Grundbegriffe der Informatik

Kapitel 13: Prädikatenlogik erster Stufe

Mattias Ulbrich
(basierend auf Folien von Thomas Worsch)

KIT · Institut für Theoretische Informatik

Wintersemester 2023/2024

Überblick

Syntax prädikatenlogischer Formeln

Semantik prädikatenenlogischer Formeln

Konstanten und Gleichheit

Beweisbarkeit

Formalisieren in Prädikatenlogik

Wo sind wir?

Karlsruher Institut für Technologie

Syntax prädikatenlogischer Formeln

Semantik prädikatenenlogischer Formeln

Konstanten und Gleichheit

Beweisbarkeit

Formalisieren in Prädikatenlogik

Prädikatenlogische Formeln

- komplizierter aufgebaut als aussagenlogische Formeln
- Aussagenlogik: Aussagen sind atomar: “Hans ist eine Person”
- Prädikatenlogik: Aussagen über Objekte: “Es gibt eine Person, die ...”
  (Aussagen sind damit zusammengesetzt.)
- Ziel: Formalisierung für Formeln wie z. B.
  $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x : |x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
  $\forall p\ istPerson(p) \to \exists m\ istPerson(m) \land mutterVon(p, m)$
- Damit werden Syntax und Semantik aufwändiger …

Beispiel:

«*Wenn es jeden Tag gibt es Schnitzel in der Mensa gibt,*
dann gibt es auch am Mittwoch Schnitzel in der Mensa.»

In Aussagenlogik: `JedenTagSchnitzel` → `MittwochSchnitzel`

keine Gültigkeit

Syntaktische Einheiten

Drei syntaktische Einheiten machen Prädikatenlogik aus:

- *Terme*
  - Variablensymbole, Funktionssymbole
- *atomare Formeln*
  - aus Termen
  - mittels Relationssymbolen
- *prädikatenlogische Formeln*
  - aus atomaren Formeln unter Verwendung
  - aussagenlogischer Konnektive und
  - Quantoren

Prädikatenlogische Formeln — der Aufwand lohnt sich

- kompliziertere Syntax
- aufwändigere Definitionen
- aber (deswegen) viel benutzt
  - beim „alltäglichen Formulieren“
    - Definitionen, Aussagen, Beweise
  - fundamentale Grundlagen der Mathematik
  - bei der Verifikation von Algorithmen

Signatur: Alphabete für Formelsymbole

Karlsruher Institut für Technologie

$\Sigma = (Var_{PL}, Fun_{PL}, Rel_{PL})$ heißt Signatur

- *Variablensymbole:* Alphabet Var_{PL}
  - $\mathtt{x}_i$ (für endliche viele $i \in \mathbb{N}_0$)
  - kurz $\mathtt{x}$, $\mathtt{y}$, $\mathtt{z}$
- *Funktionsymbole:* Alphabet Fun_{PL}
  - $\mathtt{f}_i$ (für endliche viele $i \in \mathbb{N}_0$)
  - kurz $\mathtt{f}$, $\mathtt{g}$, $\mathtt{h}$
  - jedes $\mathtt{f}_i \in Fun_{PL}$ hat *Stelligkeit* $\mathrm{ar}(\mathtt{f}_i) \in \mathbb{N}_0$ (engl. *arity*)
- *Relationsymbole*/Prädikatssymbole: Alphabet Rel_{PL}
  - $\mathtt{R}_i$ (für endliche viele $i \in \mathbb{N}_0$)
  - kurz als $\mathtt{R}$, $\mathtt{S}$
  - jedes $\mathtt{R}_i \in Rel_{PL}$ hat *Stelligkeit* $\mathrm{ar}(\mathtt{R}_i) \in \mathbb{N}_0$

Alphabet für Präd.-Logik:

- $A_\Sigma = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, (, \; ,, \;), \forall, \exists\} \cup Var_{PL} \cup Fun_{PL} \cup Rel_{PL}$

Die Syntax der Prädikatenlogik

Signatur

$$\Sigma = (Var_{PL}, Fun_{PL}, Rel_{PL})$$

Terme: Die Menge der Terme Ter_Σ ist die kleinste Menge, für die gilt:

Die Syntax der Prädikatenlogik

Signatur

$$\Sigma = (\mathit{Var}_{PL}, \mathit{Fun}_{PL}, \mathit{Rel}_{PL})$$

Terme: Die Menge der Terme Ter_Σ ist die kleinste Menge, für die gilt:

- Wenn $\mathtt{x} \in \mathit{Var}_{PL}$, dann ist $\mathtt{x} \in \mathit{Ter}$.

Die Syntax der Prädikatenlogik

Signatur

$$\Sigma = (Var_{PL}, Fun_{PL}, Rel_{PL})$$

Terme: Die Menge der Terme Ter_Σ ist die kleinste Menge, für die gilt:

- Wenn $\mathtt{x} \in Var_{PL}$, dann ist $\mathtt{x} \in Ter$.
- Wenn $\mathtt{f} \in Fun_{PL}$, $t_1, \ldots, t_{\mathrm{ar}(\mathtt{f})} \in Ter_\Sigma$, dann ist $\mathtt{f}(t_1\mathtt{,} \ldots \mathtt{,} t_{\mathrm{ar}(\mathtt{f})}\mathtt{)} \in Ter_\Sigma$.

Die Syntax der Prädikatenlogik

Signatur
$\Sigma = (Var_{PL},$
$Fun_{PL},$
$Rel_{PL})$

Terme: Die Menge der Terme Ter_Σ ist die kleinste Menge, für die gilt:

- Wenn $\mathtt{x} \in Var_{PL}$, dann ist $\mathtt{x} \in Ter$.
- Wenn $\mathtt{f} \in Fun_{PL}$, $t_1, \ldots, t_{\mathrm{ar}(\mathtt{f})} \in Ter_\Sigma$, dann ist $\mathtt{f}(t_1\mathtt{,} \ldots \mathtt{,} t_{\mathrm{ar}(\mathtt{f})}\mathtt{)} \in Ter_\Sigma$.

Atomare Formeln: Die Menge der atomaren Formeln $AtFor\Sigma$ ist die kleinste Menge, für die gilt:

Die Syntax der Prädikatenlogik

Signatur
$$\Sigma = (Var_{PL}, Fun_{PL}, Rel_{PL})$$

Terme: Die Menge der Terme Ter_Σ ist die kleinste Menge, für die gilt:

- Wenn $\mathtt{x} \in Var_{PL}$, dann ist $\mathtt{x} \in Ter$.
- Wenn $\mathtt{f} \in Fun_{PL}$, $t_1, \ldots, t_{ar(\mathtt{f})} \in Ter_\Sigma$, dann ist $\mathtt{f(}t_1\mathtt{,} \ldots \mathtt{,} t_{ar(\mathtt{f})}\mathtt{)} \in Ter_\Sigma$.

Atomare Formeln: Die Menge der atomaren Formeln $AtFor\Sigma$ ist die kleinste Menge, für die gilt:

- Wenn $\mathtt{R} \in Rel_{PL}$, $t_1, \ldots, t_{ar(\mathtt{R})} \in Ter_\Sigma$, dann auch $\mathtt{R(}t_1\mathtt{,} \ldots \mathtt{,} t_{ar(\mathtt{R})}\mathtt{)} \in For_\Sigma$.

Die Syntax der Prädikatenlogik

Signatur
$\Sigma = (Var_{PL},$
$Fun_{PL},$
$Rel_{PL})$

Terme: Die Menge der Terme Ter_Σ ist die kleinste Menge, für die gilt:

- Wenn $\mathtt{x} \in Var_{PL}$, dann ist $\mathtt{x} \in Ter$.
- Wenn $\mathtt{f} \in Fun_{PL}$, $t_1, \ldots, t_{\mathrm{ar}(\mathtt{f})} \in Ter_\Sigma$, dann ist $\mathtt{f(}t_1\mathtt{,} \ldots \mathtt{,} t_{\mathrm{ar}(\mathtt{f})}\mathtt{)} \in Ter_\Sigma$.

Atomare Formeln: Die Menge der atomaren Formeln $AtFor\Sigma$ ist die kleinste Menge, für die gilt:

- Wenn $\mathtt{R} \in Rel_{PL}$, $t_1, \ldots, t_{\mathrm{ar}(\mathtt{R})} \in Ter_\Sigma$, dann auch $\mathtt{R(}t_1\mathtt{,} \ldots \mathtt{,} t_{\mathrm{ar}(\mathtt{R})}\mathtt{)} \in For_\Sigma$.

Formeln: Die Menge der Formeln For_Σ ist die kleinste Menge, für die gilt:

Die Syntax der Prädikatenlogik

Signatur
$$\Sigma = (Var_{PL}, Fun_{PL}, Rel_{PL})$$

Terme: Die Menge der Terme Ter_Σ ist die kleinste Menge, für die gilt:

- Wenn $\mathtt{x} \in Var_{PL}$, dann ist $\mathtt{x} \in Ter$.
- Wenn $\mathtt{f} \in Fun_{PL}$, $t_1, \ldots, t_{ar(\mathtt{f})} \in Ter_\Sigma$, dann ist $\mathtt{f}(t_1\mathtt{,} \ldots \mathtt{,} t_{ar(\mathtt{f})}\mathtt{)} \in Ter_\Sigma$.

