

Digitaltechnik

4. Tutorium - Lösung

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV), Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Aufgabe 1: Relationen

- 1.1 Geben Sie die mathematische Definition für die folgenden Eigenschaften einer Relation an.

Reflexivität: $x \alpha x, \forall x \in M$

Symmetrie: $x \alpha y \Rightarrow y \alpha x, \forall x, y \in M$

Antisymmetrie: $x \alpha y \wedge y \alpha x \Rightarrow x = y, \forall x, y \in M$

Transitivität: $x \alpha y \wedge y \alpha z \Rightarrow x \alpha z, \forall x, y, z \in M$

- 1.2 Geben Sie an, welche der oben genannten Eigenschaften einer Relation auf die einzelnen Aussagen zutreffen.

„ist kleiner oder gleich“ **reflexiv, antisymmetrisch, transitiv**

„Gleichheit“ **reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv**

„ist ein Vielfaches von“ **reflexiv, antisymmetrisch, transitiv**

Aufgabe 2: Relationen

Durch die unten dargestellte Matrix sei die Relation $Y \gamma Z$ definiert.

Y/Z	a	b	c	d	e	f	g	h
a	X			X				
b	X	X	X	X	X	X	X	X
c			X					
d				X				
e			X		X		X	X
f				X		X		
g							X	
h			X					X

Abbildung 1: Relation $Y \gamma Z$

- 2.1** Welche Eigenschaften weist die Relation γ auf? Begründen Sie Ihre Antworten.
 Reflexivität: ja, weil die Hauptdiagonale vollständig besetzt ist.
 Symmetrie: nein, die Hauptdiagonale ist für kein einziges Paar an Kreuzen Symmetrieachse $\leftrightarrow$ es gibt kein einziges Wertepaar (x,y) , für das sowohl $x\gamma y$ als auch $y\gamma x$ gilt
 Antisymmetrie: ja, da die einzigen ungerichteten Kanten die der Reflexivität sind.
 Transitivität: ja, weil z.B. $e\gamma h$ und $h\gamma c \rightarrow e\gamma c$ gilt (für alle Elemente erfüllt)
- 2.2** Um welche spezielle Relation handelt es sich? Begründen Sie Ihre Antwort.
 Ordnungsrelation
- 2.3** Zusatzaufgabe: Zeichnen Sie den gerichteten Graphen, der diese Relation darstellt.

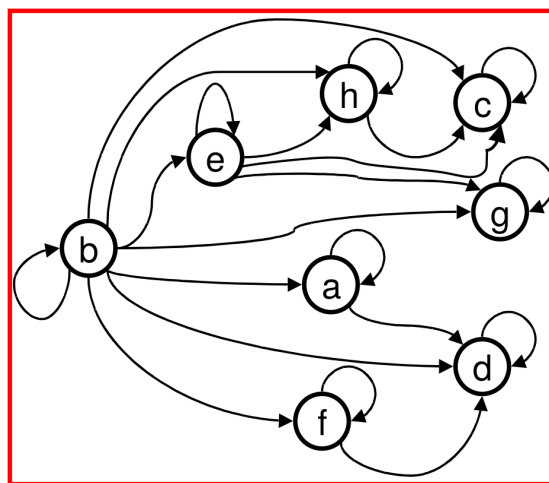


Abbildung 2: gerichteter Graph der Relation

Aufgabe 3: Relationen

Sie wollen zusammen mit Ihren Freunden einen Wochenendurlaub machen. Hierfür haben Sie im Schwarzwald eine wunderschöne Hütte gefunden, die Ihre Spezifikationen erfüllt. Ihre Vorfreude wird leider von der Kochplanung eingeschränkt, da Ihre Freunde alle sehr wählerisch essen.

- 3.1** Stellen Sie eine Relationsmatrix für Ihre Freunde auf, wobei ein X in der Matrix bedeutet, dass diese Personen das gleiche Gericht essen würden.
- 3.2** Weist die Relation γ die Eigenschaften einer Verträglichkeitsrelation auf? Begründen Sie Ihre Antwort.

Eigenschaften: reflexiv, symmetrisch, nicht transitiv $\rightarrow$ Verträglichkeitsrelation

Person	Kartoffelbrei	Bratkartoffeln	Kartoffelauflauf	Himbeerkuchen
Linus				X
Melanie		X	X	X
Markus	X			
Theresa	X	X		
Sebastian		X	X	X
Marcel	X	X	X	X

Abbildung 3: Essgewohnheiten Ihrer Freunde

Relation γ	Linus	Melanie	Markus	Theresa	Sebastian	Marcel
Linus	X	X			X	X
Melanie	X	X		X	X	X
Markus			X	X		X
Theresa		X	X	X	X	X
Sebastian	X	X		X	X	X
Marcel	X	X	X	X	X	X

