

Elektronische Schaltungen SS 2022

1. Tutoriumsblatt - Lösung

Grundlagen & Passive Komponenten

Infos zur AbgabeAbgabefrist: **08.05.2022** online über IliasAbzugebende Aufgaben: **Aufgabe 1** (Handschriftlich, eingescannt als .pdf)**Aufgabe 3** (Separate .pdf mit Screenshots + kurzer Beschreibung)

Hinweise: Die Lösungen sollen einen Weg aufzeigen, wie die Aufgaben gelöst werden können. Es gibt in einigen Fällen auch andere Wege, um zur richtigen Lösung zu kommen. Diese Wege können und sollen in den Tutorien angesprochen werden.

– Teil I: Rechenaufgaben –

Aufgabe 1 (Netzwerkanalyse)

a)

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot U_0 = \frac{450 \Omega}{450 \Omega + 150 \Omega + 600 \Omega} \cdot 12 \text{ V} = 4,5 \text{ V}$$

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot U_0 = \frac{150 \Omega}{1200 \Omega} \cdot 12 \text{ V} = 1,5 \text{ V}$$

$$U_3 = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot U_0 = \frac{600 \Omega}{1200 \Omega} \cdot 12 \text{ V} = 6 \text{ V}$$

$$I_1 = \frac{U_0}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{12 \text{ V}}{1200 \Omega} = 10 \text{ mA}$$

b)

$$U_4 = \frac{R_4 \parallel (R_2 + R_3)}{R_1 + (R_4 \parallel (R_2 + R_3))} \cdot U_0 = \frac{500 \Omega \parallel 750 \Omega}{450 \Omega + (500 \Omega \parallel 750 \Omega)} \cdot 12 \text{ V}$$
$$= \frac{300 \Omega}{450 \Omega + 300 \Omega} \cdot 12 \text{ V} = 4,8 \text{ V}$$
$$I_1 = \frac{U_0}{R_1 + (R_4 \parallel (R_2 + R_3))} = \frac{12 \text{ V}}{450 \Omega + 300 \Omega} = 16 \text{ mA}$$

c)

$$I_{23} = \frac{R_4}{R_2 + R_3 + R_4} \cdot I_1 = \frac{500}{1250} \cdot 16 \text{ mA} = 6,4 \text{ mA}$$
$$I_4 = \frac{R_2 + R_3}{R_2 + R_3 + R_4} \cdot I_1 = I_1 - I_{23} = 9,6 \text{ mA}$$

d) Zur Vereinfachung können die seriellen Widerstände R_2 und R_3 zusammengefasst werden:

$$R_{23} = R_2 + R_3 = 750 \Omega$$

Die gesuchte Spannung u_C kann durch Anwendung der Spannungsteilerregel berechnet werden:

$$u_C = \frac{\frac{1}{j\omega C} \parallel R_{23}}{R_1 + (\frac{1}{j\omega C} \parallel R_{23})} \cdot u_0 = \frac{\frac{R_{23}}{1+j\omega CR_{23}}}{R_1 + \frac{R_{23}}{1+j\omega CR_{23}}} \cdot u_0$$
$$u_C = \frac{R_{23}}{R_1 + R_{23} + j\omega CR_1 R_{23}} \cdot u_0$$

Daraus können der gesuchte Betrag und die zugehörige Phase¹ in Abhängigkeit von der Frequenz f berechnet werden:

$$|u_C| = |u_0| \cdot \frac{R_{23}}{\sqrt{(R_1 + R_{23})^2 + (2\pi f C R_1 R_{23})^2}}$$
$$= 1,5 \text{ V} \cdot \frac{750 \Omega}{\sqrt{(450 \Omega + 750 \Omega)^2 + (2\pi f \cdot 1 \text{ nF} \cdot 450 \Omega \cdot 750 \Omega)^2}}$$
$$\angle u_C = \arctan(0) - \arctan\left(\frac{2\pi f C R_1 R_{23}}{R_1 + R_{23}}\right) = -\arctan\left(\frac{2\pi f \cdot 1 \text{ nF} \cdot 450 \Omega \cdot 750 \Omega}{450 \Omega + 750 \Omega}\right)$$

¹Erinnerung: Die Phase einer komplexen Zahl $c = a + jb$ kann über $\angle c = \arctan\left(\frac{\text{Im}(c)}{\text{Re}(c)}\right) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ berechnet werden. Bei komplexen Brüchen gilt $\angle(\text{Zähler}) - \angle(\text{Nenner})$.

