Elektronische Schaltungen SS 2022

1. Übungsblatt - Lösungen

Grundlagen & Passive Komponenten

Aufgabe 1 (Spannungs- und Stromteiler)

a) Zunächst müssen die Maschenumläufe definiert werden, siehe Abbildung 1. Die zugehörigen Maschengleichungen lauten:

$$\text{M1:}\ -U_0 + R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 = 0 \tag{1}$$

$$\text{M2:}\ -R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 = 0 \tag{2}$$

$$\text{M3:}\ -R_3 \cdot I_3 + R_4 \cdot I_4 = 0 \tag{3}$$

Zudem kann eine Knotengleichung am Knoten **X** der Schaltung in Abbildung 1 formuliert werden:

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4 \tag{4}$$

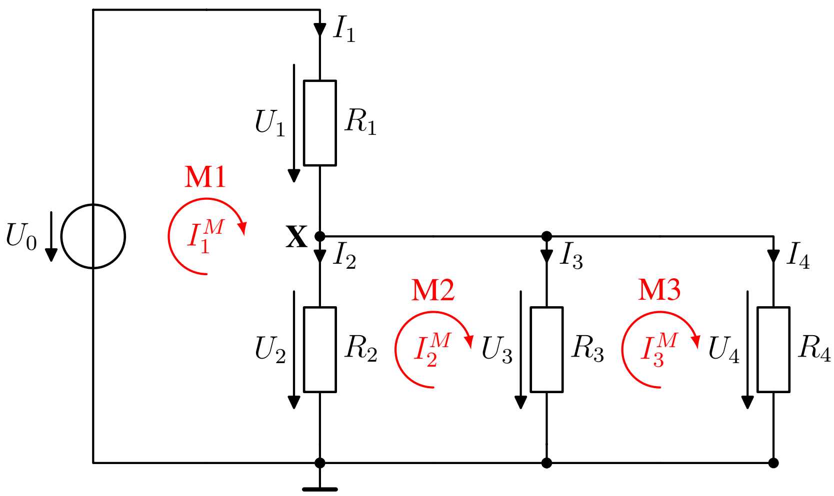

Abbildung 1: Schaltung mit eingezeichneten Maschen.

Zur Berechnung der Teilströme könnte nun das aus den Gleichungen (1) bis (4) bestehende Gleichungssystem gelöst werden. Da dies allerdings sehr umständlich ist, wollen wir in den folgenden Teilaufgaben weitere Lösungsmethoden betrachten.

b) Das Maschenstromverfahren wurde in der Vorlesung Lineare Elektrische Netze (LEN) behandelt und dient in dieser Vorlesung lediglich zu Anschauungszwecken. Zunächst werden die Maschenströme I_1^M, I_2^M und I_3^M eingeführt, siehe Abbildung 1. Mit Hilfe dieser Maschenströme kann das folgende Gleichungssystem aufgestellt werden[1]:

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 & -R_3 \\ 0 & -R_3 & R_3 + R_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1^M \\ I_2^M \\ I_3^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Durch Einsetzen der gegebenen Bauteilwerte in (5) ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 350\,\Omega & -200\,\Omega & 0 \\ -200\,\Omega & 400\,\Omega & -200\,\Omega \\ 0 & -200\,\Omega & 300\,\Omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1^M \\ I_2^M \\ I_3^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\,\mathrm{V} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem kann durch geeignete Umformungen oder durch ein geeignetes Computerprogramm, z.B. Matlab, gelöst werden. Die resultierenden Maschenströme lauten:

$$I_1^M = 30\,\mathrm{mA} \qquad I_2^M = 22{,}5\,\mathrm{mA} \qquad I_3^M = 15\,\mathrm{mA}$$