Abbildung 4: Relation der Essgewohnheiten

3.3 Wie viele Gerichte müssen mindestens gekocht werden um alle Ihre Freunde gleichzeitig und mit jedem Essen eine maximale Anzahl an Personen gemeinsam durch zu füttern? Und welche Personen essen welches Gericht? (*Hinweis: Zur Lösung dieser Aufgabe bietet sich der Weg über die aus der Vorlesung bekannte Überdeckungstabelle an.*)

Unverträglichkeiten aus der Tabelle ablesen:

$Li \neg \alpha Ma, Th$

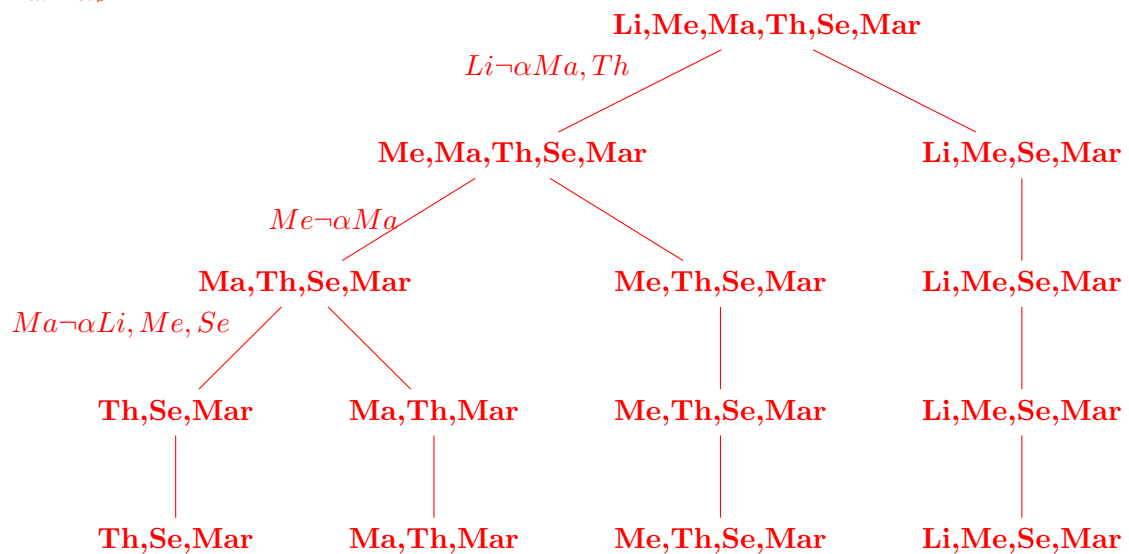
$Me \neg \alpha Ma$

$Ma \neg \alpha Li, Me, Se$

$Th \neg \alpha Li$

$Se \neg \alpha Ma$

$Mar \neg \alpha \emptyset$



Die Unverträglichkeiten $Mar \neg \alpha \emptyset$, $Se \neg \alpha Ma$ und $Th \neg \alpha Li$ verändern nichts mehr an den aufgeteilten Mengen.

Überdeckungstabelle bilden:

γ	Linus	Melanie	Markus	Theresa	Sebastian	Marcel
Th,Se,Mar				X	X	X
Ma,Th,Mar			X	X		X
Me,Th,Se,Mar		X		X	X	X
Li,Me,Se,Mar	X	X			X	X

Gelb: Primimplikant. Somit werden zwei Gerichte benötigt (Himbeerkuchen, Kartoffelbrei)

Aufgabe 4: Boolesche Algebra (WS 2020/21)

4.1 Beweis eines Satzes mittels Boolescher Algebra. Gegeben ist der folgende Ausdruck:

$$\overline{(\bar{c} \wedge \bar{b} \wedge \overline{(a \wedge b)})} \wedge b \wedge \overline{(b \vee a)} = 0 \quad (1)$$

Führen Sie den Beweis für die Gleichung (1) mit Hilfe der Huntington'schen Axiome und der Regeln (R1-R12) von dem Formelblatt durch. Nutzen Sie dazu die folgende Tabelle. Tragen Sie die Zwischenschritte zeilenweise ein, maximal ein Schritt pro Zeile. Tragen Sie in die linke Spalte die angewandte Regel ein und in die Rechte das Ergebnis nach Anwendung dieser. (*Hinweis:* Die Verwendung des Kommutativgesetzes H2 sowie des Assoziativitätsgesetzes R10a/R10b muss nicht explizit angegeben werden.)

