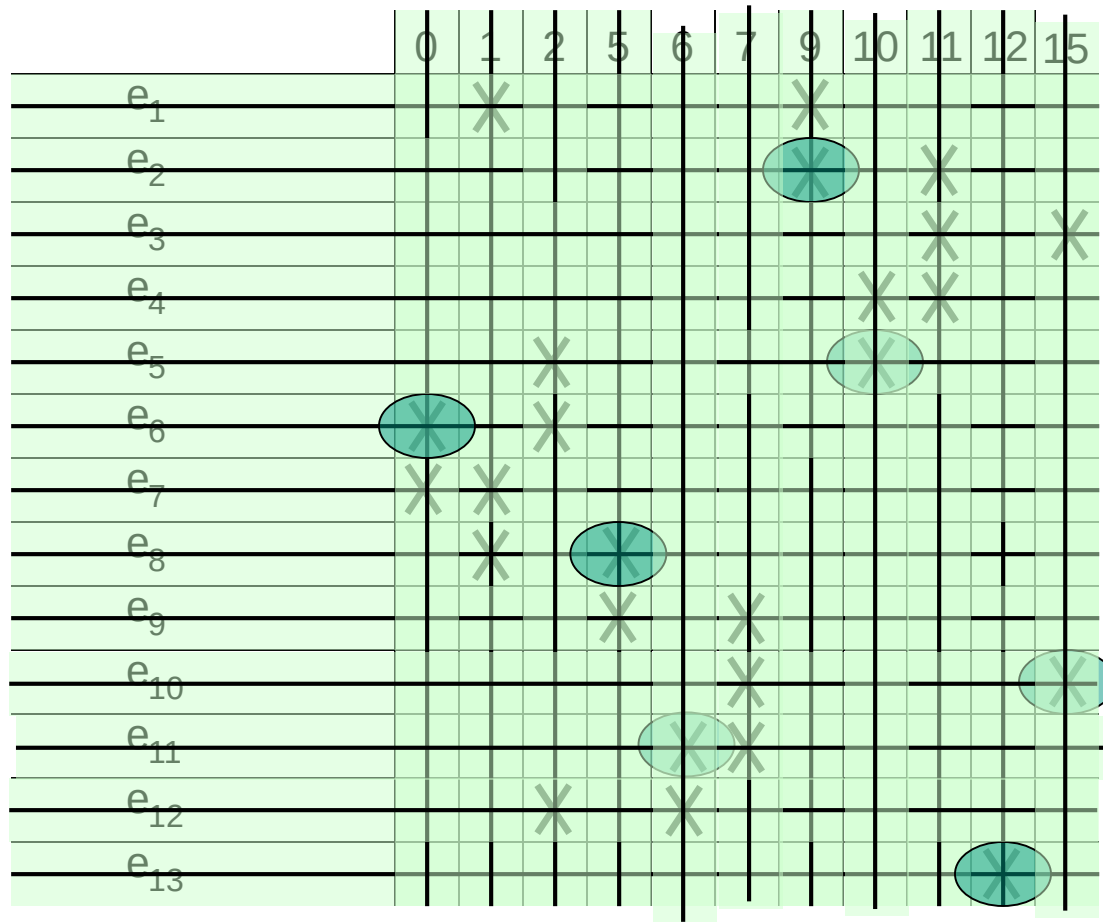
essentielle Spalten

überdeckte Spalten

überdeckte Zeilen

1. Fall: wir entscheiden uns für e_8 !!!

6. Aufgabe – 6.1



essentielle Spalten

überdeckte Spalten

überdeckte Zeilen

1. Fall: wir entscheiden uns für e_8 !!!

6. Aufgabe – 6.1

	0	1	2	5	6	7	9	10	11	12	15
e ₁		X					X				
e ₂							X		X		
e ₃									X		X
e ₄								X	X		
e ₅			X					X			
e ₆	X		X								
e ₇	X	X									
e ₈		X		X							
e ₉				X		X					
e ₁₀						X					X
e ₁₁					X	X					
e ₁₂			X		X						
e ₁₃											

Entscheidung für e₉ !!!

2. Fall: wir entscheiden uns für e₉ !!!

6. Aufgabe – 6.1

	0	1	2	5	6	7	9	10	11	12	15
e_1		X					X				
e_2							X		X		
e_3									X		X
e_4								X	X		
e_5			X					X			
e_6	X		X								
e_7	X	X									
e_8		X		X							
e_9				X		X					
e_{10}						X					X
e_{11}					X	X					
e_{12}			X		X						
e_{13}										X	

essentielle Spalten

überdeckte Spalten

überdeckte Zeilen

2. Fall: wir entscheiden uns für e_9 !!!

6. Aufgabe – 6.1

	0	1	2	5	6	7	9	10	11	12	15
e_1		X					X				
e_2							X		X		
e_3									X		X
e_4								X	X		
e_5			X					X			
e_6	X		X								
e_7	X	X									
e_8		X		X							
e_9				X		X					
e_{10}						X					X
e_{11}					X	X					
e_{12}			X		X						
e_{13}										X	

essentielle Spalten

überdeckte Spalten

überdeckte Zeilen

2. Fall: wir entscheiden uns für e_9 !!!

6. Aufgabe – 6.1

	0	1	2	5	6	7	9	10	11	12	15
e_1		X					X				
e_2							X		X		
e_3									X		X
e_4								X	X		
e_5			X					X			
e_6	X		X								
e_7	X	X									
e_8		X		X							
e_9				X		X					
e_{10}						X					X
e_{11}					X	X					
e_{12}			X		X						
e_{13}										X	

essentielle Spalten

überdeckte Spalten

überdeckte Zeilen

2. Fall: wir entscheiden uns für e_9 !!!

6. Aufgabe – 6.1

	0	1	2	5	6	7	9	10	11	12	15
e_1		X					X				
e_2							X		X		
e_3									X		X
e_4								X	X		
e_5			X				X				
e_6	X		X								
e_7	X	X									
e_8		X		X							
e_9			X			X					
e_{10}						X					X
e_{11}					X	X					
e_{12}			X		X						
e_{13}										X	

essentielle Spalten

überdeckte Spalten

überdeckte Zeilen

2. Fall: wir entscheiden uns für e_9 !!!

6. Aufgabe – 6.1

	0	1	2	5	6	7	9	10	11	12	15
e_1		X					X				
e_2							X		X		
e_3									X		X
e_4								X	X		
e_5			X				X				
e_6	X		X								
e_7	X	X									
e_8		X		X							
e_9				X		X					
e_{10}						X					X
e_{11}					X	X					
e_{12}			X		X						
e_{13}										X	

essentielle Spalten

überdeckte Spalten

überdeckte Zeilen

2. Fall: wir entscheiden uns für e_9 !!!

6. Aufgabe – 6.1

	0	1	2	5	6	7	9	10	11	12	15
e_1		X					X				
e_2							X		X		
e_3									X		X
e_4								X	X		
e_5			X				X				
e_6	X		X								
e_7	X	X									
e_8		X		X							
e_9				X		X					
e_{10}						X					X
e_{11}					X	X					
e_{12}			X		X						
e_{13}										X	

essentielle Spalten

überdeckte Spalten

überdeckte Zeilen

2. Fall: wir entscheiden uns für e_9 !!!

6. Aufgabe – 6.1

- **Beachte:** alle Pfade müssen überprüft werden
(nicht immer sind die Lösungen gleichwertig)
- Hier nur eine Fallunterscheidung nötig.
Ggf. sind aber mehr als zwei Pfade zu untersuchen.
- Alternative: Lösung über Petrick-Ausdruck

6. Aufgabe – 6.2

- **6.2** Geben Sie eine kostenminimale zweistufige Und-/Oder-Realisierung an. Stellen Sie für diese Funktion den Petrick-Ausdruck auf.