Atomare Formeln: Die Menge der atomaren Formeln $AtFor\Sigma$ ist die kleinste Menge, für die gilt:

- Wenn $\mathtt{R} \in Rel_{PL}$, $t_1, \ldots, t_{ar(\mathtt{R})} \in Ter_\Sigma$, dann auch $\mathtt{R}(t_1\mathtt{,} \ldots \mathtt{,} t_{ar(\mathtt{R})}\mathtt{)} \in For_\Sigma$.

Formeln: Die Menge der Formeln For_Σ ist die kleinste Menge, für die gilt:

- Wenn $A \in AtFor_\Sigma$, dann ist $A \in For_\Sigma$.

Die Syntax der Prädikatenlogik

Signatur
$$\Sigma = (Var_{PL}, Fun_{PL}, Rel_{PL})$$

Terme: Die Menge der Terme Ter_Σ ist die kleinste Menge, für die gilt:

- Wenn $\mathtt{x} \in Var_{PL}$, dann ist $\mathtt{x} \in Ter$.
- Wenn $\mathtt{f} \in Fun_{PL}$, $t_1, \ldots, t_{ar(\mathtt{f})} \in Ter_\Sigma$, dann ist $\mathtt{f}(t_1, \ldots, t_{ar(\mathtt{f})}) \in Ter_\Sigma$.

Atomare Formeln: Die Menge der atomaren Formeln $AtFor\Sigma$ ist die kleinste Menge, für die gilt:

- Wenn $\mathtt{R} \in Rel_{PL}$, $t_1, \ldots, t_{ar(\mathtt{R})} \in Ter_\Sigma$, dann auch $\mathtt{R}(t_1, \ldots, t_{ar(\mathtt{R})}) \in For_\Sigma$.

Formeln: Die Menge der Formeln For_Σ ist die kleinste Menge, für die gilt:

- Wenn $A \in AtFor_\Sigma$, dann ist $A \in For_\Sigma$.
- Wenn $A, B \in For_\Sigma$, dann sind $\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B) \in For_\Sigma$.

Die Syntax der Prädikatenlogik

Signatur
$\Sigma = (\mathit{Var}_{PL},$
$\mathit{Fun}_{PL},$
$\mathit{Rel}_{PL})$

Terme: Die Menge der Terme Ter_Σ ist die kleinste Menge, für die gilt:

- Wenn $\mathtt{x} \in \mathit{Var}_{PL}$, dann ist $\mathtt{x} \in \mathit{Ter}$.
- Wenn $\mathtt{f} \in \mathit{Fun}_{PL}$, $t_1, \dots, t_{\mathrm{ar}(\mathtt{f})} \in \mathit{Ter}_\Sigma$, dann ist $\mathtt{f}(t_1\mathtt{,} \dots \mathtt{,} t_{\mathrm{ar}(\mathtt{f})}) \in \mathit{Ter}_\Sigma$.

Atomare Formeln: Die Menge der atomaren Formeln $\mathit{AtFor}\Sigma$ ist die kleinste Menge, für die gilt:

- Wenn $\mathtt{R} \in \mathit{Rel}_{PL}$, $t_1, \dots, t_{\mathrm{ar}(\mathtt{R})} \in \mathit{Ter}_\Sigma$, dann auch $\mathtt{R}(t_1\mathtt{,} \dots \mathtt{,} t_{\mathrm{ar}(\mathtt{R})}) \in \mathit{For}_\Sigma$.

Formeln: Die Menge der Formeln For_Σ ist die kleinste Menge, für die gilt:

- Wenn $A \in \mathit{AtFor}_\Sigma$, dann ist $A \in \mathit{For}_\Sigma$.
- Wenn $A, B \in \mathit{For}_\Sigma$, dann sind $\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \to B) \in \mathit{For}_\Sigma$.
- Wenn $\mathtt{x} \in \mathit{Var}_{PL}$ und $F \in \mathit{For}_\Sigma$, dann sind $(\forall \mathtt{x}\ F), (\exists \mathtt{x}\ F) \in \mathit{For}_\Sigma$.

Randbemerkung: Gleichungen über Sprachen.

Terme: Die Menge der Terme ist die **kleinste** Menge, für die gilt:

- Wenn $\mathtt{x}_i \in Var_{PL}$, dann ist $\mathtt{x}_i \in Ter$.
- Wenn $t \in Ter_\Sigma$, dann ist $\mathtt{f}(t) \in Ter_\Sigma$.

(angenommen, dass $Fun_{PL} = \{\mathtt{f}\}$ und $\mathrm{ar}(\mathtt{f}) = 1$)

Randbemerkung: Gleichungen über Sprachen.

Randbemerkung:

$Var_{PL} \subseteq Ter_\Sigma$

$\{\mathtt{f(}\} Ter_\Sigma \{\mathtt{)}\} \subseteq Ter_\Sigma$

Terme: Die Menge der Terme ist die **kleinste** Menge, für die gilt:

- Wenn $\mathtt{x}_i \in Var_{PL}$, dann ist $\mathtt{x}_i \in Ter$.
- Wenn $t \in Ter_\Sigma$, dann ist $\mathtt{f(}t\mathtt{)} \in Ter_\Sigma$.

(angenommen, dass $Fun_{PL} = \{\mathtt{f}\}$ und $\mathrm{ar}(\mathtt{f}) = 1$)

Randbemerkung: Gleichungen über Sprachen.

Randbemerkung:

$Var_{PL} \subseteq Ter_\Sigma$

$\{\mathtt{f}(\}Ter_\Sigma\{)\} \subseteq Ter_\Sigma$

Terme: Die Menge der Terme ist die **kleinste** Menge, für die gilt:

- Wenn $\mathtt{x}_i \in Var_{PL}$, dann ist $\mathtt{x}_i \in Ter$.
- Wenn $t \in Ter_\Sigma$, dann ist $\mathtt{f}(t) \in Ter_\Sigma$.

(angenommen, dass $Fun_{PL} = \{\mathtt{f}\}$ und $\mathrm{ar}(\mathtt{f}) = 1$)

$$Ter_\Sigma = Var_{PL} \cup \{\mathtt{f}\,(\}Ter_\Sigma\{)\}$$

$\longrightarrow$ Gleichungen über Sprachen.

(Subscript Σ der Lesbarkeit wegen weggelassen)

Was ist wichtig

- Das sollten Sie mitnehmen:
  - Terme
  - atomare Formeln
  - Formeln
- Das sollten Sie üben:
  - Formeln analysieren
    - Syntaxfehler suchen
  - Formeln schreiben
    - Syntaxfehler vermeiden ;-)

Wo sind wir?

Syntax prädikatenlogischer Formeln

Semantik prädikatenenlogischer Formeln

Konstanten und Gleichheit

Beweisbarkeit

Formalisieren in Prädikatenlogik

Von der Aussagen- zur Prädikatenlogik

Aussagenlogik

- Aussagen sind atomar, keine weitere Unterstruktur
- Aus «*Es ist nicht warm.*» und «*Wenn es August ist, ist es warm.*» folgt «*Es ist nicht August.*».

Von der Aussagen- zur Prädikatenlogik

Aussagenlogik

- Aussagen sind atomar, keine weitere Unterstruktur

$\neg Q, P \to Q \models \neg P$

- Aus «*Es ist nicht warm.*» und «*Wenn es August ist, ist es warm.*» folgt «*Es ist nicht August.*».

Von der Aussagen- zur Prädikatenlogik

Karlsruher Institut für Technologie

Aussagenlogik

- Aussagen sind atomar, keine weitere Unterstruktur

$$\neg Q,\ P \rightarrow Q \models \neg P$$

- Aus «*Es ist nicht warm.*» und «*Wenn es August ist, ist es warm.*» folgt «*Es ist nicht August.*».

Prädikatenlogik

- Aussagen sind zusammengesetzt, haben eine Struktur (durch Terme)
- Es gibt Variablen, die quantifiziert werden können.
- Aus «Jedes Genie ist mindestens so klug wie alle anderen.» und «Tom ist nicht so klug wie sein Bruder.» folgt «Tom ist kein Genie.»

Prädikatenlogik

- Aussagen sind zusammengesetzt, haben eine Struktur (durch Terme)
- Es gibt Variablen, die quantifiziert werden können.
- Aus «Jedes Genie ist mindestens so klug wie alle anderen.» und «Tom ist nicht so klug wie sein Bruder.» folgt «Tom ist kein Genie.»

Von der Aussagen- zur Prädikatenlogik

Prädikatenlogik

- Aussagen sind zusammengesetzt, haben eine Struktur (durch Terme)
- Es gibt Variablen, die quantifiziert werden können.
- Aus «Jedes Genie ist mindestens so klug wie alle anderen.» und «Tom ist nicht so klug wie sein Bruder.» folgt «Tom ist kein Genie.»

Genie sein:	G	… einstellig Relationssymbol
mind. so klug sein wie:	K	… zweistelliges Relationssymbol
Bruder von:	b	… einstelliges Funktionssymbol
Tom:	t	… nullstelliges Fkt-symbol (Konstantensymbol)

Von der Aussagen- zur Prädikatenlogik

Prädikatenlogik

- Aussagen sind zusammengesetzt, haben eine Struktur (durch Terme)
- Es gibt Variablen, die quantifiziert werden können.
- Aus «Jedes Genie ist mindestens so klug wie alle anderen.» und «Tom ist nicht so klug wie sein Bruder.» folgt «Tom ist kein Genie.»

