

Digitaltechnik

2. Tutorium - Lösung

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV), Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Aufgabe 1: Shannon-Fano-Codierung

Zur Überwachung der Aktivität von Herz-Kreislauf-Patienten soll durch einen tragbaren Sensor die aktuelle Aktivität eines Patienten via Mobilfunk an eine zentrale Datenbank gesendet werden. Die verschiedenen Patientenaktivitäten treten dabei über den Tag verteilt mit folgenden Wahrscheinlichkeiten auf.

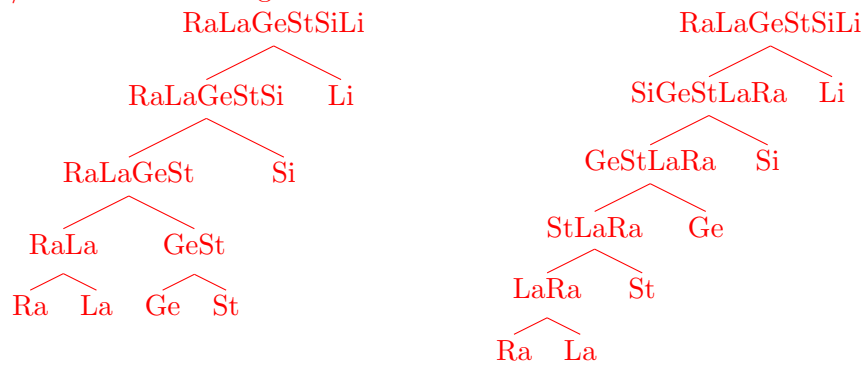
Aktivität	Wahrscheinlichkeit	Codierung
Liegen	41 %	Li: 1/1
Stehen	10 %	St: 0011/0001
Sitzen	29 %	Si: 01/01
Gehen	10 %	Ge: 0010/001
Laufen	6 %	La: 0001/00001
Radfahren	4 %	Ra: 0000/00000

- 1.1 Damit die Mobilfunkkosten und der Speicherbedarf der Datenbank möglichst gering sind, sollen die verschiedenen Aktivitäten optimal mit einem Shannon-Fano-Code codiert werden. Bestimmen Sie eine Shannon-Fano-Codierung.

Partitionierungskonvention:

- Sortieren Sie die Elemente zu Beginn entsprechend den Auftrittshäufigkeiten **aufsteigend von links nach rechts**. Falls unterschiedliche Knoten dieselbe Auftrittshäufigkeiten haben, sortieren Sie diese alphabetisch von links nach rechts.
- Teilen Sie eine Menge immer so auf, dass die Differenz zwischen den Summen der Auftrittshäufigen der Teilmengen minimiert wird.
- Verändern Sie die Reihenfolge der Sortierung/Ordnung während der Anwendung des Verfahrens nicht.
- Weisen Sie den linken Ästen des entstehenden Baumes die „0“ zu, den rechten Ästen die „1“.

Lösung / alternative Lösung



1.2 Wie groß ist die mittlere Codewortlänge?

$$mCW = 0,41 \cdot 1 + 0,1 \cdot 4 + 0,29 \cdot 2 + 0,1 \cdot 4 + 0,06 \cdot 4 + 0,04 \cdot 4 = 2,19$$

$$\text{alternativ } mCW = 0,41 \cdot 1 + 0,1 \cdot 3 + 0,29 \cdot 2 + 0,1 \cdot 4 + 0,06 \cdot 5 + 0,04 \cdot 5 = 2,19$$

1.3 Anhand welcher informationstechnischer Eigenschaft der Datenquelle können Sie die mittlere Codewortlänge Ihres Codes bewerten? Nennen Sie die Eigenschaft und geben Sie die entsprechende Formel zur Berechnung an.