Durch Einsetzen der jeweiligen Frequenz f ergibt sich:

	$f_1 = 100 \text{ kHz}$	$f_2 = 10 \text{ MHz}$	$f_3 = 1 \text{ GHz}$
$ u_C $	923,2 mV	53 mV	0,5 mV
$\angle u_C$	$-10,02^\circ$	$-86,76^\circ$	$-89,97^\circ$

Aufgabe 2 (Netzwerkanalyse)

a) Anwendung der Stromteilerregel:

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot I_0 = \frac{2000 \Omega}{2750 \Omega} \cdot 5 \text{ mA} = 3,64 \text{ mA}$$

$$I_2 = I_0 - I_1 = 1,36 \text{ mA}$$

b)

$$I_3 = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot I_0 = \frac{750 \Omega}{3250 \Omega} \cdot 5 \text{ mA} = 1,15 \text{ mA}$$

$$U_3 = R_3 \cdot I_3 = 576,9 \text{ mV}$$

c) Wenn R_1 durch eine Induktivität ersetzt wird, dann gilt $U_3 = I_3 = 0$, da die Induktivität für DC-Signale einen Kurzschluss darstellt ($X_L = \omega L$).

d)

$$|i_1| = |i_e| \cdot \left| \frac{R_2 + R_3}{R_2 + R_3 + j\omega L} \right| = 3 \text{ mA} \cdot \frac{2500 \Omega}{|2500 \Omega + j2\pi f \cdot 150 \text{ nH}|}$$

$$= 3 \text{ mA} \cdot \frac{2500 \Omega}{\sqrt{(2500 \Omega)^2 + (2\pi f \cdot 150 \text{ nH})^2}}$$

$$|u_1| = |Z_L| \cdot |i_1| = 2\pi f \cdot 150 \text{ nH} \cdot |i_1|$$

Durch Einsetzen der jeweiligen Frequenz f ergibt sich:

	$f_1 = 10 \text{ MHz}$	$f_2 = 1 \text{ GHz}$	$f_3 = 100 \text{ GHz}$
$ i_1 $	3,00 mA	2,81 mA	79,55 μA
$ u_1 $	28,27 mV	2,65 V	7,50 V

– Teil II: Spice-Simulationen –

Aufgabe 3 (Transientenanalyse)

a) Gesuchte Werte:

	$t = t_1$	$t \rightarrow \infty$
$u_C(t)$	0 V	20 V
$i_C(t)$	1 mA	0 A

Begründung zur Bestimmung der Randbedingungen von u_C und i_C :

Zum Zeitpunkt des Einschaltens befindet sich (das ist die Annahme hier) keine Ladung auf dem Kondensator. Folglich muss wegen $U = Q/C$ die Spannung am Kondensator null sein, d.h. $u_C(t = t_1) = 0$. Daraus folgt, dass die komplette Spannung über den Widerstand abfallen muss, d.h. $i_C(t = t_1) = \frac{U_0}{R} = 1 \text{ mA}$.

Im eingeschwungenen Zustand ($t \rightarrow \infty$) ist der Kondensator komplett aufgeladen, wegen $X_C = \frac{1}{\omega C}$ fließt dann kein Strom mehr – folglich gilt $i_C(t \rightarrow \infty) = 0$ und damit für die Spannung $u_C(t \rightarrow \infty) = U_0 = 20 \text{ V}$.

b)

- Schaltplan aus LTspice für die Simulation des Einschwingverhaltens :

Ein exemplarischer Schaltplan ist in Abbildung 1 gegeben. Für die Zeitbereichssimulation muss die Transientenanalyse (.tran) gewählt werden. Eine funktionsfähige Schaltung besitzt zudem immer ein definiertes Bezugspotential (Masseanschluss).

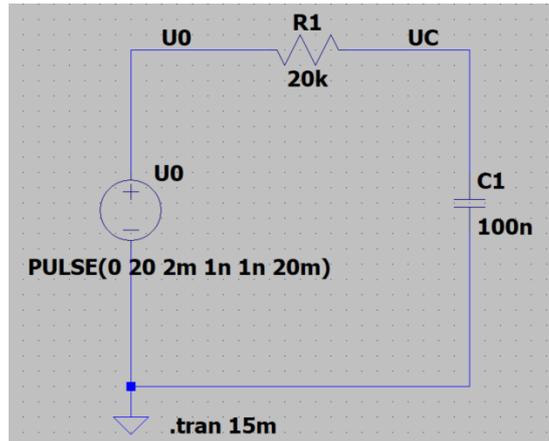


Abbildung 1: Exemplarischer Schaltplan aus LTspice.

- Screenshot der geforderten Zeitverläufe :
Ein Beispiel für einen geeigneten Screenshot ist in Abbildung 2 gegeben.