Ergebnis aus 6.1:

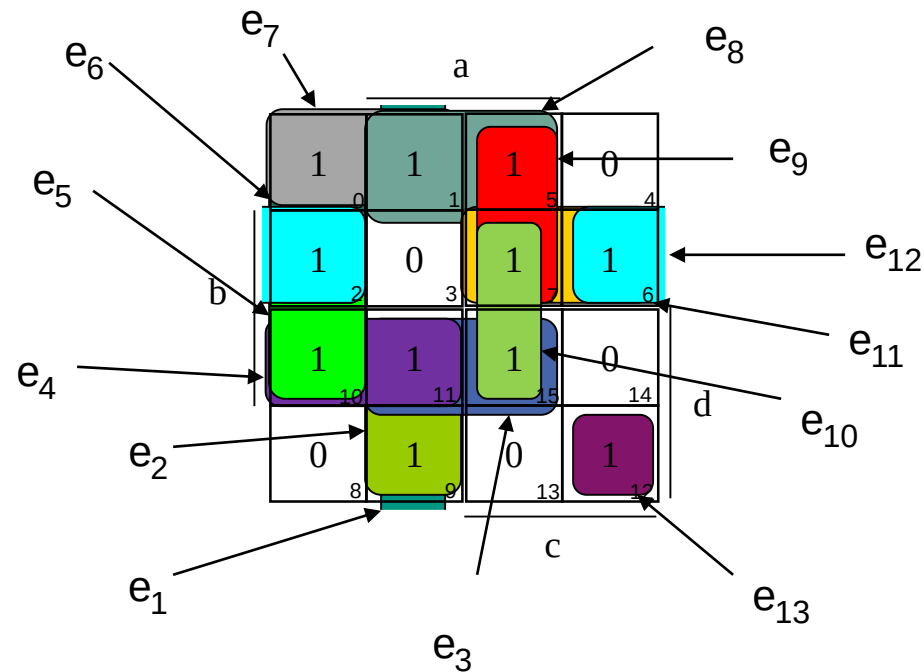
$$f = e_{13} + e_5 + e_6 + \begin{cases} e_1 + e_3 + e_9 + e_{12} \\ e_2 + e_8 + e_{10} + e_{11} \end{cases}$$

Beide Lösungen sind gleichwertig!!!

6. Aufgabe – 6.2

Petricksausdruck:

$$P_e =$$



Fabian Kempf

kempf@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

7. Aufgabe: Petrickausdruck

7. Aufgabe

Ein Elektrotechnik-Student hat zur Vorbereitung auf eine Prüfung verschiedene Bücher (AE) verwendet, mit denen die Teilkapitel (1-8) des Prüfungsfaches unterschiedlich abgedeckt werden. Um nun für den Prüfungstag herauszufinden, welche Bücher in die Klausur mitzunehmen sind, soll eine Überdeckungstabelle aufgestellt werden. Es wird hierbei vorausgesetzt, dass die Teilkapitel in den jeweiligen Büchern gleich gut beschrieben worden sind.

Buch	Beschrieben Kapitel	Gewicht
A	2, 5, 7	750g
B	4, 5, 7	300g
C	3, 8	170g
D	4, 8	500g
E	1, 3, 6	200g

7. Aufgabe – 7.1

- **7.1** Ergänzen Sie die Überdeckungstabelle und stellen Sie den Petrickausdruck auf.

Buch	Beschriebene Kapitel	Gewicht
A	2, 5, 7	750g
B	4, 5, 7	300g
C	3, 8	170g
D	4, 8	500g
E	1, 3, 6	200g

	1	2	3	4	5	6	7	8
A		X			X		X	
B				X	X		X	
C			X					X
D				X				X
E	X		X			X		

$$P_e = E \cdot A \cdot (C + E) \cdot (B + D) \cdot (A + B) \cdot E \cdot (A + B) \cdot (C + D)$$

7. Aufgabe – 7.2

- 7.2 Ermitteln Sie durch schaltalgebraische Umformung alle irredundanten Überdeckungen und geben Sie die Überdeckungen mit dem geringsten Gesamtgewicht an.

$$P_e = \boxed{E} \cdot \boxed{A} \cdot \boxed{(C + E)} \cdot (B + D) \cdot \boxed{(A + B)} \cdot \boxed{E} \cdot \boxed{(A + B)} \cdot (C + D)$$

$$= \boxed{E} \cdot \boxed{A} \cdot (B + D) \cdot (C + D)$$

$= EABC + EABD + EADC + EAD \rightarrow 4 \text{ Kombinationen möglich !!!}$

$$P_e = \underbrace{EABC}_{\sum=1420g} + \underbrace{EABD}_{\sum=1750g} + \underbrace{EADC}_{\sum=1620g} + \underbrace{EAD}_{\sum=1450g}$$

→ Die kostengünstigste Kombination ist EABC mit einem Gesamtgewicht von 1420g

Buch	Gewicht
A	750g
B	300g
C	170g
D	500g
E	200g

Fabian Kempf

kempf@kit.edu

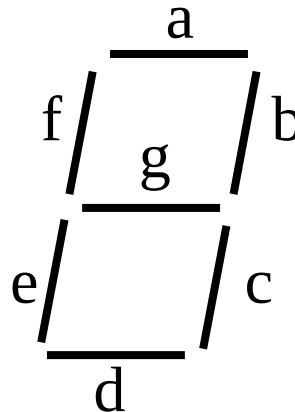
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

5. Aufgabe: 7-Segment-Anzeige

5. Aufgabe

Die Ansteuerung einer Sieben-Segment-Anzeige hat vier Eingänge w, x, y, z und sieben Ausgänge a, b, c, d, e, f, g . Die Zuordnung der Ausgangsvariablen zu den sieben Segmenten ist der folgenden Abbildung zu entnehmen.

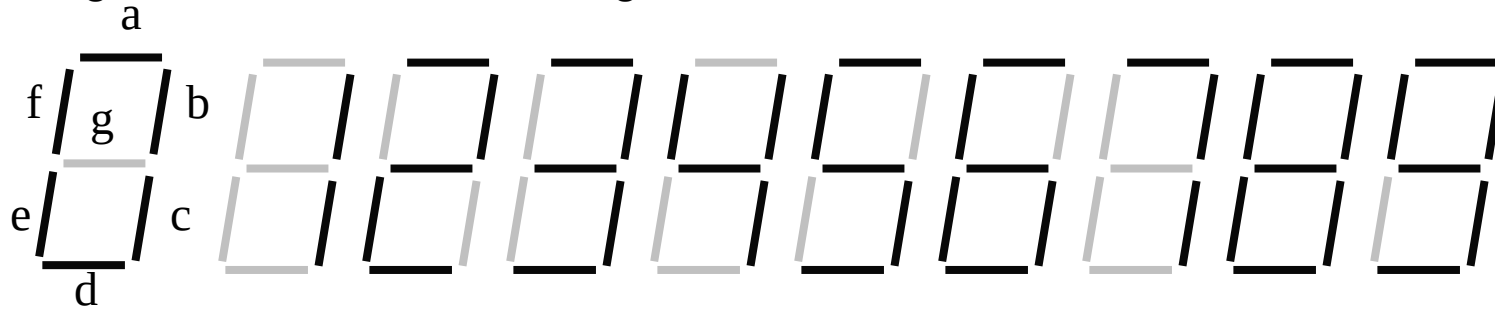


Falls die Ziffern $0, \dots, 9$ binär kodiert an den Eingängen anliegen, soll die Ziffer entsprechend in der Sieben-Segment-Anzeige erscheinen.