Genie sein:	$\mathtt{G}$	… einstellig Relationssymbol
mind. so klug sein wie:	$\mathtt{K}$	… zweistelliges Relationssymbol
Bruder von:	$\mathtt{b}$	… einstelliges Funktionssymbol
Tom:	$\mathtt{t}$	… nullstelliges Fkt-symbol (Konstantensymbol)

$\forall \mathtt{x}(\mathtt{G}(\mathtt{x}) \to \forall \mathtt{y}\ \mathtt{K}(\mathtt{x},\mathtt{y}))$ «Jedes Genie ist mind. so klug wie alle (anderen) Menschen.»

Karlsruher Institut für Technologie

Prädikatenlogik

- Aussagen sind zusammengesetzt, haben eine Struktur (durch Terme)
- Es gibt Variablen, die quantifiziert werden können.
- Aus «Jedes Genie ist mindestens so klug wie alle anderen.» und «Tom ist nicht so klug wie sein Bruder.» folgt «Tom ist kein Genie.»

Genie sein:	$\mathtt{G}$	… einstellig Relationssymbol
mind. so klug sein wie:	$\mathtt{K}$	… zweistelliges Relationssymbol
Bruder von:	$\mathtt{b}$	… einstelliges Funktionssymbol
Tom:	$\mathtt{t}$	… nullstelliges Fkt-symbol (Konstantensymbol)

$\forall \mathtt{x}(\mathtt{G}(\mathtt{x}) \rightarrow \forall \mathtt{y}\ \mathtt{K}(\mathtt{x},\mathtt{y}))$ «Jedes Genie ist mind. so klug wie alle (anderen) Menschen.»

$\neg \mathtt{K}(\mathtt{t}(),\mathtt{b}(\mathtt{t}()))$ «Tom ist nicht so klug wie sein Bruder.»

Von der Aussagen- zur Prädikatenlogik

Karlsruher Institut für Technologie

Prädikatenlogik

- Aussagen sind zusammengesetzt, haben eine Struktur (durch Terme)
- Es gibt Variablen, die quantifiziert werden können.
- Aus «Jedes Genie ist mindestens so klug wie alle anderen.» und «Tom ist nicht so klug wie sein Bruder.» folgt «Tom ist kein Genie.»

Genie sein:	$\mathtt{G}$	... einstellig Relationssymbol
mind. so klug sein wie:	$\mathtt{K}$	... zweistelliges Relationssymbol
Bruder von:	$\mathtt{b}$	... einstelliges Funktionssymbol
Tom:	$\mathtt{t}$	... nullstelliges Fkt-symbol (Konstantensymbol)

$\forall \mathtt{x}(\mathtt{G}(\mathtt{x}) \to \forall \mathtt{y}\ \mathtt{K}(\mathtt{x},\mathtt{y}))$	«Jedes Genie ist mind. so klug wie alle (anderen) Menschen.»
$\neg \mathtt{K}(\mathtt{t}(),\mathtt{b}(\mathtt{t}()))$	«Tom ist nicht so klug wie sein Bruder.»
$\neg \mathtt{G}(\mathtt{t}())$	«Tom ist kein Genie.»

Von der Aussagen- zur Prädikatenlogik

Prädikatenlogik

- Aussagen sind zusammengesetzt, haben eine Struktur (durch Terme)
- Es gibt Variablen, die quantifiziert werden können.
- Aus «Jedes Genie ist mindestens so klug wie alle anderen.» und «Tom ist nicht so klug wie sein Bruder.» folgt «Tom ist kein Genie.»

Genie sein:	G	… einstellig Relationssymbol
mind. so klug sein wie:	K	… zweistelliges Relationssymbol
Bruder von:	b	… einstelliges Funktionssymbol
Tom:	t	… nullstelliges Fkt-symbol (Konstantensymbol)

$\forall x(G(x) \rightarrow \forall y\, K(x,y))$	«Jedes Genie ist mind. so klug wie alle (anderen) Menschen.»
$\neg K(t, b(t))$	«Tom ist nicht so klug wie sein Bruder.»
$\neg G(t)$	«Tom ist kein Genie.»

Interpretationen

- Signatur $\Sigma = (Var_{PL}, Fun_{PL}, Rel_{PL})$ gegeben
- *Interpretation* (D, I)
  - nichtleere Menge D, das *Universum*, engl. *domain*, dt. auch *Domäne*
  - $I(\mathtt{f}) : D^{\mathrm{ar}(\mathtt{f})} \longrightarrow D$ für $\mathtt{f} \in Fun_{PL}$
  - $I(\mathtt{R}) \subseteq D^{\mathrm{ar}(\mathtt{R})}$ für $\mathtt{R} \in Rel_{PL}$
- Beispielinterpretation, falls $\mathrm{ar}(\mathtt{f}) = 2$ und $\mathrm{ar}(\mathtt{R}) = 2$:
  - D = «alle Menschen im Hörsaal»
  - $I(\mathtt{c})$ = «Tom»
  - $I(\mathtt{f}) : D \times D \longrightarrow D$:
    «Zwei Menschen x und y wird der beste gemeinsame Freund zugeordnet.»
  - $I(\mathtt{R}) \subseteq D^2$: «Die Menge aller Freundschaftbeziehungen» $\subseteq D^2$

Interpretationen

- Signatur $\Sigma = (Var_{PL}, Fun_{PL}, Rel_{PL})$ gegeben
- *Interpretation* (D, I)
  - nichtleere Menge D, das *Universum*, engl. *domain*, dt. auch *Domäne*
  - $I(\mathtt{f}) : D^{\mathrm{ar}(\mathtt{f})} \to D$ für $\mathtt{f} \in Fun_{PL}$
  - $I(\mathtt{R}) \subseteq D^{\mathrm{ar}(\mathtt{R})}$ für $\mathtt{R} \in Rel_{PL}$
- andere Beispielinterpretation, falls $\mathrm{ar}(\mathtt{f}) = 2$ und $\mathrm{ar}(\mathtt{R}) = 2$:
  - $D = \mathbb{N}_0$
  - $I(\mathtt{c}) = 0$
  - $I(\mathtt{f}) : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0 : (x, y) \mapsto x + y$
  - $I(\mathtt{R}) = \{(x, y) \mid x \leq y\} \subseteq \mathbb{N}_0^2$

Interpretationen

Karlsruher Institut für Technologie

- Signatur $\Sigma = (Var_{PL}, Fun_{PL}, Rel_{PL})$ gegeben
- *Interpretation* (D, I)
  - nichtleere Menge D, das *Universum*, engl. *domain*, dt. auch *Domäne*
  - $I(\mathtt{f}) : D^{\mathrm{ar}(\mathtt{f})} \to D$ für $\mathtt{f} \in Fun_{PL}$
  - $I(\mathtt{R}) \subseteq D^{\mathrm{ar}(\mathtt{R})}$ für $\mathtt{R} \in Rel_{PL}$
- noch andere Beispielinterpretation, falls $\mathrm{ar}(\mathtt{f}) = 2$ und $\mathrm{ar}(\mathtt{R}) = 2$:
  - $D = \mathbb{R}$
  - $I(\mathtt{c}) = 0$
  - $I(\mathtt{f}) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sin(x) \cdot \cos(y)$
  - $I(\mathtt{R}) = \{(x, y) \mid x^2 \leq y^4\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Interpretationen

- Signatur $\Sigma = (Var_{PL}, Fun_{PL}, Rel_{PL})$ gegeben
- *Interpretation* (D, I)
  - nichtleere Menge D, das *Universum*, engl. *domain*, dt. auch *Domäne*
  - $I(\mathtt{f}) : D^{\mathrm{ar}(\mathtt{f})} \longrightarrow D$ für $\mathtt{f} \in Fun_{PL}$
  - $I(\mathtt{R}) \subseteq D^{\mathrm{ar}(\mathtt{R})}$ für $\mathtt{R} \in Rel_{PL}$
- noch andere Beispielinterpretation, falls $\mathrm{ar}(\mathtt{f}) = 2$ und $\mathrm{ar}(\mathtt{R}) = 2$:
  - $D = \mathbb{R}$
  - $I(\mathtt{c}) = 0$
  - $I(\mathtt{f}) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sin(x) \cdot \cos(y)$
  - $I(\mathtt{R}) = \{(x, y) \mid x^2 \leq y^4\} \subseteq \mathbb{R}^2$
- *Variablenbelegung* $\beta : Var_{PL} \longrightarrow D$
  - z. B. $\beta(\mathtt{x}) = 3$ und $\beta(\mathtt{y}) = 42$

Auswertungsfunktionen — ein Wert für jeden Term und ein Wahrheitswert für jede Formel

Auswertungsfunktionen — ein Wert für jeden Term und ein Wahrheitswert für jede Formel

Karlsruher Institut für Technologie

Zur Erinnerung:
$\mathbb{B} = \{\mathbf{w}, \mathbf{f}\}$

Aussagenlogik:
$val_I : For_{AL} \longrightarrow \mathbb{B}$

- Signatur Σ gegeben
- Interpretation (D, I)
- Variablenbelegung $\beta : Var_{PL} \longrightarrow D$
- definiere $tval_{D,I,\beta} : Ter \longrightarrow D$
- definiere $val_{D,I,\beta} : For \longrightarrow \mathbb{B}$