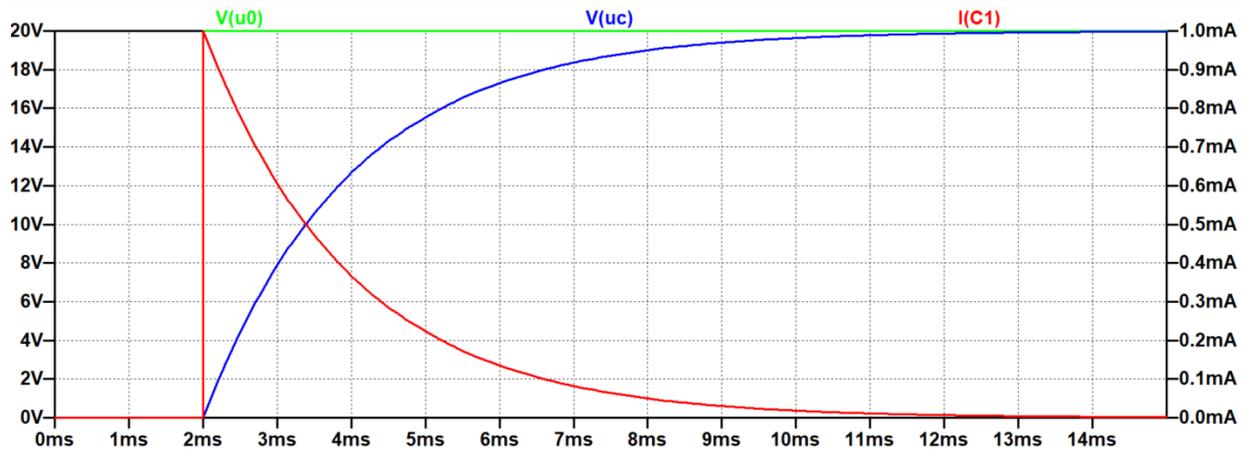


Abbildung 2: Simulierte Zeitverläufe von $u_0(t)$, $u_C(t)$ und $i_C(t)$.

- Spannungs- und Stromwerte zu den gesuchten Zeitpunkten :

	$t_2 = 4 \text{ ms}$	$t_3 = 6 \text{ ms}$	$t_4 = 8 \text{ ms}$
$u_C(t)$	12,6 V	17,3 V	19,0 V
$i_C(t)$	367,9 μA	135,3 μA	49,8 μA

Tabelle 1: Übersicht der gesuchten Spannungs- und Stromwerte.

Optional: Zur rechnerischen Überprüfung können die Ausdrücke für $u_C(t)$ und $i_C(t)$ auch über eine Maschengleichung hergeleitet werden:

$$u_0 = R \cdot i_C + u_C \quad \text{mit } i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt}$$

$$u_0 = RC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C$$

Die Gleichung ist eine DGL 1. Ordnung mit einer allgemeinen Lösung der Form

$$u_C(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + B,$$

wobei A und B noch zu bestimmende Konstanten sind. Mit den Randbedingungen aus Aufgabenteil a) muss gelten²:

$$u_C(t \rightarrow \infty) = B \stackrel{!}{=} U_0$$

$$u_C(t = 0) = A \cdot e^0 + B \stackrel{!}{=} 0 \implies A = -B = -U_0$$

Daraus ergibt sich folgende Gleichung für den zeitlichen Verlauf von $u_C(t)$:

$$u_C(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Durch Differentiation ergibt sich der Verlauf für den zugehörigen Strom:

$$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Berücksichtigt man abschließend noch, dass der Einschaltvorgang zum Zeitpunkt $t = t_1 = 2 \text{ ms}$ erfolgt, ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$u_C(t) = \begin{cases} 0 & , t < t_1 \\ 20 \text{ V} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-2 \text{ ms}}{2 \text{ ms}}}\right) & , t \geq t_1 \end{cases}$$

$$i_C(t) = \begin{cases} 0 & , t < t_1 \\ 1 \text{ mA} \cdot e^{-\frac{t-2 \text{ ms}}{2 \text{ ms}}} & , t \geq t_1 \end{cases}$$

Einsetzen von $t = t_{2-4}$ liefert ebenfalls die gesuchten Werte aus der Tabelle 1.

²Der Einfachheit halber wird hier zunächst angenommen, dass der Einschaltvorgang zum Zeitpunkt $t = 0$ startet.

c) Gesuchte Werte:

	$t_2 = 4 \text{ ms}$	$t_3 = 6 \text{ ms}$	$t_4 = 8 \text{ ms}$
$u_C(t)$	17,3 V	19,6 V	20 V
$i_C(t)$	270,7 μA	36,6 μA	5 μA

Tabelle 2: Übersicht der gesuchten Spannungs- und Stromwerte mit verändertem Widerstand $R = 10 \text{ k}\Omega$.

Im Spice-Schaltplan muss lediglich der Wert des Widerstands $R = 10 \text{ k}\Omega$ angepasst werden, siehe Abbildung 3.

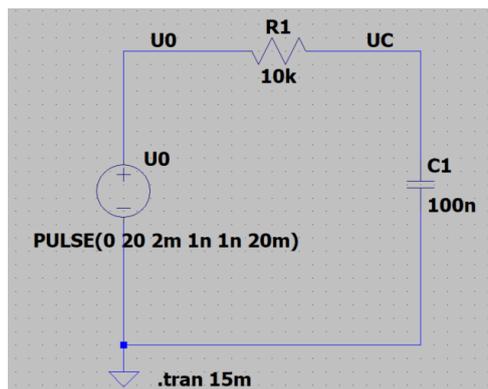


Abbildung 3: Exemplarischer Schaltplan mit verändertem Widerstand $R = 10 \text{ k}\Omega$.