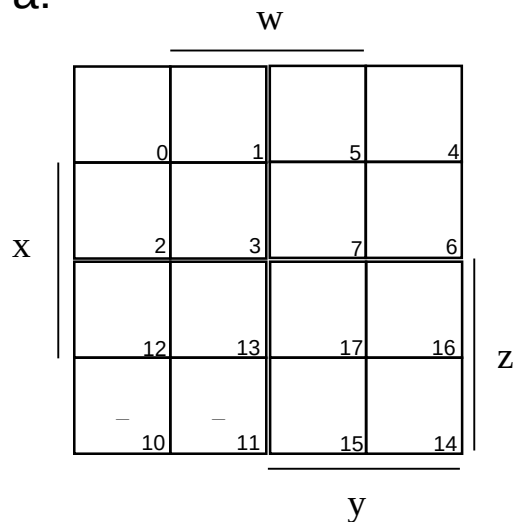
Beispiel: der 0 entspricht $w=x=y=z=0$, die Ausgänge a, b, c, d, e, f müssen dann zur Anzeige der 0 den Wert 1 aufweisen.

5. Aufgabe – 5.1

Festlegen der Zahlendarstellung:

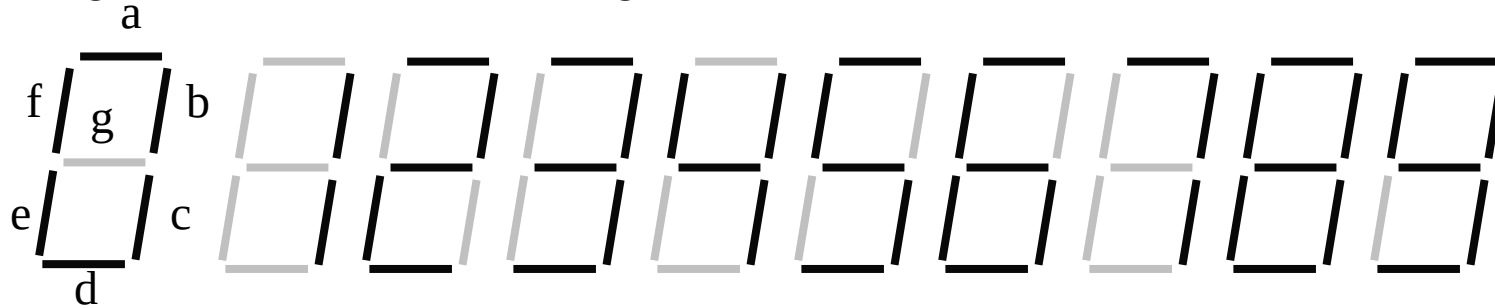


a:



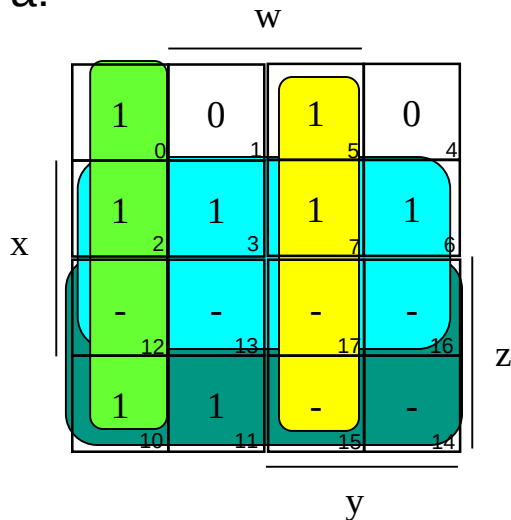
5. Aufgabe – 5.1

Festlegen der Zahlendarstellung:



Aufstellung der Funktionen:

a:



$$a = z$$

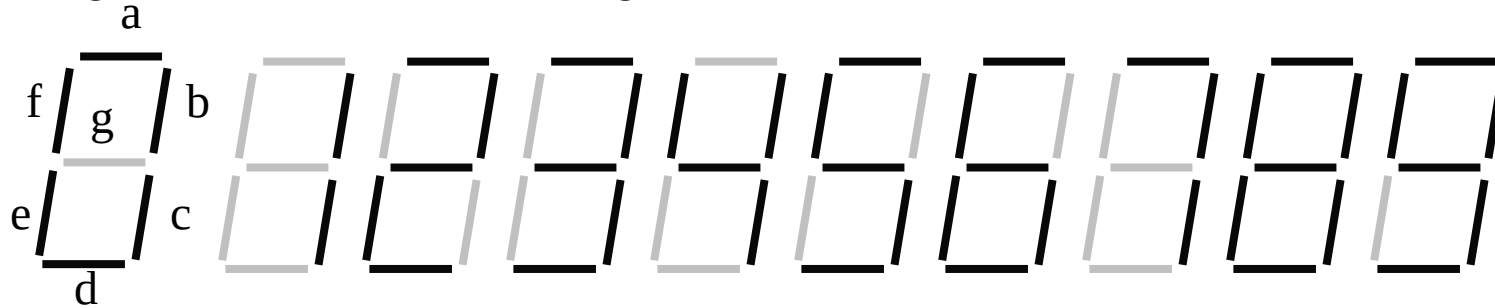
$$a = z + x$$

$$a = z + x + \overline{w}y$$

$$\underline{\underline{a = z + x + \overline{w}y + wy}}$$

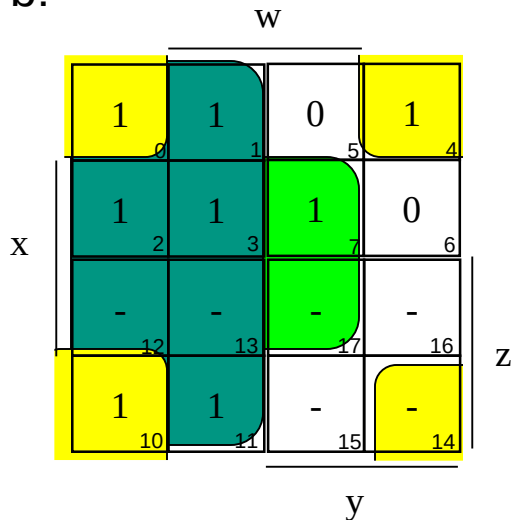
5. Aufgabe – 5.1

Festlegen der Zahlendarstellung:



Aufstellung der Funktionen:

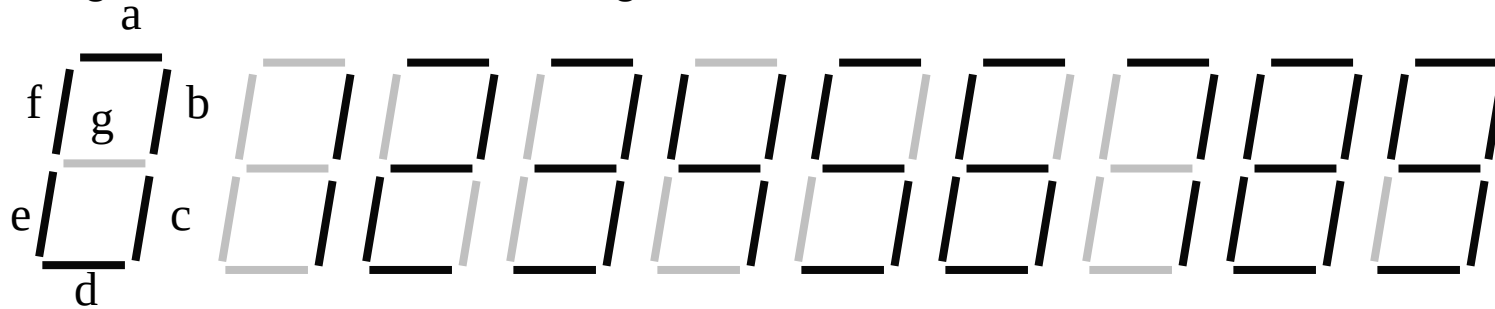
b:



$$b = \overline{y} + \overline{w}x + wx$$

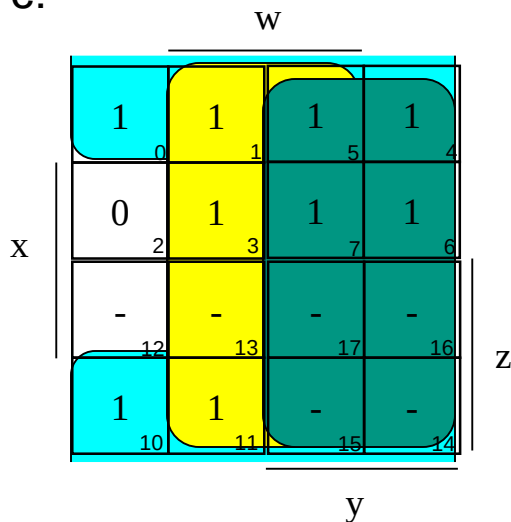
5. Aufgabe – 5.1

Festlegen der Zahlendarstellung:



Aufstellung der Funktionen:

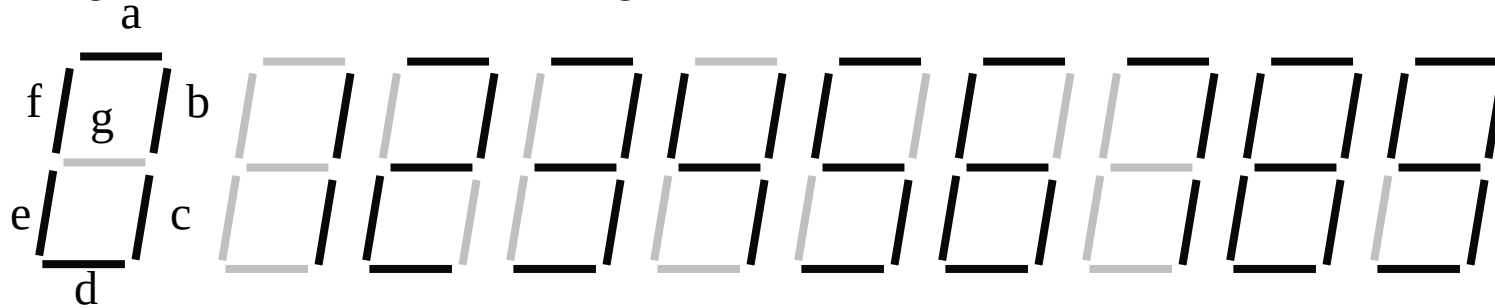
C:



$$c = y + w + \bar{x}$$

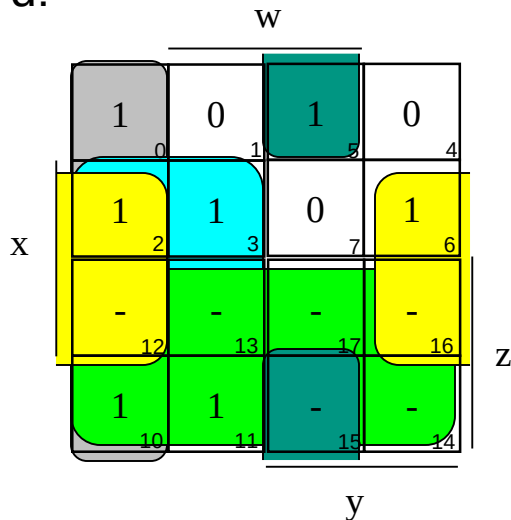
5. Aufgabe – 5.1

Festlegen der Zahlendarstellung:



Aufstellung der Funktionen:

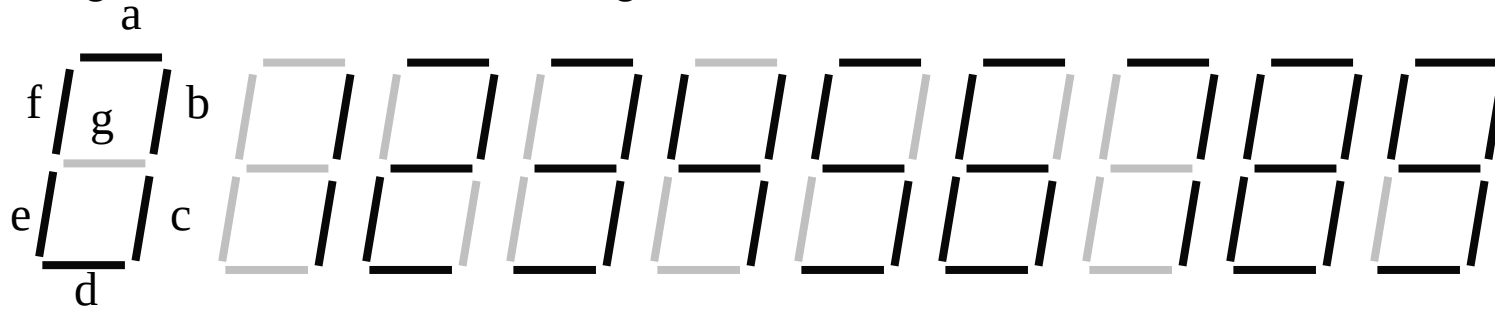
d:



$$d = z + \overline{w}\overline{y} + x\overline{w} + x\overline{y} + w\overline{y}x$$

5. Aufgabe – 5.1

Festlegen der Zahlendarstellung:



Aufstellung der Funktionen:

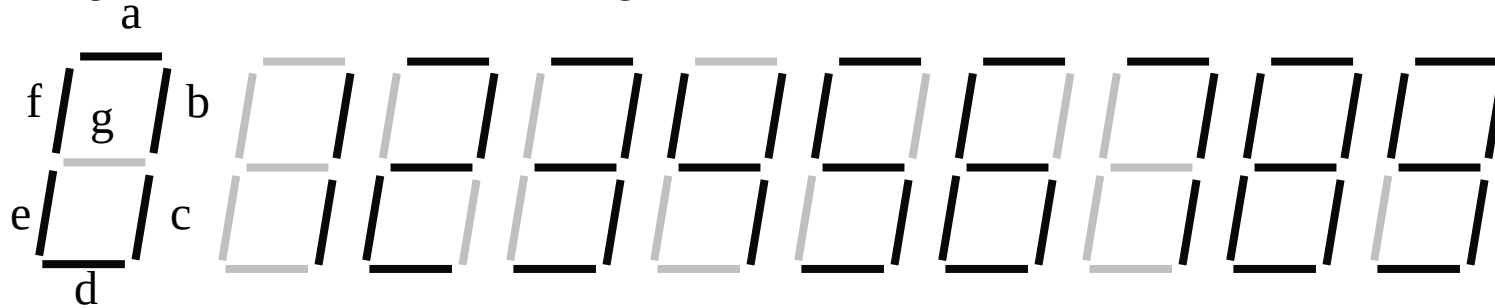
e:

	w				
	1	0	0	0	
	0	1	5	4	
	2	3	7	6	
x	1	0	0	1	
	-	-	-	-	
	12	13	17	16	
	10	11	15	14	
	y				
					z

$$e = \overline{w}\overline{y} + x\overline{w}$$

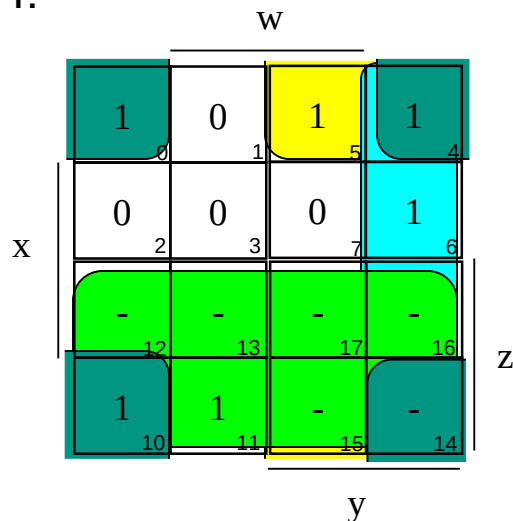
5. Aufgabe – 5.1

Festlegen der Zahlendarstellung:



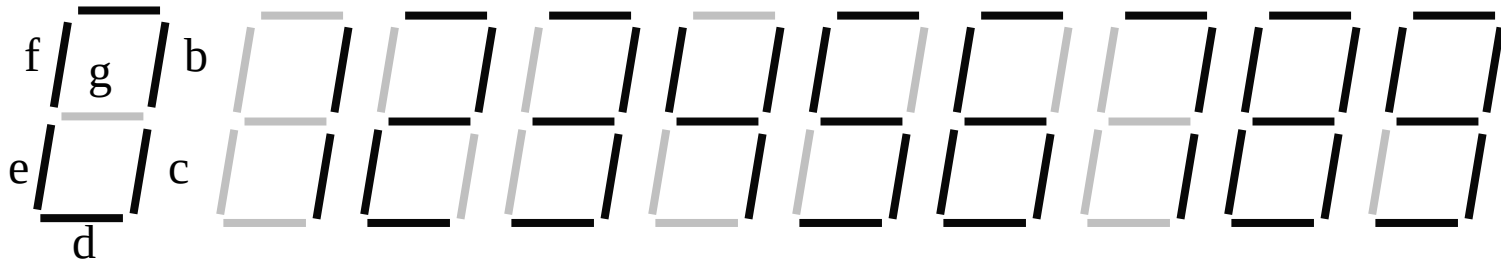
Aufstellung der Funktionen:

f:

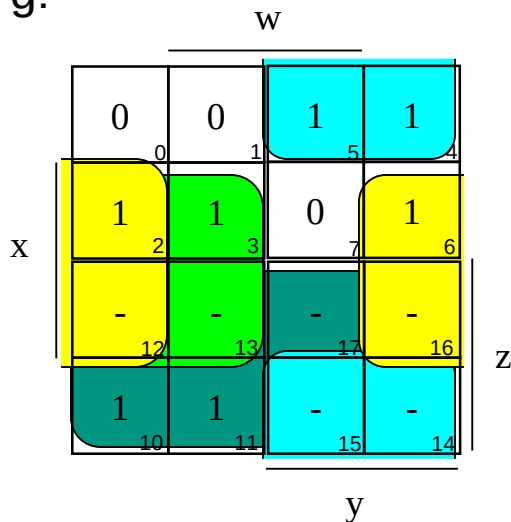


$$f = z + \overline{w}y + \overline{x}\overline{w} + y\overline{x}$$

a



g:



$$g = z + x\bar{y} + \bar{w}x + \bar{x}y$$

5. Aufgabe – 5.2

- Geben Sie eine möglichst einfache PLA-Realisierung an
- Insgesamt 15 Pls zu realisieren

$$\begin{array}{l} \overline{w}, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{wy}, \overline{wx}, \\ wx, xw, xy, xy, wy, wyx \end{array}$$

d.h. 15 Und-Gatter im PLA nötig,
falls keine Bündeloptimierung durchgeführt
wird

- Bündeloptimierung rechnergestützt
möglich
- ESPRESSO kann dazu eingesetzt werden

$$a = z + \overline{x} + \overline{wy} + wy$$

$$b = z + \overline{y} + \overline{wx} + wx$$

$$c = y + w + \overline{x}$$

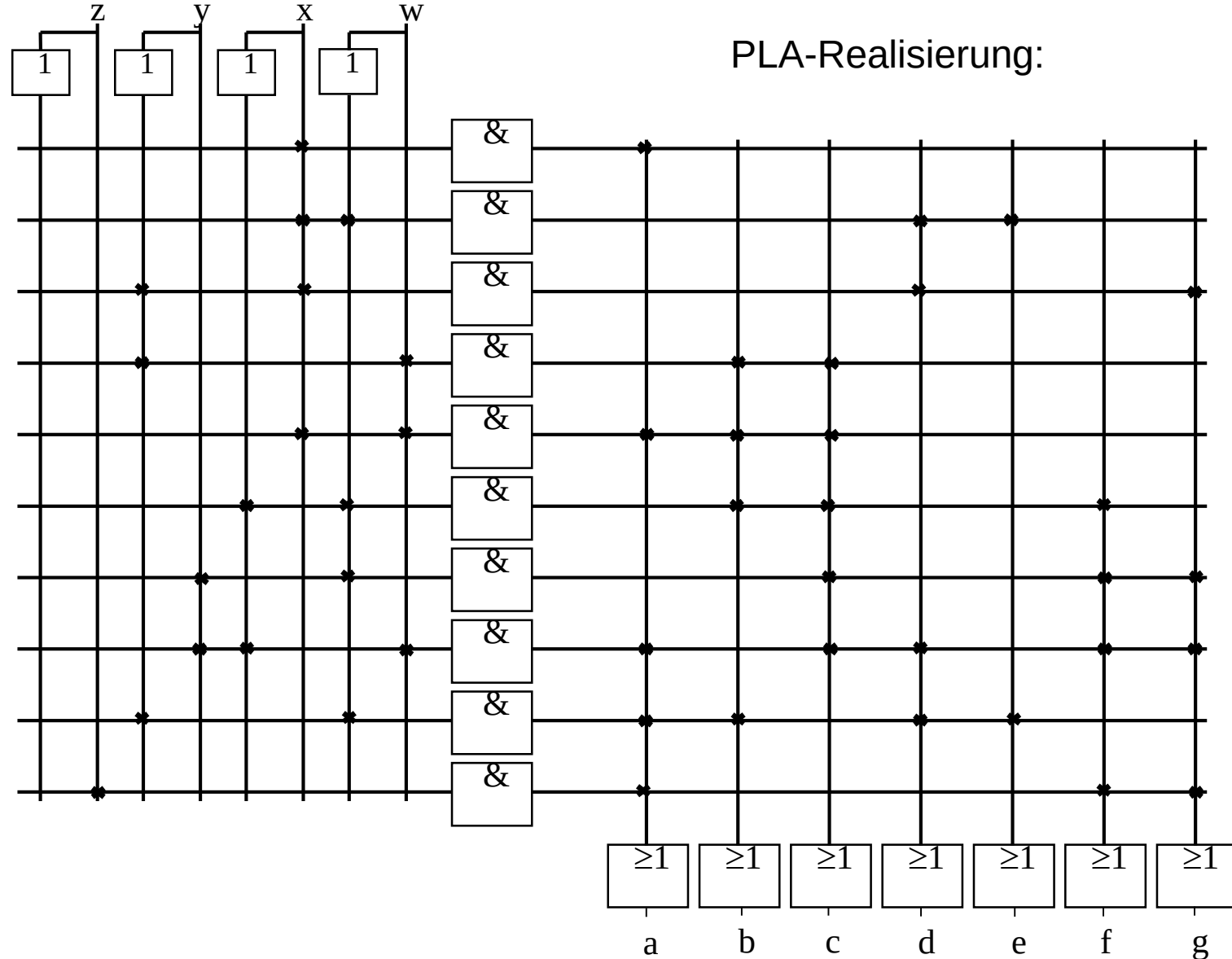
$$d = z + \overline{wy} + \overline{xw} + \overline{xy} + wyx$$