(Subskript Σ wird für die Lesbarkeit weggelassen falls klar)

$tval_{D,I,\beta}$ — ein Wert in D für jeden Term

- Interpretation (D, I)
  Variablenbelegung $\beta : Var_{PL} \to D$
- für Term $t \in Ter$ zwei Möglichkeiten
  - $tval_{D,I,\beta}(\mathtt{x}) = \beta(\mathtt{x})$ für $\mathtt{x} \in Var_{PL}$
  - $tval_{D,I,\beta}(\mathtt{f(}t_1\mathtt{,} \ldots \mathtt{,} t_k\mathtt{)}) = I(\mathtt{f})(tval_{D,I,\beta}(t_1), \ldots, tval_{D,I,\beta}(t_k))$
    für $k = \mathrm{ar}(\mathtt{f})$
- erstes Beispiel
  - $D = \mathbb{N}_0$, $I(\mathtt{c}) = 0$, $I(\mathtt{f})$ Addition
  - $\beta(\mathtt{x}) = 3$ und $\beta(\mathtt{y}) = 42$
  - $$\begin{aligned} tval_{D,I,\beta}(\mathtt{f(y,c)}) &= I(\mathtt{f})(tval_{D,I,\beta}(\mathtt{y}), tval_{D,I,\beta}(\mathtt{c})) \\ &= I(\mathtt{f})(\beta(\mathtt{y}), I(\mathtt{c})) \\ &= I(\mathtt{f})(42, 0) \\ &= 42 + 0 = 42 \end{aligned}$$

$tval_{D,I,\beta}$ — ein Wert in D für jeden Term

- Interpretation (D, I)
  Variablenbelegung $\beta : Var_{PL} \longrightarrow D$
- für Term $t \in Ter$ zwei Möglichkeiten
  - $tval_{D,I,\beta}(\mathtt{x}) = \beta(\mathtt{x})$ für $\mathtt{x} \in Var_{PL}$
  - $tval_{D,I,\beta}(\mathtt{f(}t_1\mathtt{,} \ldots \mathtt{,} t_k\mathtt{)}) = I(\mathtt{f})(tval_{D,I,\beta}(t_1), \ldots, tval_{D,I,\beta}(t_k))$
    für $k = \mathrm{ar}(\mathtt{f})$
- zweites Beispiel
  - $D = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}^+$, $I(\mathtt{c}) = \mathsf{bab}$, $I(\mathtt{f})$ Konkatenation
  - $\beta(\mathtt{x}) = \mathsf{aaa}$ und $\beta(\mathtt{y}) = \mathsf{ba}$
  - $$\begin{aligned} tval_{D,I,\beta}(\mathtt{f(y,c)}) &= I(\mathtt{f})(tval_{D,I,\beta}(\mathtt{y}), tval_{D,I,\beta}(\mathtt{c})) \\ &= I(\mathtt{f})(\beta(\mathtt{y}), I(\mathtt{c})) \\ &= I(\mathtt{f})(\mathsf{ba}, \mathsf{bab}) \\ &= \mathsf{ba} \cdot \mathsf{bab} = \mathsf{babab} \end{aligned}$$

$val_{D,I,\beta}$ — ein Wahrheitswert für jede atomare Formel

- Interpretation (D, I)
  Variablenbelegung $\beta : Var_{PL} \to D$
- für atomare Formel $A \in AtFor$:

$$val_{D,I,\beta}(\mathtt{R}_i(t_1, \ldots, t_k)) = \begin{cases} \mathbf{w}, & \text{falls } (tval_{D,I,\beta}(t_1), \ldots, tval_{D,I,\beta}(t_k)) \in I(\mathtt{R}_i) \\ \mathbf{f}, & \text{falls } (tval_{D,I,\beta}(t_1), \ldots, tval_{D,I,\beta}(t_k)) \notin I(\mathtt{R}_i) \end{cases}$$

$val_{D,I,\beta}$ — Beispiel für atomare Formeln

- $val_{D,I,\beta}(\mathtt{R}_i(t_1, \ldots, t_k)) = \begin{cases} \mathbf{w}, & \text{falls } (tval_{D,I,\beta}(t_1), \ldots, tval_{D,I,\beta}(t_k)) \in I(\mathtt{R}_i) \\ \mathbf{f}, & \text{falls } (tval_{D,I,\beta}(t_1), \ldots, tval_{D,I,\beta}(t_k)) \notin I(\mathtt{R}_i) \end{cases}$

- Beispiel
  - $D = \mathbb{N}_0$, $I(\mathtt{c}) = 0$, $I(\mathtt{f})$ Addition, $I(\mathtt{R})$ Kleiner-oder-gleich
  - $\beta(\mathtt{x}) = 3$ und $\beta(\mathtt{y}) = 42$
  - $val_{D,I,\beta}(\mathtt{R}(\mathtt{y}, \mathtt{c})) = \mathbf{w}$

    gdw. $(tval_{D,I,\beta}(\mathtt{y}), tval_{D,I,\beta}(\mathtt{c})) \in I(\mathtt{R})$

    gdw. $(\beta(\mathtt{y}), I(\mathtt{c})) \in I(\mathtt{R})$

    gdw. $(42, 0) \in I(\mathtt{R})$

    gdw. $42 \leq 0$ also ist $val_{D,I,\beta}(\mathtt{R}(\mathtt{y}, \mathtt{c})) = \mathbf{f}$

$val_{D,I,\beta}$ — ein Wahrheitswert für jede Formel

- Interpretation (D, I)
  Variablenbelegung $\beta : Var_{PL} \rightarrow D$
- für Formel $G \in For$ mehrere Möglichkeiten
  - Für atomare Formeln: gerade eben
  - $\neg H, \quad H_1 \wedge H_2, \quad H_1 \vee H_2, \quad H_1 \rightarrow H_2$
    - wie in der Aussagenlogik
    - z. B. $val_{D,I,\beta}(H_1 \wedge H_2) = \mathbf{w}$ gdw. $val_{D,I,\beta}(H_1) = \mathbf{w}$ und $val_{D,I,\beta}(H_2) = \mathbf{w}$
  - $\forall \mathtt{x}_i\, H, \quad \exists \mathtt{x}_i\, H$
    - erfordert eine kleine Vorbereitung

$val_{D,I,\beta}$ — ein Wahrheitswert für jede Formel

Karlsruher Institut für Technologie

- Interpretation (D, I)
  Variablenbelegung $\beta : Var_{PL} \longrightarrow D$
- für Formel $G \in For$ mehrere Möglichkeiten
  - Für atomare Formeln: gerade eben
  - $\neg H, \quad H_1 \wedge H_2, \quad H_1 \vee H_2, \quad H_1 \rightarrow H_2$
    - wie in der Aussagenlogik
    - z. B. $val_{D,I,\beta}(H_1 \wedge H_2) = \mathbf{w}$ gdw. $val_{D,I,\beta}(H_1) = \mathbf{w}$ und $val_{D,I,\beta}(H_2) = \mathbf{w}$
  - $\forall \mathtt{x}_i\, H, \quad \exists \mathtt{x}_i\, H$
    - erfordert eine kleine Vorbereitung
- für $\beta : Var_{PL} \longrightarrow D$, $\mathtt{x}_i \in Var_{PL}$ und $d \in D$ sei

$$\beta^d_{\mathtt{x}_i} : Var_{PL} \longrightarrow D : \mathtt{x}_j \mapsto \begin{cases} \beta(\mathtt{x}_j) & \text{falls } j \neq i \\ d & \text{falls } j = i \end{cases}$$

$val_{D,I,\beta}$ — Wahrheitswert für quantifizierte Formeln

Karlsruher Institut für Technologie

- Interpretation (D, I)
  Variablenbelegung $\beta : Var_{PL} \to D$

- $$val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x}_i\, H) = \begin{cases} \mathbf{w}, & \text{falls } \textit{für jedes } d \in D \text{ und } \beta' = \beta^d_{\mathtt{x}_i} \text{ gilt:} \\ & val_{D,I,\beta'}(H) = \mathbf{w} \\ \mathbf{f}, & \text{sonst} \end{cases}$$

- $$val_{D,I,\beta}(\exists \mathtt{x}_i\, H) = \begin{cases} \mathbf{w}, & \text{falls } \textit{für mindestens ein } d \in D \text{ und } \beta' = \beta^d_{\mathtt{x}_i} \text{ gilt:} \\ & val_{D,I,\beta'}(H) = \mathbf{w} \\ \mathbf{f}, & \text{sonst} \end{cases}$$

$val_{D,I,\beta}$ — Beispiel für quantifizierte Formeln

Karlsruher Institut für Technologie

- Interpretation (D, I), Variablenbelegung $\beta : Var_{PL} \longrightarrow D$
- $val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x}_i\, H) = \begin{cases} \mathbf{w}, & \text{falls für jedes } d \in D \text{ und } \beta' = \beta^d_{\mathtt{x}_i} \text{ gilt:} \\ & val_{D,I,\beta'}(H) = \mathbf{w} \\ \mathbf{f}, & \text{sonst} \end{cases}$
- Beispiel
  - $D = \mathbb{N}_0$, $I(\mathtt{c}) = 0$, $I(\mathtt{f})$ Addition, $I(\mathtt{R})$ Kleiner-oder-gleich
  - $\beta(\mathtt{x}) = 3$ und $\beta(\mathtt{y}) = 42$
  - $val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x}\, \mathtt{R(c,x)}) = \mathbf{w}$