Erklärung: Da der Widerstand im Vergleich zu Aufgabenteil b) kleiner wird, nimmt die Zeitkonstante $\tau = RC$ ab und das Auf- bzw. Entladen wird beschleunigt. Zudem steigt der maximale Stromwert zum Schaltzeitpunkt $t = t_1$ auf $U_0/R = 2 \text{ mA}$, siehe Abbildung 4.

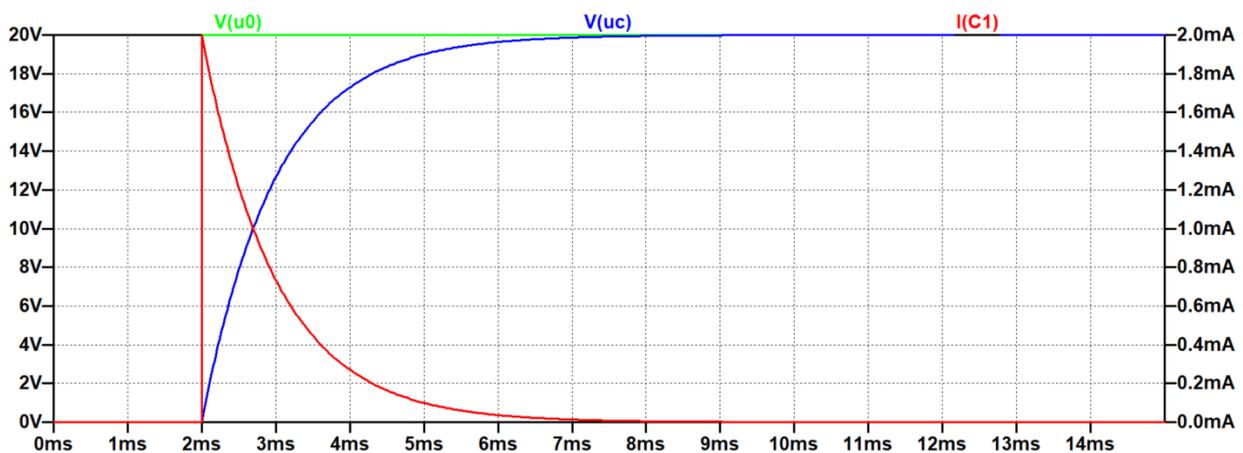


Abbildung 4: Simulierte Zeitverläufe von $u_0(t)$, $u_C(t)$ und $i_C(t)$ mit verändertem Widerstand $R = 10 \text{ k}\Omega$.

d)

$$|u_a| = |u_e| \cdot \left| \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \right| = \frac{|u_e|}{|1 + j\omega RC|} = \frac{|u_e|}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

$$|i_a| = \frac{|u_a|}{X_C} = |u_a| \cdot \omega C$$

e) Gesuchte Werte:

	$f_1 = 1 \text{ GHz}$	$f_2 = 10 \text{ GHz}$	$f_3 = 100 \text{ GHz}$
$ u_a $	3,8 V	1,2 V	127,3 mV
$ i_a $	2,4 mA	7,6 mA	8 mA

Tabelle 3: Übersicht der gesuchten Spannungs- und Stromwerte der RC-Schaltung.

Ein exemplarischer Spice-Schaltplan ist in Abbildung 5 gegeben. Zur Erzeugung einer sinusförmigen Eingangsspannung wird eine Quelle vom Typ SINE verwendet.