$$e = \overline{wy} + \overline{xw}$$

$$f = z + \overline{wy} + \overline{xw} + \overline{yx}$$

$$g = z + \overline{xy} + \overline{wy} + \overline{xy}$$

5. Aufgabe – 5.2



5. Aufgabe – 5.3

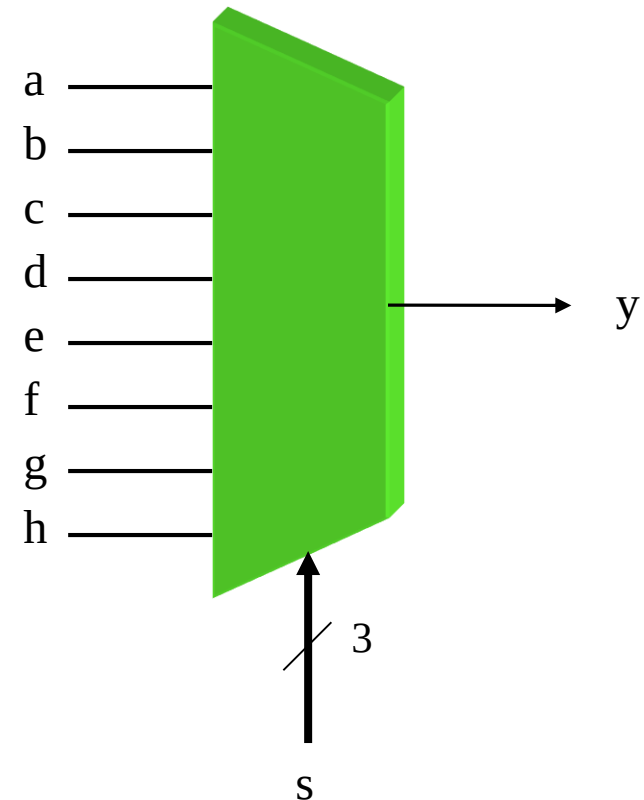
- **5.3** Wie kann die Anzeigensteuerung mit 8:1 Multiplexern realisiert werden?

Multiplexer

Multiplexer sind Bausteine, die es erlauben aus einem Eingangsvektor mit n Bits ein beliebiges Bit auszuwählen und an y weiterzuschalten, indem der Auswahlvektor s entsprechend gewählt wird.

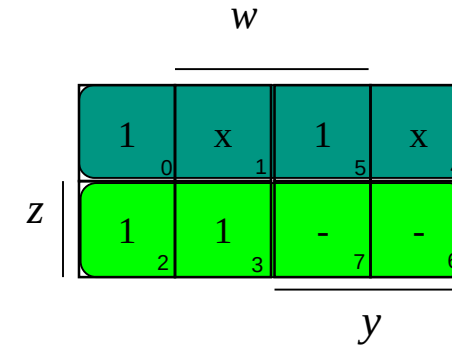
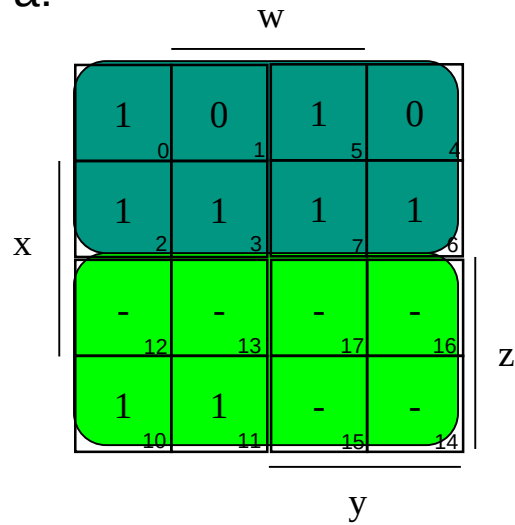
$n:1$ Multiplexer bedeutet, dass eine Auswahl aus n bittigem Vektor auf einen 1-Bit-Ausgang erfolgt.

Alle logischen Funktionen mit n Variablen sind mit $2^{n-1}:1$ Multiplexern realisierbar, was im folgenden genutzt wird.

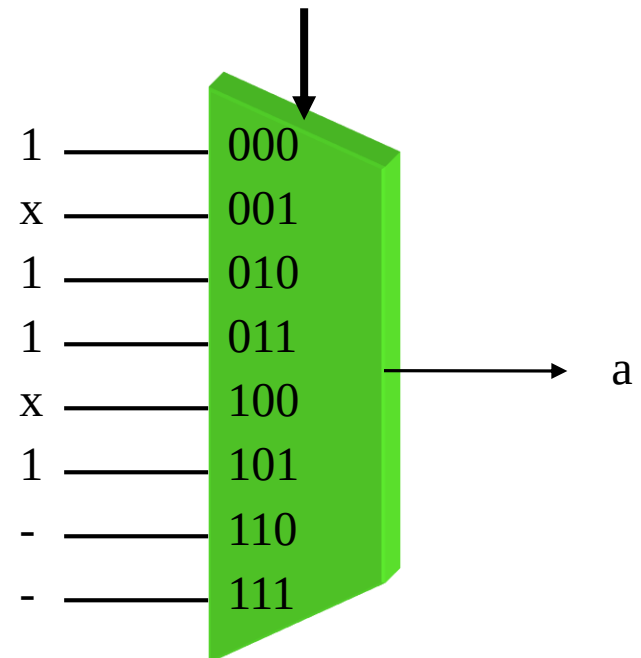


5. Aufgabe – 5.3

a:

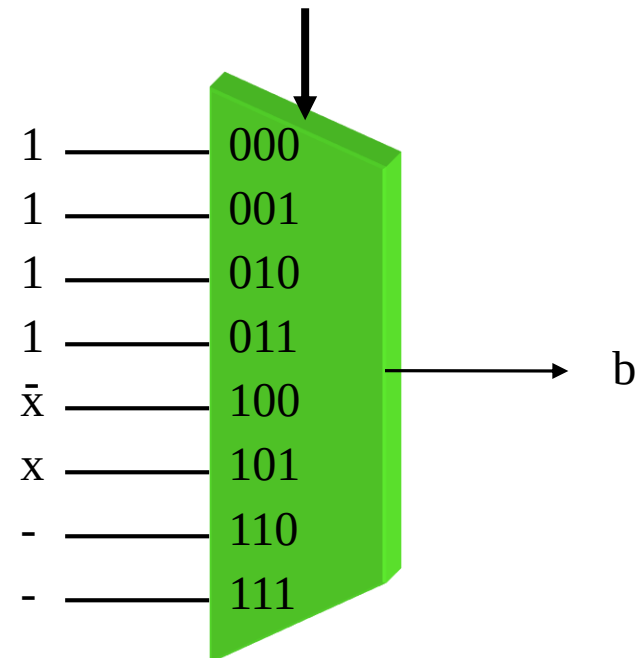
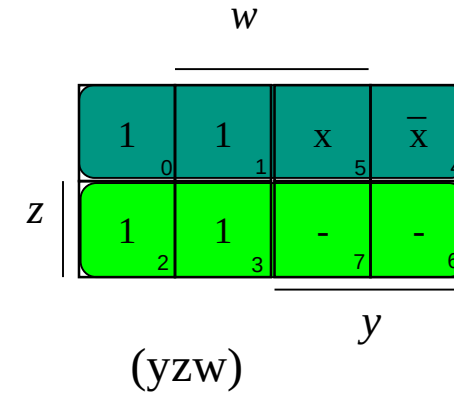
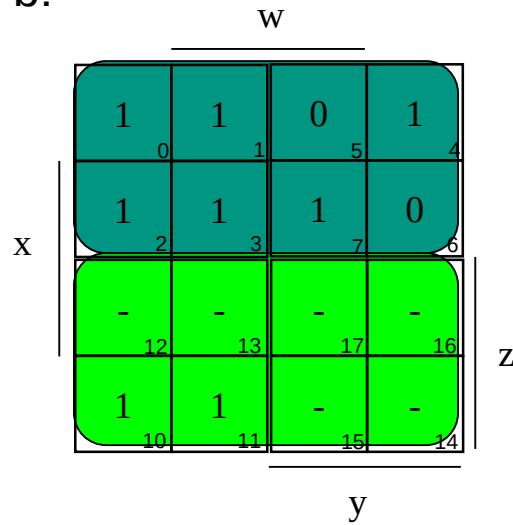


(yzw)



5. Aufgabe – 5.3

b:



5. Aufgabe – 5.3

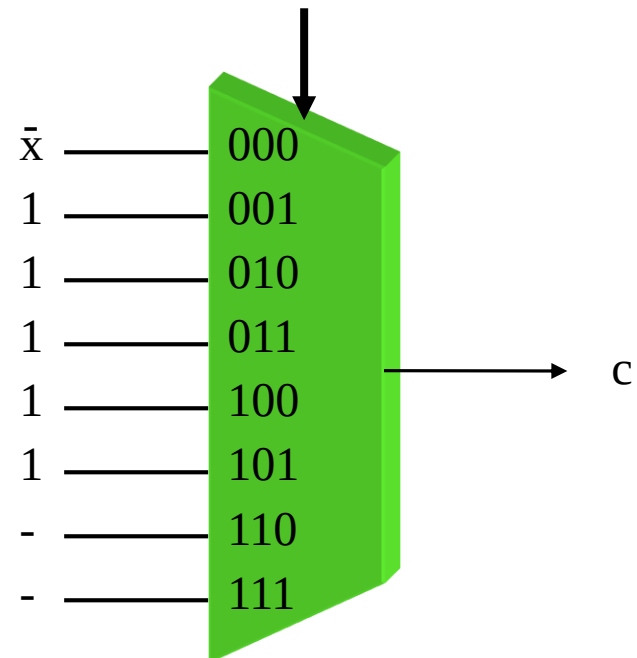
C:

0.

				w									
				1	1	1	1						
				0	1	1	1						
x					-	-	-	-	z				
					1	1	-	-					
				y									

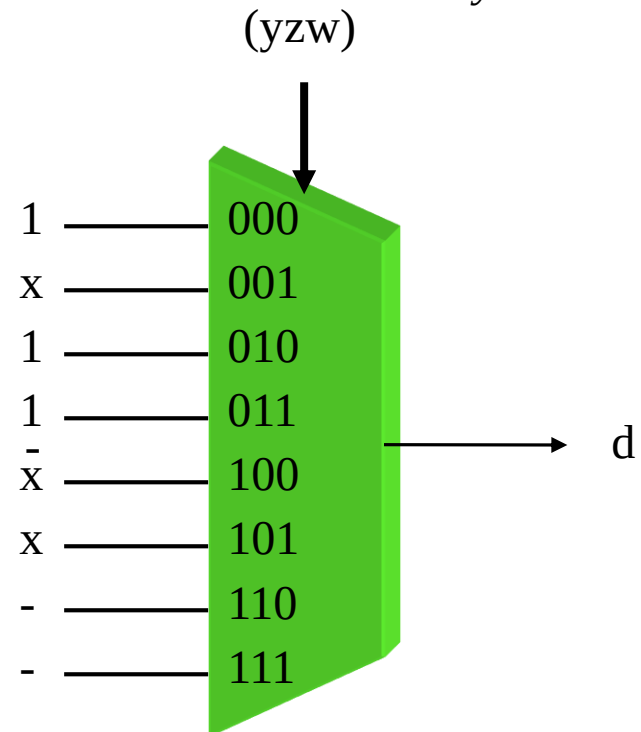
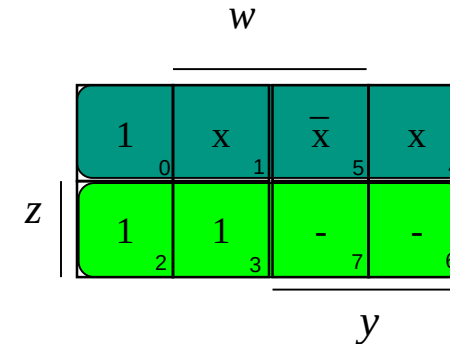
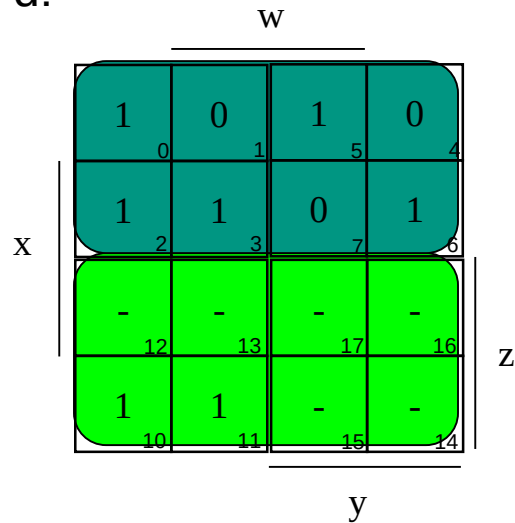


				w								
				$\bar{x}$	1	1	1					
				0	1	5						
z					1	1	-	-				
					2	3	7	6				
								y				
				(yzw)								