$val_{D,I,\beta}$ — Beispiel für quantifizierte Formeln

Karlsruher Institut für Technologie

- Interpretation (D, I), Variablenbelegung $\beta : Var_{PL} \longrightarrow D$
- $val_{D,I,\beta}(\forall x_i\, H) = \begin{cases} \mathbf{w}, & \text{falls für jedes } d \in D \text{ und } \beta' = \beta^d_{x_i} \text{ gilt:} \\ & val_{D,I,\beta'}(H) = \mathbf{w} \\ \mathbf{f}, & \text{sonst} \end{cases}$
- Beispiel
  - $D = \mathbb{N}_0$, $I(c) = 0$, $I(f)$ Addition, $I(R)$ Kleiner-oder-gleich
  - $\beta(x) = 3$ und $\beta(y) = 42$
  - $$val_{D,I,\beta}(\forall x\, R(c, x)) = \mathbf{w}$$
    gdw. für alle $d \in D$, $\beta' = \beta^d_x$: $(tval_{D,I,\beta'}(c), tval_{D,I,\beta'}(x)) \in I(R)$

$val_{D,I,\beta}$ — Beispiel für quantifizierte Formeln

Karlsruher Institut für Technologie

- Interpretation (D, I), Variablenbelegung $\beta : Var_{PL} \longrightarrow D$
- $val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x}_i\, H) = \begin{cases} \mathbf{w}, & \text{falls für jedes } d \in D \text{ und } \beta' = \beta^d_{\mathtt{x}_i} \text{ gilt:} \\ & val_{D,I,\beta'}(H) = \mathbf{w} \\ \mathbf{f}, & \text{sonst} \end{cases}$
- Beispiel
  - $D = \mathbb{N}_0$, $I(\mathtt{c}) = 0$, $I(\mathtt{f})$ Addition, $I(\mathtt{R})$ Kleiner-oder-gleich
  - $\beta(\mathtt{x}) = 3$ und $\beta(\mathtt{y}) = 42$
  - $val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x}\, \mathtt{R(c,x)}) = \mathbf{w}$

    gdw. für alle $d \in D$, $\beta' = \beta^d_{\mathtt{x}}$: $(tval_{D,I,\beta'}(\mathtt{c}), tval_{D,I,\beta'}(\mathtt{x})) \in I(\mathtt{R})$

    gdw. für alle $d \in D$, $\beta' = \beta^d_{\mathtt{x}}$: $(I(\mathtt{c}), \beta'(\mathtt{x})) \in I(\mathtt{R})$

$val_{D,I,\beta}$ — Beispiel für quantifizierte Formeln

Karlsruher Institut für Technologie

- Interpretation (D, I), Variablenbelegung $\beta : Var_{PL} \longrightarrow D$
- $$val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x}_i\, H) = \begin{cases} \mathbf{w}, & \text{falls für jedes } d \in D \text{ und } \beta' = \beta^d_{\mathtt{x}_i} \text{ gilt:} \\ & val_{D,I,\beta'}(H) = \mathbf{w} \\ \mathbf{f}, & \text{sonst} \end{cases}$$
- Beispiel
  - $D = \mathbb{N}_0$, $I(\mathtt{c}) = 0$, $I(\mathtt{f})$ Addition, $I(\mathtt{R})$ Kleiner-oder-gleich
  - $\beta(\mathtt{x}) = 3$ und $\beta(\mathtt{y}) = 42$
  - $$val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x}\, \mathtt{R(c,x)}) = \mathbf{w}$$
    gdw. für alle $d \in D$, $\beta' = \beta^d_{\mathtt{x}}$: $(tval_{D,I,\beta'}(\mathtt{c}), tval_{D,I,\beta'}(\mathtt{x})) \in I(\mathtt{R})$

    gdw. für alle $d \in D$, $\beta' = \beta^d_{\mathtt{x}}$: $(I(\mathtt{c}), \beta'(\mathtt{x})) \in I(\mathtt{R})$

    gdw. für alle $d \in D$, $\beta' = \beta^d_{\mathtt{x}}$: $(0, d) \in I(\mathtt{R})$

$val_{D,I,\beta}$ — Beispiel für quantifizierte Formeln

Karlsruher Institut für Technologie

- Interpretation (D, I), Variablenbelegung $\beta : Var_{PL} \longrightarrow D$
- $val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x}_i\, H) = \begin{cases} \mathbf{w}, & \text{falls für jedes } d \in D \text{ und } \beta' = \beta^d_{\mathtt{x}_i} \text{ gilt:} \\ & val_{D,I,\beta'}(H) = \mathbf{w} \\ \mathbf{f}, & \text{sonst} \end{cases}$
- Beispiel
  - $D = \mathbb{N}_0$, $I(\mathtt{c}) = 0$, $I(\mathtt{f})$ Addition, $I(\mathtt{R})$ Kleiner-oder-gleich
  - $\beta(\mathtt{x}) = 3$ und $\beta(\mathtt{y}) = 42$
  - $$val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x}\, \mathtt{R(c,x)}) = \mathbf{w}$$

    gdw. für alle $d \in D$, $\beta' = \beta^d_{\mathtt{x}}$: $(tval_{D,I,\beta'}(\mathtt{c}), tval_{D,I,\beta'}(\mathtt{x})) \in I(\mathtt{R})$

    gdw. für alle $d \in D$, $\beta' = \beta^d_{\mathtt{x}}$: $(I(\mathtt{c}), \beta'(\mathtt{x})) \in I(\mathtt{R})$

    gdw. für alle $d \in D$, $\beta' = \beta^d_{\mathtt{x}}$: $(0, d) \in I(\mathtt{R})$

    gdw. für alle $d \in D$, $\beta' = \beta^d_{\mathtt{x}}$: $0 \leq d$

$val_{D,I,\beta}$ — Beispiel für quantifizierte Formeln

- Interpretation (D, I), Variablenbelegung $\beta : Var_{PL} \longrightarrow D$
- $val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x}_i\, H) = \begin{cases} \mathbf{w}, & \text{falls für jedes } d \in D \text{ und } \beta' = \beta^d_{\mathtt{x}_i} \text{ gilt:} \\ & val_{D,I,\beta'}(H) = \mathbf{w} \\ \mathbf{f}, & \text{sonst} \end{cases}$
- Beispiel
  - $D = \mathbb{N}_0$, $I(\mathtt{c}) = 0$, $I(\mathtt{f})$ Addition, $I(\mathtt{R})$ Kleiner-oder-gleich
  - $\beta(\mathtt{x}) = 3$ und $\beta(\mathtt{y}) = 42$
  - $$val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x}\, \mathtt{R(c,x)}) = \mathbf{w}$$

    gdw. für alle $d \in D, \beta' = \beta^d_{\mathtt{x}}$: $(tval_{D,I,\beta'}(\mathtt{c}), tval_{D,I,\beta'}(\mathtt{x})) \in I(\mathtt{R})$

    gdw. für alle $d \in D, \beta' = \beta^d_{\mathtt{x}}$: $(I(\mathtt{c}), \beta'(\mathtt{x})) \in I(\mathtt{R})$

    gdw. für alle $d \in D, \beta' = \beta^d_{\mathtt{x}}$: $(0, d) \in I(\mathtt{R})$

    gdw. für alle $d \in D, \beta' = \beta^d_{\mathtt{x}}$: $0 \leq d$ also ist $val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x}\, \mathtt{R(c,x)}) = \mathbf{w}$

$val_{D,I,\beta}$ — Beispiel für quantifizierte Formeln (II)

Karlsruher Institut für Technologie

Beispiel:

«*Wenn es jeden Tag gibt es Schnitzel in der Mensa gibt, dann gibt es auch am Mittwoch Schnitzel in der Mensa.*»

Formalisiert in Prädikatenlogik:

$Var_{PL} = \{\mathtt{x}, \mathtt{m}\}$ m soll für Mittwoch stehen.

$Rel_{PL} = \{\mathtt{S}\}$ “Es gibt Schnitzel am ...”

$$(\forall \mathtt{x}\ \mathtt{S}(\mathtt{x})) \to \mathtt{S}(\mathtt{m})$$

$D = \{Mo, Di, Mi, Do, Fr, Sa, So\}$

Wann gilt $(\forall \mathtt{x}\ \mathtt{S}(\mathtt{x}))$?