Entropie der Quelle bzw. durchschnittlicher Informationsgehalt des Zeichenvorrats

$$H = \sum (p(x_i) \cdot \log_2(\frac{1}{p(x_i)}))$$

(Bei diesem Code $H \approx 2,139$)

1.4 Die Mobilfunkübertragung soll über GPRS erfolgen, wobei der Preis pro übertragenen 10 KiByte 0,1 € beträgt (1 KiByte $\hat{=}$ 1024 Byte). Der Sensor überträgt jede Sekunde einen Wert für die Aktivität. Geben Sie eine Formel an zur Berechnung der mittleren Übertragungskosten pro Tag und Patient.

$$\text{Kosten} = \frac{m \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24}{1024 \cdot 8 \cdot 10} \cdot 0,1 \text{ €}$$

(Wären hier 0,23 € pro Tag und Patient.)

Aufgabe 2: Huffman-Codierung

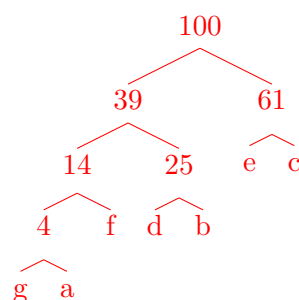
Für die Steuerung eines biologischen Reaktors soll eine Temperaturprotokollierung entworfen werden. Der zu überwachende Prozess durchläuft dabei nacheinander zwei unterschiedliche Temperaturen. Da weniger die genaue Temperatur, als viel mehr die Einhaltung gewisser Grenzen interessiert, wurde eine Einteilung der Reaktortemperatur in folgende Bereiche vorgenommen:

x_i	Beschreibung	$p(x_i)$	gefundener Code
a	Reaktor aus	3%	0001
b	zu niedrig	13%	011
c	optimal für Stufe 1	33%	11
d	Übergang	12%	010
e	optimal für Stufe 2	28%	10
f	zu hoch	10%	001
g	GEFAHR	1%	0000

- 2.1** Um das Messprotokoll möglichst speichereffizient aufzeichnen zu können, soll eine Huffman-Codierung der Reaktortemperatur zum Einsatz kommen. Dazu werden die Auftrittswahrscheinlichkeiten der einzelnen Temperaturbereiche aus dem erwarteten Prozessverlauf ermittelt. Geben Sie eine mögliche Huffman-Codierung der Reaktortemperatur an.

Partitionierungskonvention:

- Sortieren Sie die Elemente zu Beginn entsprechend den Auftrittshäufigkeiten **aufsteigend von links nach rechts**. Falls unterschiedliche Knoten dieselbe Auftrittshäufigkeiten haben, sortieren Sie diese bitte alphabetisch von links nach rechts. Gehen Sie bei jedem nötigen Sortierschritt nach diesem Schema vor.
- Weisen Sie den linken Ästen des entstehenden Baumes die „0“ zu, den rechten Ästen die „1“



- 2.2** Wie groß ist die mittlere Codewortlänge Ihres Huffman-Codes?

$$mCW = 0,04 \cdot 4 + 0,35 \cdot 3 + 0,61 \cdot 2 = 2,43$$

- 2.3** Welche Größe ziehen Sie als Vergleichsmaßstab heran, wenn Sie bewerten möchten, wie effizient Ihr Huffman-Code ist? (Bezeichnung, Begründung und Formel)

Entropie der Quelle bzw. durchschnittlicher Informationsgehalt des Zeichenvorrats;
Die Entropie ist eine geeignete Größe, da sie den Informationsgehalt beschreibt, ein guter Code sollte einen hohen Informationsgehalt haben.

$$H = \sum (p(x_i) \cdot \lg(\frac{1}{p(x_i)}))$$

(Bei diesem Code $H \approx 2,34$)

- 2.4** Welchen Vorteil bietet die Codierung von Information mit Hilfe der Huffman-Codierung oder der Codierung nach Shannon-Fano gegenüber beispielsweise dem Gray-Code oder einem (n-aus-m)-Code?

Die Zeichen sind nach Auftrittswahrscheinlichkeiten optimiert und verkürzen somit die mittlere Codewortlänge gegenüber anderen Codierungen.

- 2.5** Beurteilen Sie im Allgemeinen die Huffman-Codierung gegenüber der Shannon-Fano Codierung im Bezug auf die Qualität der gefundenen Lösung.