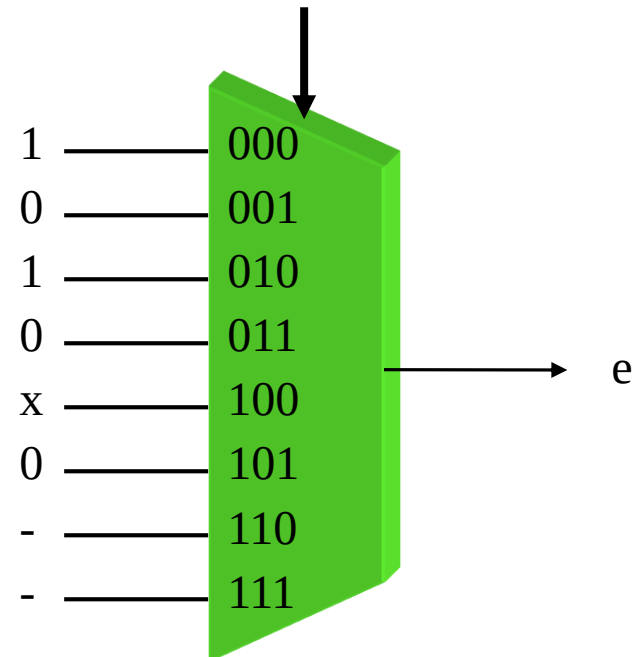
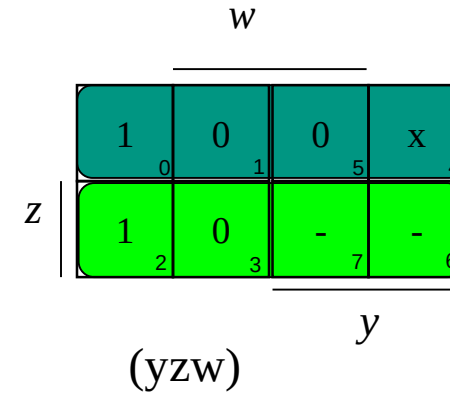
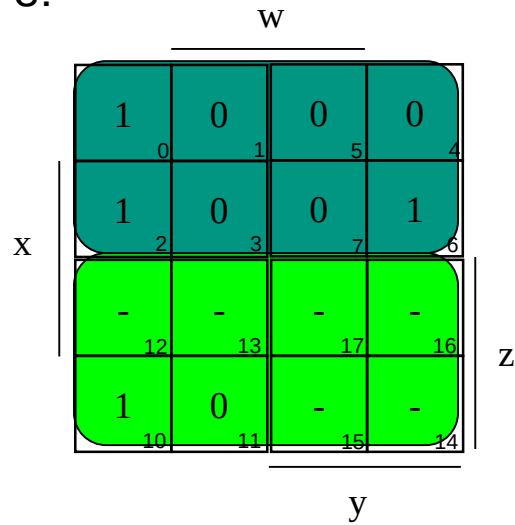
5. Aufgabe – 5.3

d:

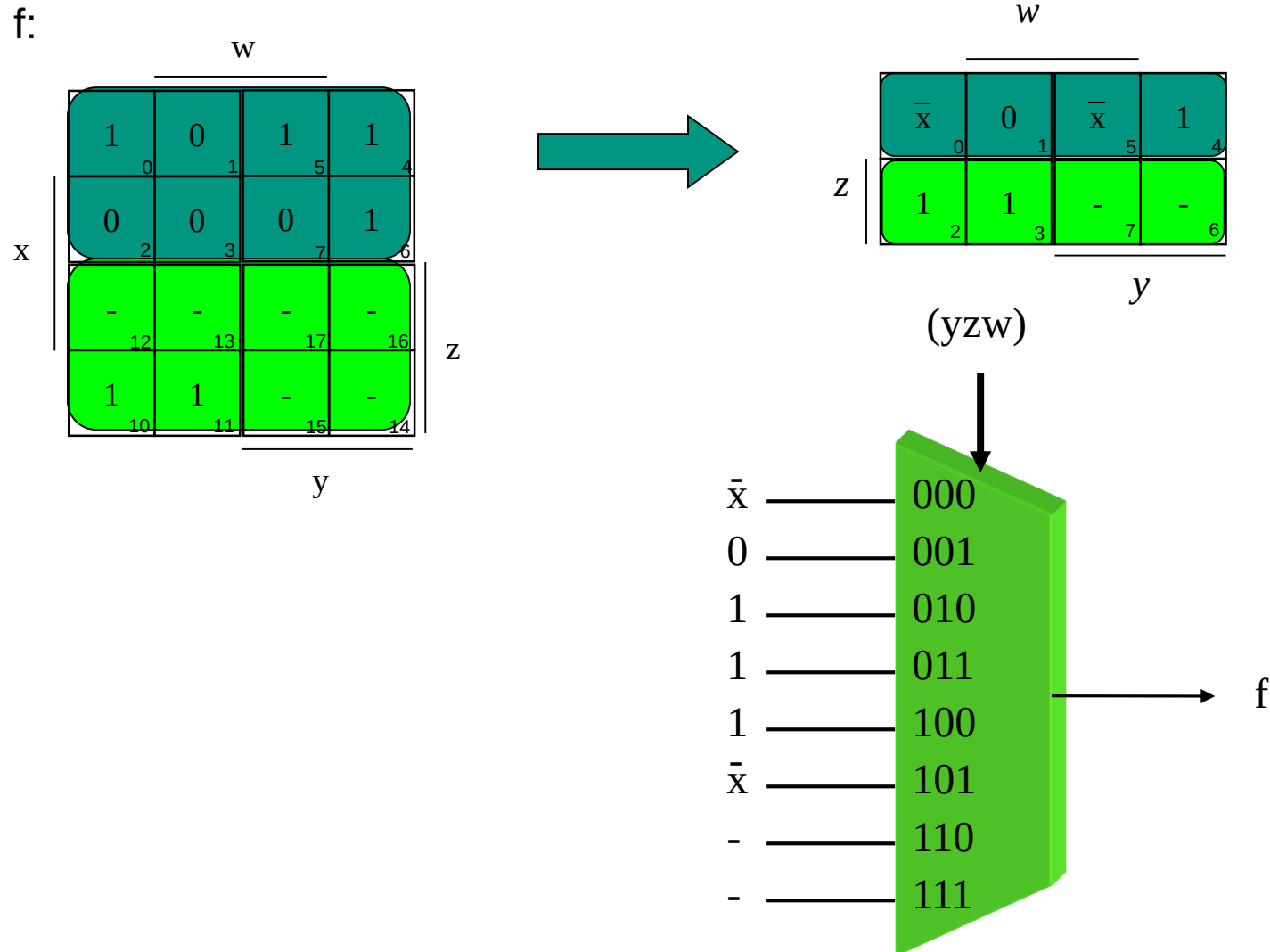


5. Aufgabe – 5.3

e:



5. Aufgabe – 5.3



5. Aufgabe – 5.3

g:

	w				
	0	0	1	1	
	0	1	5	4	
x	1	1	0	1	
	2	3	7	6	
	-	-	-	-	
	12	13	17	16	
	1	1	-	-	
	10	11	15	14	
	y				z



	w				
	x	x	$\bar{x}$	1	
	0	1	5	4	
z	1	1	-	-	
	2	3	7	6	
	y				(yzw)