Abschließend müssen die gesuchten Zweigströme noch aus den eben berechneten Maschenströmen ermittelt werden. Aus der Schaltung in Abbildung 1 folgt:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_1^M = 30\,\mathrm{mA} \\ I_2 &= I_1^M - I_2^M = 30\,\mathrm{mA} - 22{,}5\,\mathrm{mA} = 7{,}5\,\mathrm{mA} \\ I_3 &= I_2^M - I_3^M = 22{,}5\,\mathrm{mA} - 15\,\mathrm{mA} = 7{,}5\,\mathrm{mA} \\ I_4 &= I_3^M = 15\,\mathrm{mA} \end{aligned}$$

[1] Erinnerung aus LEN: In den Diagonalelementen steht die Summe aller Widerstände der zu diesem Index gehörenden Masche und an den anderen Positionen (neben der Diagonalen) stehen die Widerstände, die sich zwei Maschen teilen. Beispiel: Matrixelement 22 beinhaltet die beiden Widerstände R_2 und R_3 der zweiten Masche, welche von I_2^M durchflossen werden. Die Matrixelemente 21 und 23 entsprechen dann jeweils den Widerständen, die zusätzlich auch noch von den benachbarten Maschenströmen I_1^M bzw. I_3^M mit umgekehrter Stromrichtung durchflossen werden.

Aus den Teilströmen I_{1-4} können mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes noch die zugehörigen Teilspannungen berechnet werden:

$$\begin{aligned}
U_1 &= R_1 \cdot I_1 = 150\,\Omega \cdot 30\,\mathrm{mA} = 4{,}5\,\mathrm{V}\\
U_2 &= R_2 \cdot I_2 = 200\,\Omega \cdot 7{,}5\,\mathrm{mA} = 1{,}5\,\mathrm{V}\\
U_3 &= R_3 \cdot I_3 = 200\,\Omega \cdot 7{,}5\,\mathrm{mA} = 1{,}5\,\mathrm{V}\\
U_4 &= R_4 \cdot I_4 = 100\,\Omega \cdot 15\,\mathrm{mA} = 1{,}5\,\mathrm{V}
\end{aligned}$$

Das Maschenstromverfahren eignet sich insbesondere für die rechnergestützte Schaltungssimulation, da das Aufstellen der Matrixgleichung sowie die anschließende Lösung des Gleichungssystems einfach automatisiert werden kann. Die obigen Rechnungen zeigen aber, dass dieses Verfahren für die Berechnung einfacher Schaltungen mit Stift und Taschenrechner bereits einen erheblichen Rechenaufwand bedeutet.
Tipp: Die meisten in der Vorlesung ES behandelten Schaltungen können durch geeignete Vereinfachung deutlich schneller und mit einfachen Mitteln (z.B. Anwendung der Spannungs- und Stromteilerregel) analysiert werden, wie die beiden folgenden Teilaufgaben verdeutlichen sollen.

c) Die Widerstände R_2, R_3 und R_4 sind parallel geschaltet und können folglich in einem gemeinsamen Widerstand $R_{234} = 200\,\Omega \parallel 200\,\Omega \parallel 100\,\Omega = 50\,\Omega$ zusammengefasst werden. Dadurch kann die Schaltung deutlich vereinfacht werden, siehe Abbildung 2.

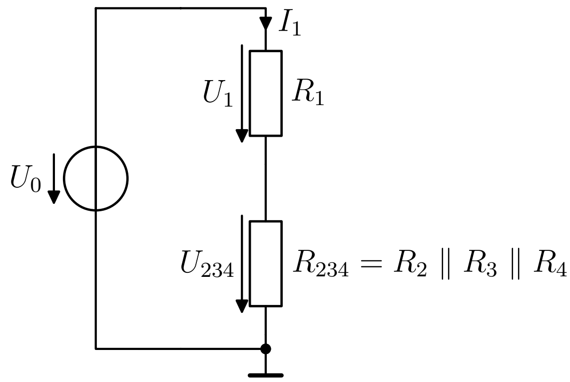

Abbildung 2: Vereinfachte Schaltung zur Anwendung der Spannungsteilerregel.