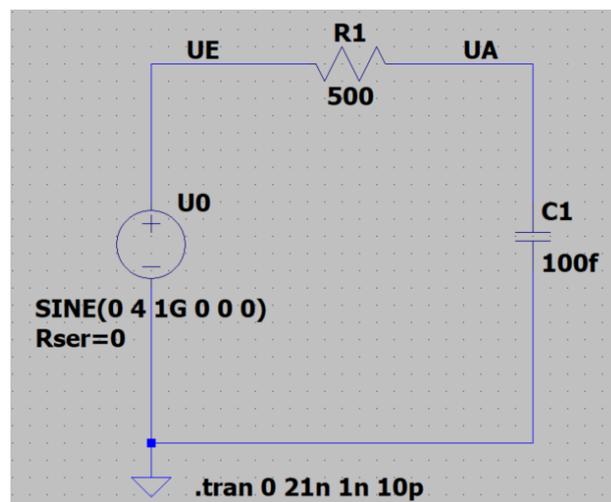
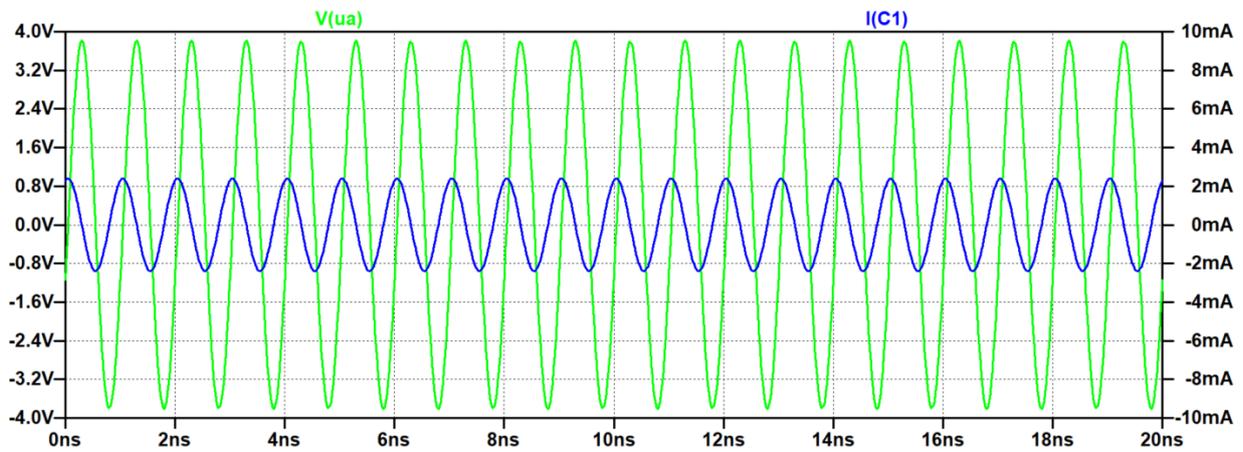


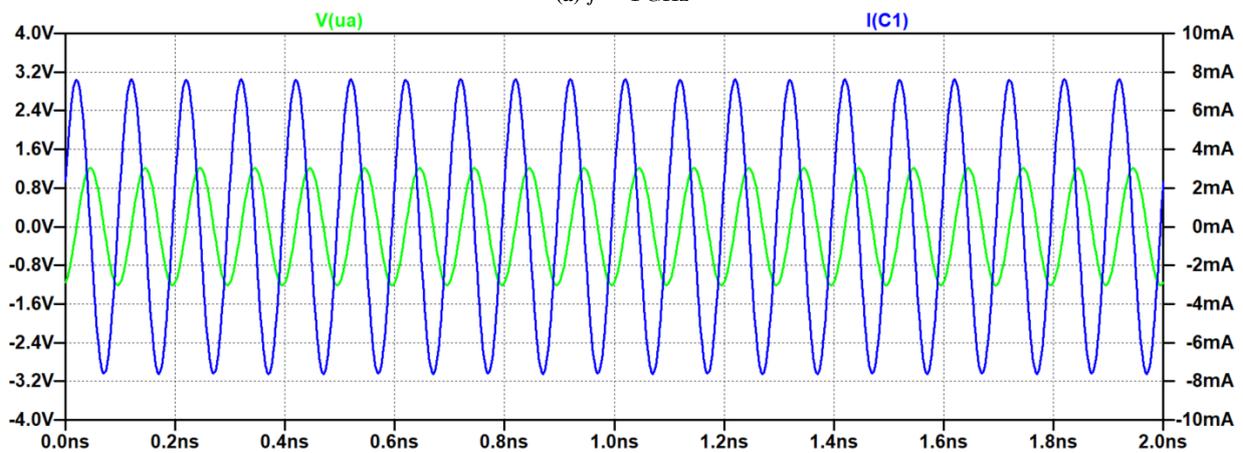
Abbildung 5: Exemplarischer Spice-Schaltplan der RC-Schaltung.

Screenshots der simulierten Zeitverläufe bei den drei verschiedenen Frequenzen sind in Abbildung 6 gegeben. Als Startzeitpunkt der Simulation wurde jeweils $t = 1 \text{ ns} \gg 5 \cdot RC$ gewählt, damit sich die Schaltung im stationären Zustand befindet.