Die Huffman-Codierung findet in jedem Fall einen Code mit gleich guter oder besserer mittlerer Codewortlänge als die Codierung nach Shannon-Fano.

Beide Codes können je nach Konvention bei gleicher Auftrittswahrscheinlichkeit mehrere gleichwertige Lösungen erzielen. Die mittlere Codewortlänge ist davon nicht betroffen und bleibt gleich.

Aufgabe 3: Scrambling und Blocksicherung

Für die Datenübertragung soll eine Blockübertragung verwendet werden. Damit auch Burstfehler erkennbar sind soll zusätzlich Scrambling mit Paritätssicherung eingesetzt werden.

Ein Datenwort hat dabei immer eine Länge von 8 Bit.

- 3.1** Berechnen Sie wie viele Daten- und Prüfbits in einem Block übertragen werden müssen, wenn durch das Scrambling Burstfehler der Länge 5 erkennbar sein sollen.

Burstfehler der Länge 5 => 5 Zeilen durch das Scrambling vorgegeben

Es wird 1 Paritätsbit je 8 Datenbits benötigt => 40 Datenbits, 5 Prüfbits

- 3.2** Berechnen Sie die Coderate, die in diesem Fall für einen Block entsteht. Die Coderate ist definiert als die Anzahl der Datenbits geteilt durch die Gesamtanzahl der Prüf- und Datenbits.

5 Zeilen Nutzdaten = 40 Bit

Je ein Paritätsbit pro Zeile => 5 Prüfbits

=> 40 Datenbits und 45 Bit gesamt

Coderate = Datenbits pro Block / Bits pro Block = $40/45 \approx 89\%$

Sie haben nun folgenden Datenstrom empfangen:

101010111 100011100 010011101 101101011 111001101 010010000 011000000

Dieser Datenstrom wurde, anstatt mit Scrambling und Paritätsbits, mit einer Blocksicherung mit doppelter Quersummenergänzung gegen Fehler gesichert.

- 3.3** Ordnen Sie die erhaltenen Codewörter in Blockschreibweise an. Ein Datenwort hat eine Länge von 8 Bit.

Länge des Datenstroms: 63 Bit

Länge einer Zeile: 8 Bit Daten + 1 Bit Parität = 9 Bit

Anzahl Zeilen: $63 / 9 = 7 \Rightarrow 6$ Datenbits + 1 Paritätsbit pro Spalte

In Blockschreibweise ergibt dies: Die Paritätsbits sind grau hinterlegt. Das fehlerhafte Bit ist hellgrau (A3.5)

1	1	0	1	0	1	0	1	1	1
2	1	0	0	0	1	1	1	0	0
3	0	1	0	0	1	1	1	0	1
4	1	0	1	1	0	1	0	1	1
5	1	1	1	0	0	1	1	0	1
6	0	1	0	0	1	0	0	0	0
7	0	1	1	0	0	0	0	0	0

- 3.4** In dem übertragenen Datenstrom befindet sich 1 Fehler. Beheben Sie diesen indem Sie die fehlerhafte Zeile und die fehlerhafte Spalte angeben. Markieren Sie das fehlerhafte Datenwort und geben Sie das korrigierte Datenwort an. Für die Blocksicherung wurde eine gerade Parität verwendet.

Anzahl 1er in Zeile 3: 5 - > Fehlerhaft

Anzahl 1er in Spalte 4: 1 – > Fehlerhaft

Das Fehlerhafte Datenwort (Fett in Aufgabe 3.3) lautet korrigiert: 01011110

3.5 Berechnen Sie die Coderate für die Blocksicherung mit doppelter Quersummenergänzung. Unter welcher Fehlerannahme bietet die Blocksicherung mit doppelter Quersummenergänzung Vorteile gegenüber Scrambling mit Paritätsbits?

Coderate = $48/63 \approx 76\%$

Unter der Fehlerannahme, dass pro Block entweder genau ein Einzelfehler auftreten kann oder genau ein Burstfehler, bietet die Blocksicherung mit doppelter Quersummenergänzung Vorteile. Scrambling mit Paritätsbits ermöglicht nicht die Korrektur von Einzelfehlern.