Die gesuchten Teilspannungen folgen durch Anwendung der Spannungsteilerregel zu:

$$\begin{aligned}
U_1 &= \frac{R_1}{R_1 + R_{234}} \cdot U_0 = \frac{150\,\Omega}{150\,\Omega + 50\,\Omega} \cdot 6\,\mathrm{V} = 4{,}5\,\mathrm{V}\\
U_2 = U_3 = U_4 = U_{234} &= \frac{R_{234}}{R_1 + R_{234}} \cdot U_0 = \frac{50\,\Omega}{150\,\Omega + 50\,\Omega} \cdot 6\,\mathrm{V} = 1{,}5\,\mathrm{V}
\end{aligned}$$

Aus den Teilspannungen können mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes noch die zugehörigen Teilströme berechnet werden:

$$I_1 = \frac{U_0}{R_1 + R_{234}} = \frac{U_1}{R_1} = \frac{4{,}5\,\mathrm{V}}{150\,\Omega} = 30\,\mathrm{mA}$$
$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{1{,}5\,\mathrm{V}}{200\,\Omega} = 7{,}5\,\mathrm{mA}$$
$$I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{1{,}5\,\mathrm{V}}{200\,\Omega} = 7{,}5\,\mathrm{mA}$$
$$I_4 = \frac{U_4}{R_4} = \frac{1{,}5\,\mathrm{V}}{100\,\Omega} = 15\,\mathrm{mA}$$

d) Durch Anwendung der Stromteilerregel können die Ströme I_1 und I_2 in Abhängigkeit von I_0 angegeben und berechnet werden:

$$I_1 = \frac{R_2 + R_3 \parallel R_4}{R_1 + R_2 + R_3 \parallel R_4} \cdot I_0 = \frac{80\,\Omega + 120\,\Omega}{400\,\Omega + 80\,\Omega + 120\,\Omega} \cdot 15\,\mathrm{mA} = 5\,\mathrm{mA}$$
$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3 \parallel R_4} \cdot I_0 = \frac{400\,\Omega}{400\,\Omega + 80\,\Omega + 120\,\Omega} \cdot 15\,\mathrm{mA} = 10\,\mathrm{mA}$$

Mit bekannten Strom I_2 können die verbleibenden Ströme I_3 und I_4 bestimmt werden:

$$I_3 = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \cdot I_2 = \frac{200\,\Omega}{300\,\Omega + 200\,\Omega} \cdot 10\,\mathrm{mA} = 4\,\mathrm{mA}$$
$$I_4 = \frac{R_3}{R_3 + R_4} \cdot I_2 = \frac{300\,\Omega}{300\,\Omega + 200\,\Omega} \cdot 10\,\mathrm{mA} = 6\,\mathrm{mA}$$

Eine abschließende Kontrolle zeigt, dass die beiden Knotengleichungen

$$I_0 = I_1 + I_2 = 5\,\mathrm{mA} + 10\,\mathrm{mA} = 15\,\mathrm{mA}$$
$$I_2 = I_3 + I_4 = 4\,\mathrm{mA} + 6\,\mathrm{mA} = 10\,\mathrm{mA}$$

erfüllt sind.

Aufgabe 2 (Gleich- und Wechselspannung)

a) Für die Impedanz eines Kondensators gilt allgemein:

$$Z_\mathrm{C} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \cdot 2\pi f \cdot C}$$

Da eine Gleichspannungsquelle (DC, d.h. $f = 0$) verwendet wird, muss folglich $|Z_\mathrm{C}| \to \infty$ gelten. Also kann der Kondensator für DC-Signale durch einen Leerlauf ersetzt werden. Es verbleiben lediglich die Widerstände R_1 und R_2, sodass die gesuchte Spannung U_2 mit Hilfe der bekannten Spannungsteilerregel berechnet werden kann:

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_0 = \frac{300\,\Omega}{300\,\Omega + 500\,\Omega} \cdot 8\,\mathrm{V} = 3\,\mathrm{V}$$

b) Für die Impedanz einer Spule gilt allgemein:

$$Z_\mathrm{L} = j\omega L = j \cdot 2\pi f \cdot L$$

Für DC-Signale muss folglich $|Z_\mathrm{L}| = 0$ gelten, sodass die Spule durch einen Kurzschluss ersetzt werden kann. Somit gilt für die gesuchte Spannung $U_2 = 0$.

c) Für Wechselsignale stellt die Spule eine frequenzabhängige Impedanz dar. Für die Berechnung der gesuchten Spannung $|u_2|$ bietet sich zunächst die Vereinfachung der Schaltung durch das folgende Ersatzschaltbild in Abbildung 3 an:

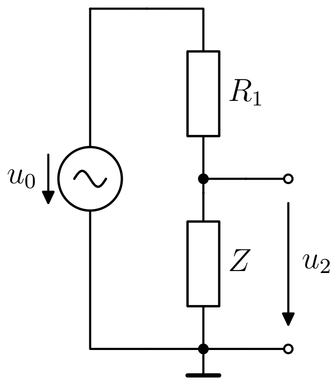

Abbildung 3: Ersatzschaltbild mit $Z = R_2 \parallel j\omega L$.

Hierfür wurde die Parallelschaltung aus Widerstand R_2 und Induktivität L zur Impedanz

$$Z = R_2 \parallel j\omega L = \frac{j\omega L R_2}{R_2 + j\omega L} \tag{6}$$

zusammengefasst.

Aus dem Ersatzschaltbild folgt unmittelbar, dass die gesuchte Spannung $|u_2|$ mithilfe der Spannungsteilerregel bestimmt werden kann:

$$|u_2| = \left| \frac{Z}{R_1 + Z} \right| \cdot |u_0| = \frac{|Z|}{|R_1 + Z|} \cdot |u_0| \tag{7}$$

Durch Betragsbildung von (6) folgt:

$$|Z| = \frac{\omega L R_2}{\sqrt{{R_2}^2 + (2\pi f \cdot L)^2}}$$

Der Betrag des Nenners in (7) kann folgendermaßen angegeben werden:

$$\begin{aligned} |R_1 + Z| &= \left| R_1 + \frac{j\omega L R_2}{R_2 + j\omega L} \right| = \frac{|R_1 R_2 + j\omega L(R_1 + R_2)|}{|R_2 + j\omega L|} \\ &= \frac{\sqrt{(R_1 R_2)^2 + (2\pi f \cdot L \cdot (R_1 + R_2))^2}}{\sqrt{{R_2}^2 + (2\pi f \cdot L)^2}} \end{aligned}$$

Durch anschließendes Einsetzen der jeweiligen Werte für die Frequenzen f_{1-3} kann die gesuchte Spannung $|u_2|$ aus (7) berechnet werden. Exemplarische Rechnung für $f_3 = 10\,\mathrm{GHz}$:

$$\begin{aligned} |Z| &= \frac{2\pi \cdot 10\,\mathrm{GHz} \cdot 30\,\mathrm{nH} \cdot 300\,\Omega}{\sqrt{(300\,\Omega)^2 + (2\pi \cdot 10\,\mathrm{GHz} \cdot 30\,\mathrm{nH})^2}} = 296{,}3\,\Omega \\ |R_1 + Z| &= \frac{\sqrt{(500\,\Omega \cdot 300\,\Omega)^2 + (2\pi \cdot 10\,\mathrm{GHz} \cdot 30\,\mathrm{nH} \cdot (500\,\Omega + 300\,\Omega))^2}}{\sqrt{(300\,\Omega)^2 + (2\pi \cdot 10\,\mathrm{GHz} \cdot 30\,\mathrm{nH})^2}} = 794{,}0\,\Omega \\ |u_2| &= \frac{296{,}3\,\Omega}{794{,}0\,\Omega} \cdot 2\,\mathrm{V} = 746{,}3\,\mathrm{mV} \end{aligned}$$