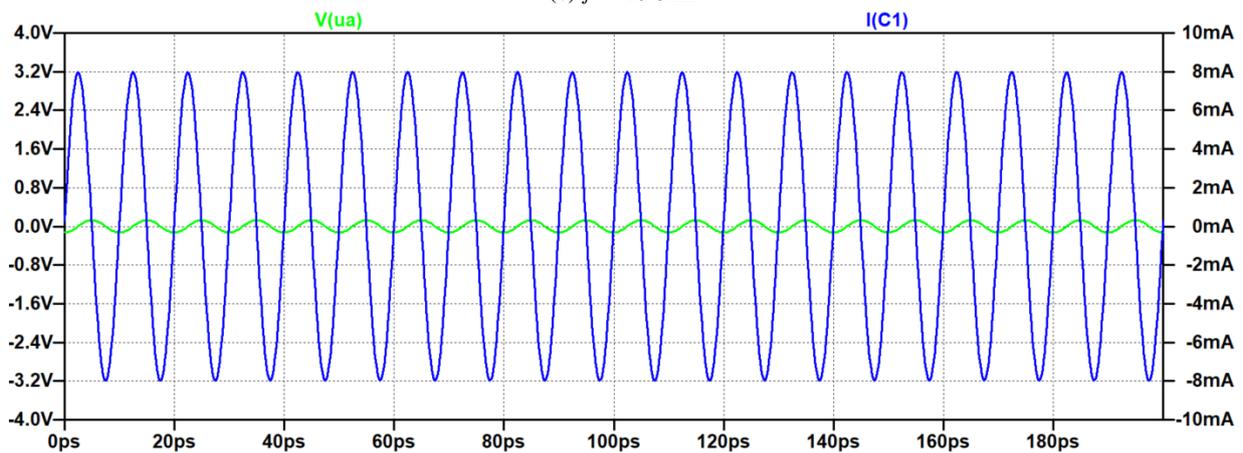
Die Schaltung weist **Tiefpassverhalten** auf.



(a) $f = 1 \text{ GHz}$



(b) $f = 10 \text{ GHz}$



(c) $f = 100 \text{ GHz}$

Abbildung 6: Simulierte Zeitverläufe von $u_a(t)$ und $i_a(t)$ für verschiedene Frequenzen.

f) Gesuchte Werte:

	$f_1 = 1 \text{ GHz}$	$f_2 = 10 \text{ GHz}$	$f_3 = 100 \text{ GHz}$
$ u_a $	1,2 V	3,8 V	4 V
$ i_a $	2,4 mA	7,6 mA	8 mA

Tabelle 4: Übersicht der gesuchten Spannungs- und Stromwerte der CR-Schaltung.

Durch Vertauschen von Widerstand und Kondensator weist die Schaltung **Hochpassverhalten** auf. Eine analytische Berechnung von $|u_a|$ und $|i_a|$ ist (**optional**) analog zur vorherigen Aufgabe nach Anwendung der Spannungsteilerregel mit folgenden Ausdrücken möglich:

$$|u_a| = |u_e| \cdot \frac{|j\omega RC|}{|1 + j\omega RC|}$$

$$|i_a| = \frac{|u_a|}{R}$$

Aufgabe 4 (Frequenzverhalten)

a) Durch Anwendung der Spannungsteilerregel:

$$(a) \quad H_1(\omega) = \frac{u_a(\omega)}{u_e(\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$(b) \quad H_2(\omega) = \frac{u_a(\omega)}{u_e(\omega)} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

$$(c) \quad H_3(\omega) = \frac{u_a(\omega)}{u_e(\omega)} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

$$(d) \quad H_4(\omega) = \frac{u_a(\omega)}{u_e(\omega)} = \frac{R}{R + j\omega L}$$

b) Um das Frequenzverhalten einer linearen Schaltung zu analysieren, kann das folgende "Kochrezept" helfen (am Beispiel von Schaltung (a)):

- Zähler und Nenner der Übertragungsfunktion so ausklammern, dass sie ausschließlich aus einheitslosen Faktoren bestehen.

In der Regel haben diese Faktoren die Form $(j\omega K)$ oder $(1 + j\omega K)$. Für Schaltung (a):

$$H_1(\omega) = \frac{u_a}{u_e} = \frac{1}{1 + j\omega K_1} \quad \text{mit } K_1 = RC$$

- K ist eine von der Schaltung abhängige Konstante. Übliche Terme für K sind RC oder L/R . Ihr Kehrwert ($1/RC$ oder R/L) entspricht einer Frequenz ω_1 und kann zum Normieren der Faktoren verwendet werden:

$$\omega_1 = \frac{1}{K_1} = \frac{1}{RC}$$

- Die Faktoren im Zähler werden als Nullstellen bezeichnet und die im Nenner als Polstellen. Die Normierungsfrequenz der letzten Schritte charakterisiert die Pol- oder Nullstellen. Polstellen zeigen allgemein ein Tiefpassverhalten und Nullstellen ein Hochpassverhalten.
- Eine neue normierte Frequenz $\Omega_1 = \omega/\omega_1$ kann eingeführt werden. Der Betrag jeder Pol- oder Nullstelle der Form $|1 + j\Omega_1|$ ist genau dann $\sqrt{2}$, wenn $\Omega_1 = 1$. Dies entspricht einer 3 dB Dämpfung bzw. Verstärkung und einem Knickpunkt im logarithmisch dargestellten Frequenzbereich (Bodediagramm).

