Grundbegriffe der Informatik

Einheit 13: Quantitative Aspekte von Algorithmen

Thomas Worsch

Universität Karlsruhe, Fakultät für Informatik

Wintersemester 2008/2009

Überblick

Ressourcenverbrauch bei Berechnungen

Groß-O-Notation
- Ignorieren konstanter Faktoren
- Notation für obere und untere Schranken des Wachstums
- Die furchtbare Schreibweise
- Rechnen im O-Kalkül

Matrixmultiplikation
- Rückblick auf die Schulmethode
- Algorithmus von Strassen

Abschätzung des Wachstums rekursiv definierter Funktionen

Überblick

Ressourcenverbrauch bei Berechnungen

Groß-O-Notation

- Ignorieren konstanter Faktoren
- Notation für obere und untere Schranken des Wachstums
- Die furchtbare Schreibweise
- Rechnen im O-Kalkül

Matrixmultiplikation

- Rückblick auf die Schulmethode
- Algorithmus von Strassen

Abschätzung des Wachstums rekursiv definierter Funktionen

Zählen arithmetischer Operationen

Einheit über Graphalgorithmen:

- Zählen elementarer arithmetischer Operationen
  - für Addition von $n \times n$-Matrizen: n^2
  - für Multiplikation von $n \times n$-Matrizen $2n^3 - n^2$
  - für Berechnung der Wegematrix $n^5 - \frac{3}{2}n^4 + \frac{3}{2}n^3 + n^2$
  - oder weniger ...
- Idee: Das hat was mit der Laufzeit der Algorithmen zu tun.

- Laufzeit/Rechenzeit
- Speicherplatzbedarf
  - insbesondere für „Zwischenergebnisse“
- das sind sogenannte *Komplexitätsmaße*
  - im Sinne von *computational complexity*
  - tauchen an vielen Stellen wieder auf
  - es gibt auch noch andere ...

- wichtiges Handwerkszeug zum
  - Reden über und
  - Ausrechnen von

  z. B. Laufzeiten
- insbesondere: „kontrollierte Ungenauigkeiten“
  - „Groß-O“: stammt von Bachmann (oder früher), von Landau bekannt gemacht
  - Ω, Θ: von Knuth zumindest verbreitet
- nicht genau,
  - weil man nicht will
  - weil man nicht kann

  ein Beispiel kommt gleich ...

```
public class InsertionSort {
  public static void sort(long[] a) {
    for (int i ← 1;  i < a.length;  i++) {
      insert(a, i);
    }
  }
  private static void insert(long[] a, int idx) {
    int i ← idx;
    // Tausche a[idx] nach links bis es einsortiert ist
    while (i > 0 ∧ a[i − 1] > a[i]) {
      // Feldelemente a[i − 1] und a[i] vertauschen
      a[i − 1] ↔ a[i];
      i−−;
    }
  }
}
```

Wie oft wird die **while**-Schleife in der Methode *insert* ausgeführt?

- hängt von der Problemgröße $n = a.length$ ab
- aber nicht nur davon, sondern
- hängt auch von der konkreten Probleminstanz ab
  - Ist Array a von Anfang an sortiert, wird die **while**-Schleife überhaupt nicht ausgeführt.
  - Ist Array a genau in entgegengesetzter Richtung sortiert, wird Schleifenrumpf $\sum_{i=1}^{n-1} i = n(n-1)/2$ mal ausgeführt.

Wie beschreibt man den Ressourcenverbrauch?

- für jede Probleminstanz einzeln:
  - wäre präzise,
  - ist aber oft unpraktikabel
- vergröbernde Sichtweise: nur in Abhängigkeit von der „Problemgröße“
- Frage: Was angeben, wenn Ressourcenverbrauch für verschiedene Instanzen gleicher Größe unterschiedlich?
  - bester Fall? (best case)
    - oft total uninteressant
  - Durchschnitt? (average case)
    - oft sehr schwer
  - schlechtester Fall? (worst case)
    - oft angegeben
    - mit dem „Hinweis“, dass es auch besser sein kann ...

Wie beschreibt man den Ressourcenverbrauch?

- für jede Probleminstanz einzeln:
  - wäre präzise,
  - ist aber oft unpraktikabel
- vergröbernde Sichtweise: nur in Abhängigkeit von der „Problemgröße“
- Frage: Was angeben, wenn Ressourcenverbrauch für verschiedene Instanzen gleicher Größe unterschiedlich?
  - bester Fall? (best case)
    - oft total uninteressant
  - Durchschnitt? (average case)
    - oft sehr schwer
  - schlechtester Fall? (worst case)
    - oft angegeben
    - mit dem „Hinweis“, dass es auch besser sein kann ...

Wie beschreibt man den Ressourcenverbrauch?

- für jede Probleminstanz einzeln:
  - wäre präzise,
  - ist aber oft unpraktikabel
- vergröbernde Sichtweise: nur in Abhängigkeit von der „Problemgröße“
- Frage: Was angeben, wenn Ressourcenverbrauch für verschiedene Instanzen gleicher Größe unterschiedlich?
  - bester Fall? (best case)
    - oft total uninteressant
  - Durchschnitt? (average case)
    - oft sehr schwer
  - schlechtester Fall? (worst case)
    - oft angegeben
    - mit dem „Hinweis“, dass es auch besser sein kann ...