Allgemeingültige Formeln

Karlsruher Institut für Technologie

- prädikatenlogische Formel F *allgemeingültig*, wenn
  - für jede passende Interpretation (D, I) und
  - jede passende Variablenbelegung β gilt:
  - $val_{D,I,\beta}(F) = \mathbf{w}$.
- einfache Beispiele:
  - aussagenlogische Tautologie G
  - für vorkommende Aussagevariable $\mathtt{P}_i$
    je eine beliebige prädikatenlogische Formel G_i
  - ersetze in G jedes $\mathtt{P}_i$ syntaktisch durch G_i
- *prädikatenlogische Tautologien*
- Beispiel: aus $\mathtt{P} \to (\mathtt{Q} \to \mathtt{P})$ wird

$$\mathtt{R}(\mathtt{x}, \mathtt{y}) \to ((\forall \mathtt{x}\, \mathtt{S}(\mathtt{y}, \mathtt{y}) \to \mathtt{R}(\mathtt{x}, \mathtt{y}))$$

Allgemeingültige Formeln — nicht abgeleitet von aussagenlogischen Tautologien

- Beispiele (für $G, H \in For$)

$$(\forall \mathtt{x}_i\ (G \to H)) \to ((\forall \mathtt{x}_i\ G) \to (\forall \mathtt{x}_i\ H))$$

- Beispiele (für $t \in Ter$)

$$(\forall \mathtt{x}\ \mathtt{R}(\mathtt{x})) \to \mathtt{R}(t)$$

Modelle

Karlsruher Institut für Technologie

- (D, I) *Modell für* $G \in For$, wenn
  - (D, I) Interpretation für G und
  - für jedes β ist $val_{D,I,\beta}(G) = \mathbf{w}$.
- (D, I) *Modell für* $\Gamma \subseteq For$, wenn
  - (D, I) Modell für jedes $G \in \Gamma$
- $\Gamma \models G$, wenn
  - jedes Modell von Γ auch Modell von G
- $H \models G$, wenn $\{H\} \models G$
- $\models G$, wenn $\{\} \models G$,
  d. h. wenn G allgemeingültig

Modelle — Beispiel

- Formel: $\forall \mathtt{x}\ \mathtt{f(x,c)} \doteq \mathtt{x}$
- Modell: $D = \mathbb{N}_0$, $I(\mathtt{c}) = 0$, $I(\mathtt{f})$ Addition
  - anschaulich: für jede nichtnegative ganze Zahl x ist $x + 0 = x$
  - genauer: prüfe, ob für jedes β gilt: $val_{D,I,\beta}(G) = \mathbf{w}$
  - prüfe für jedes $d \in \mathbb{N}_0$ und $\beta' = \beta_{\mathtt{x}}^{d}$, ob $val_{D,I,\beta'}(\mathtt{f(x,c)} \doteq \mathtt{x}) = \mathbf{w}$
  - gdw. $tval_{D,I,\beta'}(\mathtt{f(x,c)}) = tval_{D,I,\beta'}(\mathtt{x})$ ist.
  - linke Seite $I(\mathtt{f})(\beta'(\mathtt{x}), I(\mathtt{c})) = \beta'(\mathtt{x}) + 0 = \beta'(\mathtt{x})$
  - gleich rechter Seite
- anderes Modell von G: $D = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$, $I(\mathtt{c}) = \varepsilon$, $I(\mathtt{f})$ Konkatenation
- *kein* Modell: $D = \mathbb{N}_0$, $I(\mathtt{c}) = 0$, $I(\mathtt{f})$ Multiplikation
  - Formel also *nicht* allgemeingültig

Was ist wichtig

- Das sollten Sie mitnehmen:
  - Interpretationen
    - Werte in D für jeden Term
    - Wahrheitswert für jede Formel
  - Modelle
- Das sollten Sie üben:
  - Terme und Formeln auswerten
  - Formeln auf Allgemeingültigkeit prüfen

Logisch äquivalente Formeln

- Formeln G und H *logisch äquivalent*, wenn
  - für jede passende Interpretation (D, I) und
  - jede passende Variablenbelegung β

  gilt:
  - $val_{D,I,\beta}(G) = val_{D,I,\beta}(H)$

Satz

- Wenn
  - G und H logisch äquivalent,
  - Formel F enthält G als Teilformel und
  - Formel F' entsteht aus F durch Ersetzen von G durch H

  dann
  - ist F logisch äquivalent zu F'.

Lemma

- Wenn G und H logisch äquivalent sind, dann ist $G \leftrightarrow H$ allgemeingültig.

Logisch äquivalente Formeln — Beispiele (1)

Es seien $G, H \in For$, $x, y \in Var_{PL}$.

- $\neg \forall x\, G$ und $\exists x\, \neg G$
- $\neg \exists x\, G$ und $\forall x\, \neg G$

- $\forall x\, \forall y\, G$ und $\forall y\, \forall x\, G$
- $\exists x\, \exists y\, G$ und $\exists y\, \exists x\, G$

- $\forall x\, (G \wedge H)$ und $\forall x\, G \wedge \forall x\, H$
- $\exists x\, (G \vee H)$ und $\exists x\, G \vee \exists x\, H$

Wo sind wir?

Syntax prädikatenlogischer Formeln

Semantik prädikatenenlogischer Formeln

Konstanten und Gleichheit

Beweisbarkeit

Formalisieren in Prädikatenlogik

Konstanten

$D^0 = \{()\}$

- 0-stellige Funktionssymbole sind seltsam: Sei $\mathtt{c} \in Fun_{PL}$ mit $\mathrm{ar}(\mathtt{c}) = 0$
- Semantik: $I(\mathtt{c}) : D^0 \to D$.
- $tval_{D,I,\beta}(\mathtt{c()}) = I(\mathtt{c})()$ (Anwendung auf das leere Tupel)
- Nullstellige Funktionssymbole heißen *Konstanten*.
- Man schreibt $\mathtt{P(c)}$ statt $\mathtt{P(c())}$
- Vereinfacht: $tval_{D,I,\beta}(\mathtt{c}) = I(\mathtt{c})$ (ist dann einfach ein Wert $\in D$)

Aussagenvariablen

Wie bei Konstanten ... aber für Relationssymbole

$D^0 = \{()\}$

- 0-stellige Relationssymbole sind seltsam: Sei $\mathtt{Q} \in Rel_{PL}$ mit $\mathrm{ar}(\mathtt{Q}) = 0$
- Semantik: $I(\mathtt{Q}) \subseteq D^0$.
- Also: $I(\mathtt{Q}) = \emptyset$ oder $I(\mathtt{Q}) = \{()\}$.
- $val_{D,I,\beta}(\mathtt{Q()}) = \mathbf{w}$ gdw. $() \in I(\mathtt{Q})()$ (Anwendung auf das leere Tupel)
- Man schreibt $\mathtt{Q} \vee \neg \mathtt{Q}$ statt $\mathtt{Q()} \vee \neg \mathtt{Q()}$
- $val_{D,I,\beta}(\mathtt{Q}) = \mathbf{w}$ gdw. $I(\mathtt{Q}) \neq \emptyset$
- Damit ist die Aussagenlogik in Prädikatenlogik eingebettet

Gleichheit

- «Eingebautes» Relationssymbol $\doteq$
  - $\mathrm{ar}(\doteq) = 2$
  - Infix-Schreibweise: $t \doteq u$ anstelle von $\doteq(t, u)$
- Fixierte Semantik: $I(\doteq) = I_D$
- Jedes Element des Universums ist genau gleich zu sich selbst

Wo sind wir?

Syntax prädikatenlogischer Formeln

Semantik prädikatenenlogischer Formeln

Konstanten und Gleichheit

Beweisbarkeit

Formalisieren in Prädikatenlogik

Schlussregeln für die Aussagenlogik (nat. Schließen)

(Wiederholung aus Kapitel 5)

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\ (\wedge\mathrm{I}) \qquad \frac{A \wedge B}{A}\ (\wedge\mathrm{E}_l) \qquad \frac{A \wedge B}{B}\ (\wedge\mathrm{E}_r)$$

$$\frac{A}{A \vee B}\ (\vee\mathrm{I}_l) \qquad \frac{B}{A \vee B}\ (\vee\mathrm{I}_r) \qquad \frac{A \vee B \quad A \rightarrow C \quad B \rightarrow C}{C}\ (\vee\mathrm{E})$$

$$\frac{A \vdash B}{A \rightarrow B}\ (\rightarrow\mathrm{I}) \qquad \frac{A \quad A \rightarrow B}{B}\ (\mathrm{MP})\ (\rightarrow\mathrm{E})$$

$$\frac{A \rightarrow \mathtt{FALSCH}}{\neg A}\ (\neg\mathrm{I}) \qquad \frac{A \quad \neg A}{\mathtt{FALSCH}}\ (\neg\mathrm{E}) \qquad \frac{\neg\neg A}{A}\ (\neg\neg\mathrm{E})$$

$$\frac{\neg A \rightarrow \mathtt{FALSCH}}{A}\ (\mathrm{RAA}) \qquad \frac{}{A \vdash A}\ (\mathrm{Ax})$$

Schlussregeln für Prädikatenlogik (natürliches Schließen)

- Erweiterung des Kalküls «Natürliches Schließen» auf Prädikatenlogik

$$\frac{A[x/y] \qquad y \text{ ist frisch.}}{\forall x\ A}\ (\forall\mathrm{I}) \qquad\qquad \frac{\forall x\ A}{A[x/t]}\ (\forall\mathrm{E})$$

$$\frac{A[x/t]}{\exists x\ A}\ (\exists\mathrm{I}) \qquad\qquad \frac{\exists x\ A \qquad A[x/y] \vdash B \qquad y \text{ ist frisch.}}{B}\ (\exists\mathrm{E})$$

$A[x/t]$: In A wird jedes Auftreten von x durch t ersetzt.
«y ist frisch»: Variable y darf in A (und in Bedingungen Γ) nicht auftreten.