Für die normierte Übertragungsfunktion der ersten Schaltung $H_1(\Omega_1)$ gilt dann:

$$H_1(\Omega_1) = \frac{1}{1 + j\Omega_1}$$

Anwendung dieser Schritte auf alle vier Schaltungen ergibt:

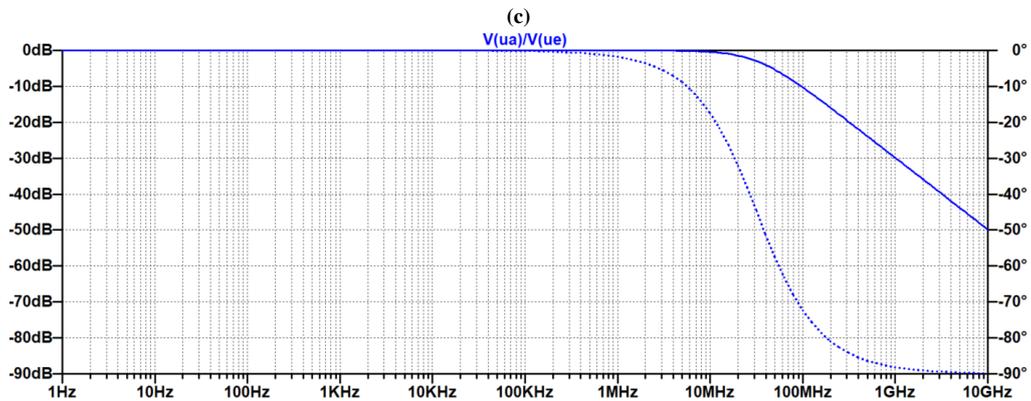
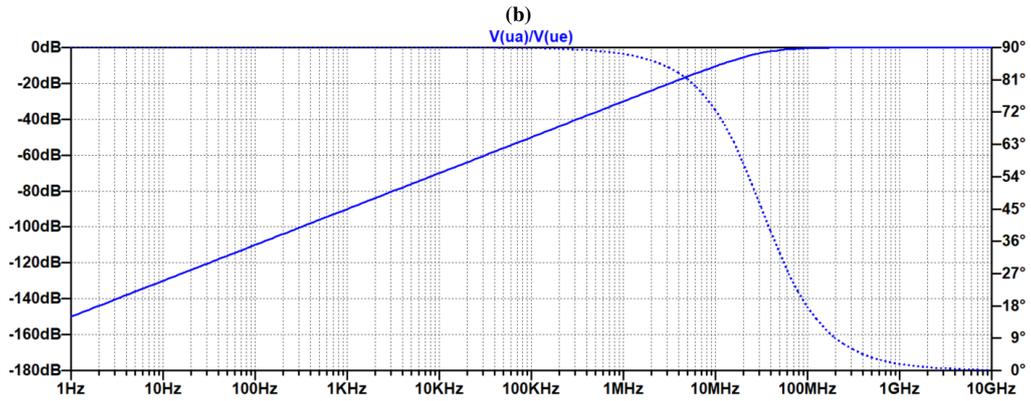
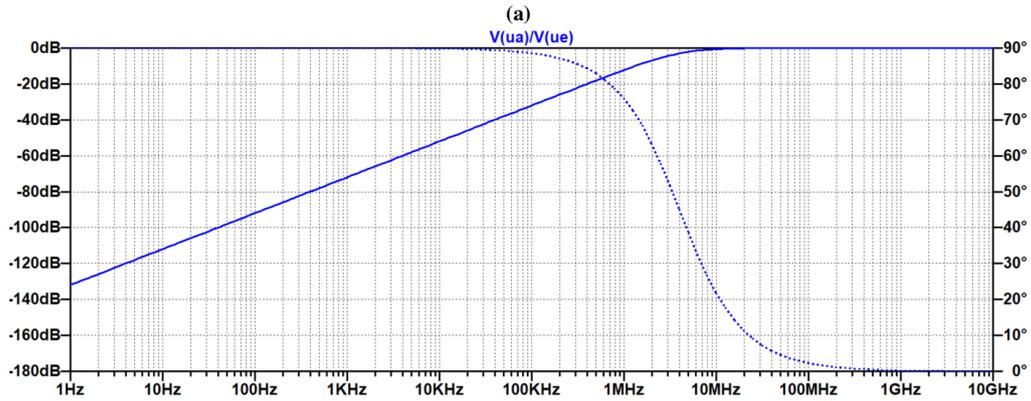
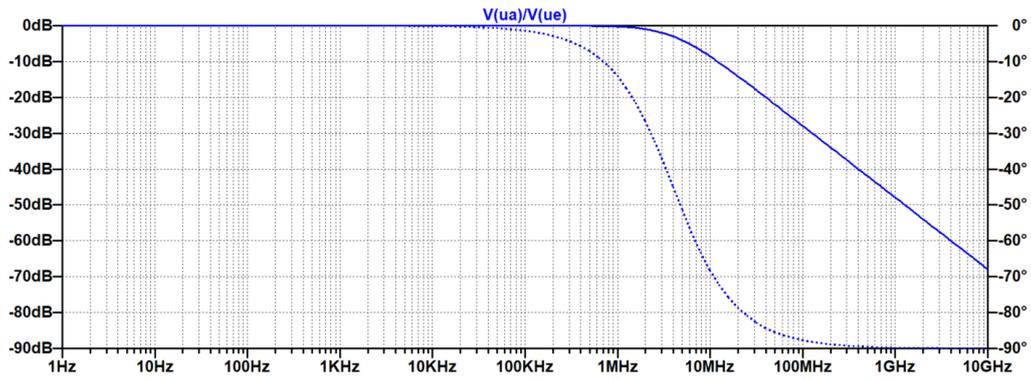
$$\begin{array}{llll}
 \text{(a)} & H_1(\Omega_1) = \frac{1}{1 + j\Omega_1}, & \text{mit } \omega_1 = \frac{1}{RC} & \implies f_1 = \frac{1}{2\pi RC} \\
 \text{(b)} & H_2(\Omega_2) = \frac{j\Omega_2}{1 + j\Omega_2}, & \text{mit } \omega_2 = \frac{1}{RC} & \implies f_2 = \frac{1}{2\pi RC} \\
 \text{(c)} & H_3(\Omega_3) = \frac{j\Omega_3}{1 + j\Omega_3}, & \text{mit } \omega_3 = \frac{R}{L} & \implies f_3 = \frac{R}{2\pi L} \\
 \text{(d)} & H_4(\Omega_4) = \frac{1}{1 + \Omega_4}, & \text{mit } \omega_4 = \frac{R}{L} & \implies f_4 = \frac{R}{2\pi L}
 \end{array}$$