Regel	Umformung
-	$\overline{(\bar{c} \wedge \bar{b} \wedge \overline{(a \wedge b)})} \wedge b \wedge \overline{(b \vee a)}$
R12b	$\overline{(\bar{c} \wedge \bar{b} \wedge (a \vee \bar{b}))} \wedge b \wedge \overline{(b \vee a)}$
R11a	$\overline{(\bar{c} \wedge \bar{b})} \wedge b \wedge \overline{(b \vee a)}$
R12b	$(c \vee b) \wedge b \wedge \overline{(b \vee a)}$
R12a	$(c \vee b) \wedge b \wedge \bar{b} \wedge a$
R11b	$b \wedge \bar{b} \wedge a$ (ggf. optional)
R8b	$0 \wedge a$
R5b	0
	Der Ausdruck wurde auf 0 zurückgeführt. q.e.d.

Aufgabe 5: Schaltalgebra, Rechenregeln

5.1 Formen Sie das nachfolgende Relaisschaltnetz in einen schaltalgebraischen Ausdruck um.

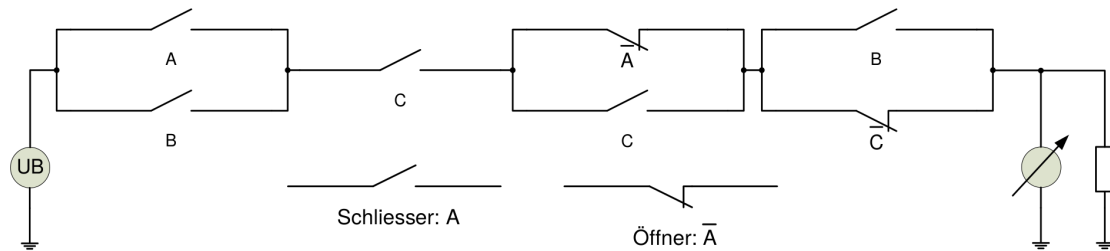


Abbildung 5: Y_1

$$Y_1 = (A \vee B) \wedge C \wedge (\bar{A} \vee C) \wedge (B \vee \bar{C})$$

5.2 Vereinfachen Sie den gefundenen Ausdruck und zeichnen Sie ihn in ein neues Relaisschaltnetz.

Durch scharfes Hinsehen $\rightarrow B \wedge C$ oder durch Umformung:

$$(A \vee B)C(\bar{A} \vee C)(B \vee \bar{C}) = (AC \vee BC)(\bar{A}B \vee \bar{A}\bar{C} \vee BC) = ACB \vee \bar{A}BC \vee BC = BC$$

Wie folgt:

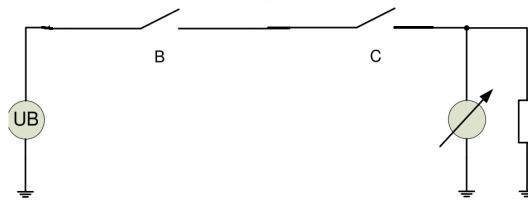


Abbildung 6: Vereinfachtes Schaltnetz Y_1

5.3 Verfahren Sie mit dem folgenden Relaisschaltnetz Y_2 wie mit Teilaufgaben eins und zwei.

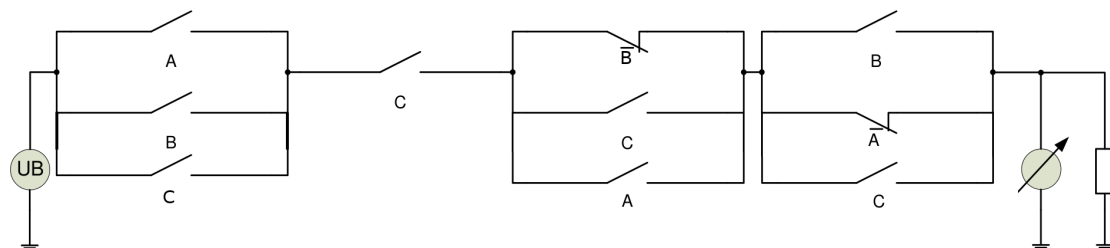


Abbildung 7: Y_2

$$Y_2 = (A \vee B \vee C) \wedge (C) \wedge (A \vee \overline{B} \vee C) \wedge (\overline{A} \vee B \vee C)$$

Scharfes Hinsehen:

$$Y_2 = (A \vee B \vee C)(C)(A \vee \overline{B} \vee C)(\overline{A} \vee B \vee C) = C$$

Y_2 vereinfacht:

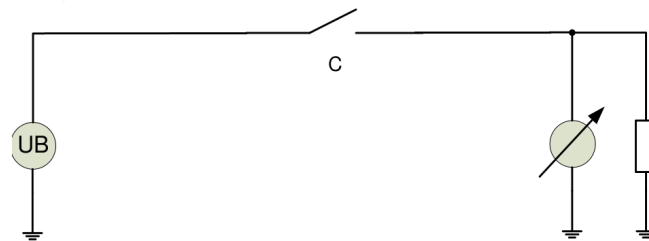


Abbildung 8: Y_2 vereinfacht