Beweisen auf der Metaebene

$$\frac{A[\mathtt{x}/\mathtt{y}] \qquad \mathtt{y} \text{ ist frisch.}}{\forall \mathtt{x}\ A}$$

Zu zeigen ist, dass für alle $x \in D$ die Aussage A gilt.
Sei also im Folgenden $x \in D$ ein beliebiger (nicht weiter eingeschränkter) Wert aus D.
…Es folgt das Argument für A, in dem x benutzt werden darf.

Beweisen auf der Metaebene

$$\frac{A[\mathtt{x}/\mathtt{y}] \qquad \mathtt{y} \text{ ist frisch.}}{\forall \mathtt{x}\ A}$$	*Zu zeigen ist, dass für alle $x \in D$ die Aussage A gilt. Sei also im Folgenden $x \in D$ ein beliebiger (nicht weiter eingeschränkter) Wert aus D. ... Es folgt das Argument für A, in dem x benutzt werden darf.*
$$\frac{A[\mathtt{x}/t]}{\exists \mathtt{x}\ A}$$	*Zu zeigen ist, dass es einen Wert $x \in D$ gibt, für den die Aussage A gilt. Da die Aussage A für den konkreten Wert $t \in D$ gilt, ist dies wahr. ... Es folgt ggf. eine Begründung, warum der Zeuge t Aussage A erfüllt.*

Beweisen auf der Metaebene

$$\frac{A[\mathtt{x}/\mathtt{y}] \qquad \mathtt{y} \text{ ist frisch.}}{\forall \mathtt{x}\ A}$$

Zu zeigen ist, dass für alle $x \in D$ die Aussage A gilt.
Sei also im Folgenden $x \in D$ ein beliebiger (nicht weiter eingeschränkter) Wert aus D.
…Es folgt das Argument für A, in dem x benutzt werden darf.

$$\frac{A[\mathtt{x}/t]}{\exists \mathtt{x}\ A}$$

Zu zeigen ist, dass es einen Wert $x \in D$ gibt, für den die Aussage A gilt.
Da die Aussage A für den konkreten Wert $t \in D$ gilt, ist dies wahr.
…Es folgt ggf. eine Begründung, warum der Zeuge t Aussage A erfüllt.

$$\frac{A[\mathtt{x}/\mathtt{n}] \qquad \forall x\,(A \to A[\mathtt{x}/\mathtt{s}(\mathtt{x})]}{\forall \mathtt{x} A}$$

Beweisen auf der Metaebene

$$\frac{A[\mathtt{x}/\mathtt{y}] \qquad \mathtt{y} \text{ ist frisch.}}{\forall \mathtt{x}\ A}$$

Zu zeigen ist, dass für alle $x \in D$ die Aussage A gilt. Sei also im Folgenden $x \in D$ ein beliebiger (nicht weiter eingeschränkter) Wert aus D. …Es folgt das Argument für A, in dem x benutzt werden darf.

$$\frac{A[\mathtt{x}/t]}{\exists \mathtt{x}\ A}$$

Zu zeigen ist, dass es einen Wert $x \in D$ gibt, für den die Aussage A gilt. Da die Aussage A für den konkreten Wert $t \in D$ gilt, ist dies wahr. …Es folgt ggf. eine Begründung, warum der Zeuge t Aussage A erfüllt.

$$\frac{A[\mathtt{x}/\mathtt{n}] \quad \forall x\ (A \to A[\mathtt{x}/\mathtt{s}(\mathtt{x})]}{\forall \mathtt{x} A}$$

$$\frac{A[x/0] \quad \forall x \in \mathbb{N} :\ (A \implies A[x/x+1])}{\forall x \in \mathbb{N} : A}$$

Wo sind wir?

Syntax prädikatenlogischer Formeln

Semantik prädikatenenlogischer Formeln

Konstanten und Gleichheit

Beweisbarkeit

Formalisieren in Prädikatenlogik

Formalisieren in Prädikatenlogik

Aufgabe: Den Sachverhalt natürlichsprachlicher Sätze prädikatenlogisch ausdrücken

Muster "Jeder"

- "Jeder K ist ein L".
- $\forall x\ (K(x) \rightarrow L(x))$
- Jeder Mensch ist sterblich: $\forall x\ (\mathit{Mensch}(x) \rightarrow \mathit{sterblich}(x))$

Muster "Kein"

- "Kein K ist ein L"
- $\forall x\ (K(x) \rightarrow \neg L(x))$
- Kein Mensch ist eine Pflanze: $\forall x\ (\mathit{Mensch}(x) \rightarrow \neg \mathit{Pflanze}(x))$

Muster "Es gibt"

- "Es gibt (ein) K, das ein L ist"
- $\exists x\ (K(x) \wedge L(x))$
- Es gibt einen klugen Menschen: $\exists x\ (\mathit{Mensch}(x) \wedge \mathit{klug}(x))$

Beispiel: Tante Agathe ist tot!

Aus “Thousands of Problems for Theorem Provers” (`http://tptp.org`)

Someone who lives in Dreadbury Mansion killed Aunt Agatha. Agatha, the butler, and Charles live in Dreadbury Mansion, and are the only people who live therein. A killer always hates their victim, and is never richer than their victim. Charles hates no one that Aunt Agatha hates. Agatha hates everyone except the butler. The butler hates everyone not richer than Aunt Agatha. The butler hates everyone Aunt Agatha hates. No one hates everyone. Agatha is not the butler.

Signatur: $Fun_{PL} = \emptyset$, $Const_{PL} = \{a, b, c\}$, $Rel_{PL} = \{K, H, R, L\}$

(**k**ill, **h**ates, **r**icher, **l**ives) mit $\mathrm{ar}(l) = 1, \mathrm{ar}(k) = \mathrm{ar}(h) = \mathrm{ar}(r) = 2$

Beispiel: Tante Agathe ist tot!

Aus “Thousands of Problems for Theorem Provers” (`http://tptp.org`)

Someone who lives in Dreadbury Mansion killed Aunt Agatha. Agatha, the butler, and Charles live in Dreadbury Mansion, and are the only people who live therein. A killer always hates their victim, and is never richer than their victim. Charles hates no one that Aunt Agatha hates. Agatha hates everyone except the butler. The butler hates everyone not richer than Aunt Agatha. The butler hates everyone Aunt Agatha hates. No one hates everyone. Agatha is not the butler.

Signatur: $Fun_{PL} = \emptyset$, $Const_{PL} = \{a, b, c\}$, $Rel_{PL} = \{K, H, R, L\}$

(**k**ill, **h**ates, **r**icher, **l**ives) mit $\mathrm{ar}(l) = 1, \mathrm{ar}(k) = \mathrm{ar}(h) = \mathrm{ar}(r) = 2$

$$L(a) \wedge L(b) \wedge L(c)$$

Beispiel: Tante Agathe ist tot!

Aus “Thousands of Problems for Theorem Provers” (`http://tptp.org`)

Someone who lives in Dreadbury Mansion killed Aunt Agatha. Agatha, the butler, and Charles live in Dreadbury Mansion, and are the only people who live therein. A killer always hates their victim, and is never richer than their victim. Charles hates no one that Aunt Agatha hates. Agatha hates everyone except the butler. The butler hates everyone not richer than Aunt Agatha. The butler hates everyone Aunt Agatha hates. No one hates everyone. Agatha is not the butler.

Signatur: $Fun_{PL} = \emptyset$, $Const_{PL} = \{a, b, c\}$, $Rel_{PL} = \{K, H, R, L\}$

(**k**ill, **h**ates, **r**icher, **l**ives) mit $\mathrm{ar}(l) = 1, \mathrm{ar}(k) = \mathrm{ar}(h) = \mathrm{ar}(r) = 2$

$$\forall x(L(x) \rightarrow x \doteq a \vee x \doteq b \vee x \doteq c)$$

Beispiel: Tante Agathe ist tot!

Aus "Thousands of Problems for Theorem Provers" (`http://tptp.org`)

Someone who lives in Dreadbury Mansion killed Aunt Agatha. Agatha, the butler, and Charles live in Dreadbury Mansion, and are the only people who live therein. A killer always hates their victim, and is never richer than their victim. Charles hates no one that Aunt Agatha hates. Agatha hates everyone except the butler. The butler hates everyone not richer than Aunt Agatha. The butler hates everyone Aunt Agatha hates. No one hates everyone. Agatha is not the butler.

Signatur: $Fun_{PL} = \emptyset$, $Const_{PL} = \{a, b, c\}$, $Rel_{PL} = \{K, H, R, L\}$

(**k**ill, **h**ates, **r**icher, **l**ives) mit $\mathrm{ar}(l) = 1, \mathrm{ar}(k) = \mathrm{ar}(h) = \mathrm{ar}(r) = 2$

$$\forall x \forall y (K(x, y) \rightarrow H(x, y))$$

Beispiel: Tante Agathe ist tot!

Aus "Thousands of Problems for Theorem Provers" (`http://tptp.org`)

Someone who lives in Dreadbury Mansion killed Aunt Agatha. Agatha, the butler, and Charles live in Dreadbury Mansion, and are the only people who live therein. A killer always hates their victim, and is never richer than their victim. Charles hates no one that Aunt Agatha hates. Agatha hates everyone except the butler. The butler hates everyone not richer than Aunt Agatha. The butler hates everyone Aunt Agatha hates. No one hates everyone. Agatha is not the butler.