Die weiteren Werte können analog berechnet werden und sind in der folgenden Tabelle 1 zusammengefasst:

	$f_1 = 10\,\mathrm{kHz}$	$f_2 = 10\,\mathrm{MHz}$	$f_3 = 10\,\mathrm{GHz}$
$\lvert Z \rvert$	$1{,}9\,\mathrm{m\Omega}$	$1{,}9\,\Omega$	$296{,}3\,\Omega$
$\lvert R_1 + Z \rvert$	$500{,}0\,\Omega$	$500{,}0\,\Omega$	$794{,}0\,\Omega$
$\lvert u_2 \rvert$	$7{,}5\,\mu\mathrm{V}$	$7{,}5\,\mathrm{mV}$	$746{,}3\,\mathrm{mV}$

Tabelle 1: Spannungs- und Impedanzwerte in Abhängigkeit von der Frequenz.

d) Aus den in der Teilaufgabe c) berechneten Spannungswerten $|u_2|$ können die gesuchten Ströme i_2 und i_L berechnet werden. Da der Widerstand R_2 und die Induktivität L parallel geschaltet sind, muss gelten:

$$|i_2| = \frac{|u_2|}{R_2}, \qquad |i_\mathrm{L}| = \frac{|u_2|}{|j\omega L|} = \frac{|u_2|}{2\pi f \cdot L}$$

Einsetzen der Werte liefert dann die in der Tabelle 2 zusammengefassten Ströme:

	$f_1 = 10\,\mathrm{kHz}$	$f_2 = 10\,\mathrm{MHz}$	$f_3 = 10\,\mathrm{GHz}$
$\lvert u_2 \rvert$	$7{,}5\,\mu\mathrm{V}$	$7{,}5\,\mathrm{mV}$	$746{,}3\,\mathrm{mV}$
$2\pi f \cdot L$	$1{,}9\,\mathrm{m}\Omega$	$1{,}9\,\Omega$	$1{,}9\,\mathrm{k}\Omega$
$\lvert i_2 \rvert$	$25\,\mathrm{nA}$	$25\,\mu\mathrm{A}$	$2{,}49\,\mathrm{mA}$
$\lvert i_\mathrm{L} \rvert$	$4\,\mathrm{mA}$	$4\,\mathrm{mA}$	$396\,\mu\mathrm{A}$

Tabelle 2: Ausgangsspannung, Spulenimpedanz und gesuchte Ströme in Abhängigkeit von der Frequenz.

e) Das Frequenzverhalten der Ausgangsspannung $|u_2|$ (siehe Tabelle 1) zeigt deutlich, dass die Schaltung **Hochpassverhalten** aufweist. Für niederfrequente Signale ist die Impedanz der Spule sowie die Impedanz $|Z|$ der Parallelschaltung aus R_2 und L gering, und die Spannung $|u_2|$ am Ausgang geht gegen Null. Mit steigender Frequenz steigt $|Z|$ und damit auch die Spannung $|u_2|$ am Ausgang.

Aufgabe 3 (Frequenzverhalten)

a) Durch Anwendung der Spannungsteilerregel ergibt sich folgende Übertragungsfunktion:

$$H(\omega) = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} \tag{8}$$

Durch Betragsbildung ergibt sich:

$$|H(\omega)| = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

Zur einfacheren Konstruktion des Bode-Diagramms kann die Übertragungsfunktion in (8) normiert werden:

$$H(\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}, \tag{9}$$

wobei $\omega_1 = \frac{R}{L}$ der $3\,\mathrm{dB}$-Grenzfrequenz[2] der Schaltung entspricht. Der Frequenzverlauf von $|H(\omega)|$ ist im folgenden Bode-Diagramm (s. Abbildung 4) dargestellt und weist auf ein **Hochpassverhalten** der Schaltung hin. Die $3\,\mathrm{dB}$-Grenzfrequenz beträgt