Durch Einsetzen der Bauteilwerte erhält man folgende Knickfrequenzen für die Schaltungen:

	(a)	(b)	(c)	(d)
f_g	3,98 MHz	3,98 MHz	31,83 MHz	31,83 MHz

Tabelle 5: Knickfrequenzen der Schaltungen.

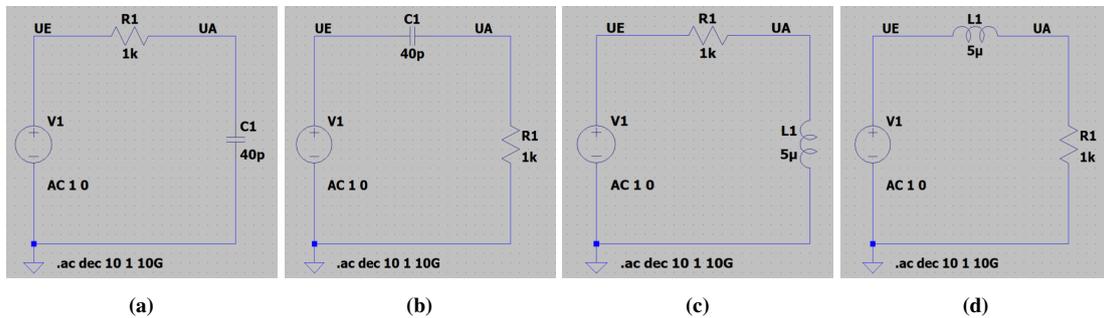
c) Simulationsergebnisse:



(d)

Zur Kontrolle der Simulationsergebnisse kann verifiziert werden, dass bei den in Tabelle 5 berechneten Knickfrequenzen jeweils $\left| \frac{u_a}{u_e} \right| = -3,01 \text{ dB}$ gilt und die Phase den Wert $\pm 45^\circ$ besitzt.

Schematics:



d) Funktion der Schaltungen in Abbildung 9:

- (a) Tiefpass
- (b) Hochpass
- (c) Hochpass
- (d) Tiefpass

e) Die Übertragungsfunktion der Schaltung kann wieder anhand der Spannungsteilerregel bestimmt werden und ist gegeben durch:

$$\frac{u_a}{u_e} = \frac{R}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R}$$

$$\left| \frac{u_a}{u_e} \right| = \frac{|R|}{\left| j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R \right|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

Der Betrag der Übertragungsfunktion wird maximal, wenn der Nenner minimal wird, d.h. wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

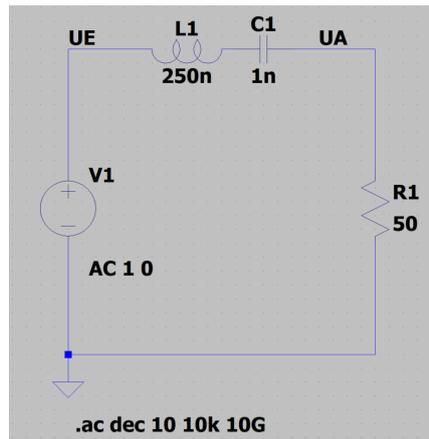
$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Die entsprechende Frequenz in Hertz folgt zu:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{250 \text{ nH} \cdot 1 \text{ nF}}} = 10,1 \text{ MHz}$$

f) Schematic:



Simulationsergebnisse:

Die Simulationsergebnisse zeigen, dass es sich um einen Bandpass handelt, welcher die in Aufgabenteil e) berechnete Mittenfrequenz von 10,1 MHz besitzt.