Signatur: $Fun_{PL} = \emptyset$, $Const_{PL} = \{a, b, c\}$, $Rel_{PL} = \{K, H, R, L\}$

(**k**ill, **h**ates, **r**icher, **l**ives) mit $\mathrm{ar}(l) = 1, \mathrm{ar}(k) = \mathrm{ar}(h) = \mathrm{ar}(r) = 2$

$$\forall x \forall y (K(x, y) \to \neg R(x, y))$$

Beispiel: Tante Agathe ist tot!

Aus “Thousands of Problems for Theorem Provers” (`http://tptp.org`)

Someone who lives in Dreadbury Mansion killed Aunt Agatha. Agatha, the butler, and Charles live in Dreadbury Mansion, and are the only people who live therein. A killer always hates their victim, and is never richer than their victim. Charles hates no one that Aunt Agatha hates. Agatha hates everyone except the butler. The butler hates everyone not richer than Aunt Agatha. The butler hates everyone Aunt Agatha hates. No one hates everyone. Agatha is not the butler.

Signatur: $\mathit{Fun}_{PL} = \emptyset$, $\mathit{Const}_{PL} = \{a, b, c\}$, $\mathit{Rel}_{PL} = \{K, H, R, L\}$

(**k**ill, **h**ates, **r**icher, **l**ives) mit $\mathrm{ar}(l) = 1, \mathrm{ar}(k) = \mathrm{ar}(h) = \mathrm{ar}(r) = 2$

$$\forall x (H(a, x) \to \neg H(c, x))$$

Beispiel: Tante Agathe ist tot!

Aus “Thousands of Problems for Theorem Provers” (`http://tptp.org`)

Someone who lives in Dreadbury Mansion killed Aunt Agatha. Agatha, the butler, and Charles live in Dreadbury Mansion, and are the only people who live therein. A killer always hates their victim, and is never richer than their victim. Charles hates no one that Aunt Agatha hates. Agatha hates everyone except the butler. The butler hates everyone not richer than Aunt Agatha. The butler hates everyone Aunt Agatha hates. No one hates everyone. Agatha is not the butler.

Signatur: $Fun_{PL} = \emptyset$, $Const_{PL} = \{a, b, c\}$, $Rel_{PL} = \{K, H, R, L\}$

(**k**ill, **h**ates, **r**icher, **l**ives) mit $\mathrm{ar}(l) = 1, \mathrm{ar}(k) = \mathrm{ar}(h) = \mathrm{ar}(r) = 2$

$$\forall x(\neg x \doteq b \to H(a, x))$$

Beispiel: Tante Agathe ist tot!

Aus “Thousands of Problems for Theorem Provers” (`http://tptp.org`)

Someone who lives in Dreadbury Mansion killed Aunt Agatha. Agatha, the butler, and Charles live in Dreadbury Mansion, and are the only people who live therein. A killer always hates their victim, and is never richer than their victim. Charles hates no one that Aunt Agatha hates. Agatha hates everyone except the butler. The butler hates everyone not richer than Aunt Agatha. The butler hates everyone Aunt Agatha hates. No one hates everyone. Agatha is not the butler.

Signatur: $Fun_{PL} = \emptyset$, $Const_{PL} = \{a, b, c\}$, $Rel_{PL} = \{K, H, R, L\}$

(**k**ill, **h**ates, **r**icher, **l**ives) mit $\mathrm{ar}(l) = 1, \mathrm{ar}(k) = \mathrm{ar}(h) = \mathrm{ar}(r) = 2$

$$\forall x(\neg R(x, a) \rightarrow H(b, x))$$

Beispiel: Tante Agathe ist tot!

Aus “Thousands of Problems for Theorem Provers” (`http://tptp.org`)

Someone who lives in Dreadbury Mansion killed Aunt Agatha. Agatha, the butler, and Charles live in Dreadbury Mansion, and are the only people who live therein. A killer always hates their victim, and is never richer than their victim. Charles hates no one that Aunt Agatha hates. Agatha hates everyone except the butler. The butler hates everyone not richer than Aunt Agatha. The butler hates everyone Aunt Agatha hates. No one hates everyone. Agatha is not the butler.

Signatur: $Fun_{PL} = \emptyset$, $Const_{PL} = \{a, b, c\}$, $Rel_{PL} = \{K, H, R, L\}$

(**k**ill, **h**ates, **r**icher, **l**ives) mit $\mathrm{ar}(l) = 1, \mathrm{ar}(k) = \mathrm{ar}(h) = \mathrm{ar}(r) = 2$

$$\forall x(H(a, x) \to H(b, x))$$

Beispiel: Tante Agathe ist tot!

Aus "Thousands of Problems for Theorem Provers" (`http://tptp.org`)

Someone who lives in Dreadbury Mansion killed Aunt Agatha. Agatha, the butler, and Charles live in Dreadbury Mansion, and are the only people who live therein. A killer always hates their victim, and is never richer than their victim. Charles hates no one that Aunt Agatha hates. Agatha hates everyone except the butler. The butler hates everyone not richer than Aunt Agatha. The butler hates everyone Aunt Agatha hates. No one hates everyone. Agatha is not the butler.

Signatur: $Fun_{PL} = \emptyset$, $Const_{PL} = \{a, b, c\}$, $Rel_{PL} = \{K, H, R, L\}$

(**k**ill, **h**ates, **r**icher, **l**ives) mit $\mathrm{ar}(l) = 1, \mathrm{ar}(k) = \mathrm{ar}(h) = \mathrm{ar}(r) = 2$

$$\neg\exists x \forall y\ H(x, y)$$

Beispiel: Tante Agathe ist tot!

Aus "Thousands of Problems for Theorem Provers" (`http://tptp.org`)

Someone who lives in Dreadbury Mansion killed Aunt Agatha. Agatha, the butler, and Charles live in Dreadbury Mansion, and are the only people who live therein. A killer always hates their victim, and is never richer than their victim. Charles hates no one that Aunt Agatha hates. Agatha hates everyone except the butler. The butler hates everyone not richer than Aunt Agatha. The butler hates everyone Aunt Agatha hates. No one hates everyone. Agatha is not the butler.

Signatur: $Fun_{PL} = \emptyset$, $Const_{PL} = \{a, b, c\}$, $Rel_{PL} = \{K, H, R, L\}$

(**k**ill, **h**ates, **r**icher, **l**ives) mit $\mathrm{ar}(l) = 1, \mathrm{ar}(k) = \mathrm{ar}(h) = \mathrm{ar}(r) = 2$

$$\neg\exists x \forall y\; H(x, y)$$

äquivalent zu $\forall x \exists y\; \neg H(x, y)$

Beispiel: Tante Agathe ist tot!

Aus “Thousands of Problems for Theorem Provers” (`http://tptp.org`)

Someone who lives in Dreadbury Mansion killed Aunt Agatha. Agatha, the butler, and Charles live in Dreadbury Mansion, and are the only people who live therein. A killer always hates their victim, and is never richer than their victim. Charles hates no one that Aunt Agatha hates. Agatha hates everyone except the butler. The butler hates everyone not richer than Aunt Agatha. The butler hates everyone Aunt Agatha hates. No one hates everyone. Agatha is not the butler.

Signatur: $Fun_{PL} = \emptyset$, $Const_{PL} = \{a, b, c\}$, $Rel_{PL} = \{K, H, R, L\}$

(**k**ill, **h**ates, **r**icher, **l**ives) mit $\mathrm{ar}(l) = 1, \mathrm{ar}(k) = \mathrm{ar}(h) = \mathrm{ar}(r) = 2$

$$\neg a \doteq b$$

Beispiel: Tante Agathe ist tot!

Aus “Thousands of Problems for Theorem Provers” (`http://tptp.org`)

Someone who lives in Dreadbury Mansion killed Aunt Agatha. Agatha, the butler, and Charles live in Dreadbury Mansion, and are the only people who live therein. A killer always hates their victim, and is never richer than their victim. Charles hates no one that Aunt Agatha hates. Agatha hates everyone except the butler. The butler hates everyone not richer than Aunt Agatha. The butler hates everyone Aunt Agatha hates. No one hates everyone. Agatha is not the butler.

Signatur: $\mathit{Fun}_{PL} = \emptyset$, $\mathit{Const}_{PL} = \{a, b, c\}$, $\mathit{Rel}_{PL} = \{K, H, R, L\}$

(**k**ill, **h**ates, **r**icher, **l**ives) mit $\mathrm{ar}(l) = 1, \mathrm{ar}(k) = \mathrm{ar}(h) = \mathrm{ar}(r) = 2$

Who killed Aunt Agatha?

Zusammenfassung

Karlsruher Institut für Technologie

- Syntax prädikatenlogischer Formeln
  - Terme, atomare Formeln, Formeln
- Semantik
  - Interpretationen und Variablenbelegungen
  - Modelle von Formel(menge)n oder nicht
  - logische Äquivalenz
  - Allgemeingültigkeit
- Modellierung/Formalisierung
  - Einfache Sachverhalte in Prädikatenlogik formalisieren können