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{R}{2\pi L} = \frac{25\,\Omega}{2\pi \cdot 2{,}5\,\mu\mathrm{H}} \approx 1{,}59\,\mathrm{MHz}$$

[2]Erinnerung: Die $3\,\mathrm{dB}$-Grenzfrequenz (oder Knickfrequenz) ist die Frequenz, bei der die Spannungsverstärkung der Schaltung auf den Wert $\left|\frac{u_\mathrm{a}(\omega)}{u_\mathrm{e}(\omega)}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sinkt bzw. $20\log\left|\frac{u_\mathrm{a}(\omega)}{u_\mathrm{e}(\omega)}\right| = 20\log\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = -3{,}01\,\mathrm{dB}$ gilt.

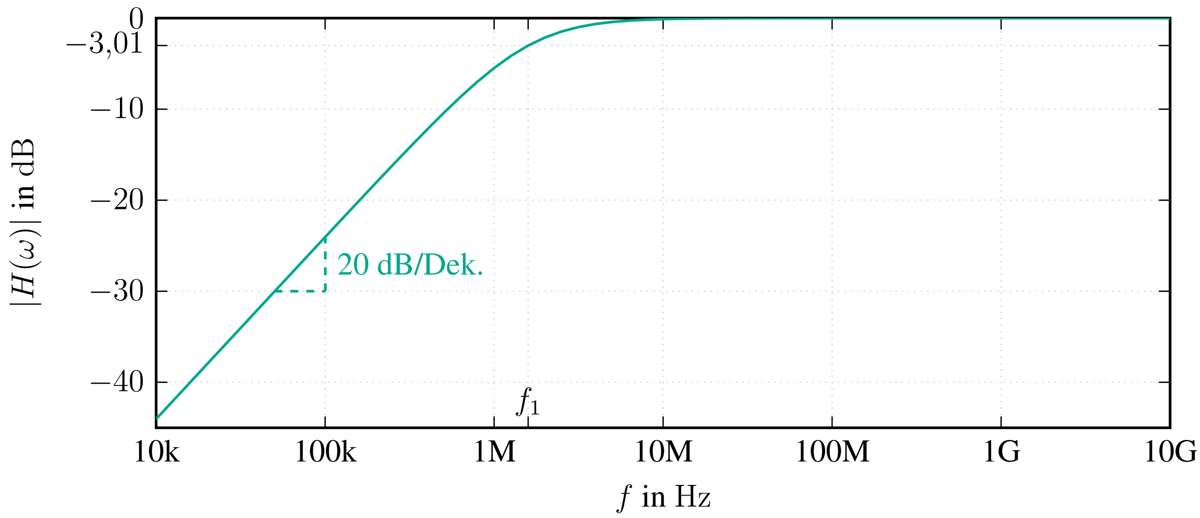

Abbildung 4: Simulierter Frequenzverlauf von $|H(\omega)|$ aus LTspice mit markierter Knickfrequenz f_1.

b) Für $f = 0$ kann die Spule wegen $Z_L = j2\pi f \cdot L$ durch einen Kurzschluss ersetzt werden, d.h. die Spannung am Ausgang ist Null. Dies trifft ebenfalls für $f \to \infty$ zu, da die Impedanz $Z_C = \frac{1}{j2\pi f \cdot C}$ des Kondensators null wird.

$$|u_\mathrm{a}(f = 0)| = 0$$
$$|u_\mathrm{a}(f \to \infty)| = 0$$

Zur Bestimmung der gesuchten Frequenz f_m muss zudem die Übertragungsfunktion der Schaltung ermittelt werden:

$$H(\omega) = \frac{j\omega L \parallel \frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L \parallel \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\frac{\frac{j\omega L}{j\omega C}}{j\omega L - j\frac{1}{\omega C}}}{R + \frac{\frac{j\omega L}{j\omega C}}{j\omega L - j\frac{1}{\omega C}}} = \frac{\frac{L}{C}}{j\omega LR - j\frac{R}{\omega C} + \frac{L}{C}}$$
$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j(\omega RC - \frac{R}{\omega L})}$$

Der Betrag der Übertragungsfunktion

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\omega RC - \frac{R}{\omega L}\right)^2}}$$

wird maximal, wenn der Nenner minimal wird, d.h. wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\omega RC - \frac{R}{\omega L} = 0 \implies \omega^2 = \frac{1}{LC} \implies \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Damit folgt für die gesuchte Frequenz f_m :

$$f_\mathrm{m} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2{,}5\,\mathrm{\mu H} \cdot 4\,\mathrm{pF}}} = 50{,}33\,\mathrm{MHz}$$

c) Der Frequenzverlauf von $|H(\omega)|$ ist im folgenden Bode-Diagramm (s. Abbildung 5) dargestellt und weist auf ein **Bandpassverhalten** der Schaltung hin. Es zeigt sich, dass die Mittenfrequenz des Bandpasses der im Aufgabenteil b) berechneten Frequenz $f_\mathrm{m} = 50{,}33\,\mathrm{MHz}$ entspricht. Hinweis: Es kann gezeigt werden, dass die Breite des Durchlassbereichs durch die folgenden Knickfrequenzen gegeben ist:

$$f_1 = \frac{R}{2\pi L} = \frac{25\,\Omega}{2\pi \cdot 2{,}5\,\mathrm{\mu H}} \approx 1{,}59\,\mathrm{MHz}$$
$$f_2 = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi \cdot 25\,\Omega \cdot 4\,\mathrm{pF}} \approx 1{,}59\,\mathrm{GHz}$$

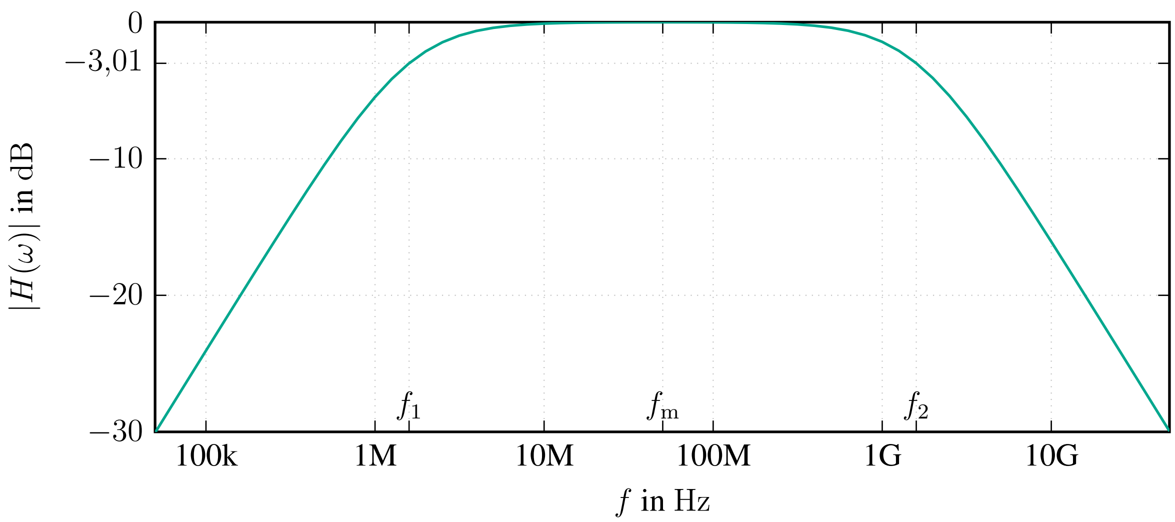

Abbildung 5: Simulierter Frequenzverlauf von $|H(\omega)|$ aus LTspice mit markierten Knickfrequenzen $f_{1,2}$ und Mittenfrequenz f_m.