Wie beschreibt man den Ressourcenverbrauch?

- für jede Probleminstanz einzeln:
  - wäre präzise,
  - ist aber oft unpraktikabel
- vergröbernde Sichtweise: nur in Abhängigkeit von der „Problemgröße“
- Frage: Was angeben, wenn Ressourcenverbrauch für verschiedene Instanzen gleicher Größe unterschiedlich?
  - bester Fall? (best case)
    - oft total uninteressant
  - Durchschnitt? (average case)
    - oft sehr schwer
  - schlechtester Fall? (worst case)
    - oft angegeben
    - mit dem „Hinweis“, dass es auch besser sein kann ...

Wie beschreibt man den Ressourcenverbrauch?

- für jede Probleminstanz einzeln:
  - wäre präzise,
  - ist aber oft unpraktikabel
- vergröbernde Sichtweise: nur in Abhängigkeit von der „Problemgröße“
- Frage: Was angeben, wenn Ressourcenverbrauch für verschiedene Instanzen gleicher Größe unterschiedlich?
  - bester Fall? (best case)
    - oft total uninteressant
  - Durchschnitt? (average case)
    - oft sehr schwer
  - schlechtester Fall? (worst case)
    - oft angegeben
    - mit dem „Hinweis“, dass es auch besser sein kann ...

Das sollten Sie mitnehmen:

- Bedarf an
  - Rechenzeit und
  - Speicherplatzbedarf

  wichtige *Komplexitätsmaße*
- Meist will/kann man nur die Abhängigkeit von der Problemgröße quantifizieren
  - üblicherweise den schlimmsten Fall (worst case)
  - gelegentlich einen mittleren Fall (average case)

Das sollten Sie üben:

- Abschätzen/ausrechnen wie oft ein Programmstück, z. B. ein Schleifenrumpf, durchlaufen wird.

Überblick

Ressourcenverbrauch bei Berechnungen

Groß-O-Notation

- Ignorieren konstanter Faktoren
- Notation für obere und untere Schranken des Wachstums
- Die furchtbare Schreibweise
- Rechnen im O-Kalkül

Matrixmultiplikation

- Rückblick auf die Schulmethode
- Algorithmus von Strassen

Abschätzung des Wachstums rekursiv definierter Funktionen

Warum keine exakten Angaben?

- Man will nicht.
  - Faulheit
  - Vergänglichkeit der genauen Werte
    - Prozessor bald höher getaktet
    - Prozessor bald mit schnellerer Architektur
  - mangelndes Interesse an genauen Werten
    - will nur prozessorunabhängige Aussagen
- Man kann nicht.
  - Dummheit
  - Unwissenheit der genauen Randbedingungen
    - welcher Prozessor?
  - Ungenauigkeiten bei der Formulierung des Algorithmus (äh)
    - unabhängig von Programmiersprache
- Man „soll“ nicht.
  - nur vergröbernde Angaben in Abhängigkeit von Problemgröße

Warum keine exakten Angaben?

- Man will nicht.
  - Faulheit
  - Vergänglichkeit der genauen Werte
    - Prozessor bald höher getaktet
    - Prozessor bald mit schnellerer Architektur
  - mangelndes Interesse an genauen Werten
    - will nur prozessorunabhängige Aussagen
- Man kann nicht.
  - Dummheit
  - Unwissenheit der genauen Randbedingungen
    - welcher Prozessor?
  - Ungenauigkeiten bei der Formulierung des Algorithmus (äh)
    - unabhängig von Programmiersprache
- Man „soll“ nicht.
  - nur vergröbernde Angaben in Abhängigkeit von Problemgröße

Warum keine exakten Angaben?

- Man will nicht.
  - Faulheit
  - Vergänglichkeit der genauen Werte
    - Prozessor bald höher getaktet
    - Prozessor bald mit schnellerer Architektur
  - mangelndes Interesse an genauen Werten
    - will nur prozessorunabhängige Aussagen
- Man kann nicht.
  - Dummheit
  - Unwissenheit der genauen Randbedingungen
    - welcher Prozessor?
  - Ungenauigkeiten bei der Formulierung des Algorithmus (äh)
    - unabhängig von Programmiersprache
- Man „soll“ nicht.
  - nur vergröbernde Angaben in Abhängigkeit von Problemgröße

Warum keine exakten Angaben?

- Man will nicht.
  - Faulheit
  - Vergänglichkeit der genauen Werte
    - Prozessor bald höher getaktet
    - Prozessor bald mit schnellerer Architektur
  - mangelndes Interesse an genauen Werten
    - will nur prozessorunabhängige Aussagen
- Man kann nicht.
  - Dummheit
  - Unwissenheit der genauen Randbedingungen
    - welcher Prozessor?
  - Ungenauigkeiten bei der Formulierung des Algorithmus (äh)
    - unabhängig von Programmiersprache
- Man „soll“ nicht.
  - nur vergröbernde Angaben in Abhängigkeit von Problemgröße

Wie ungenau wollen wir über Funktionen reden?

- Ignorieren konstanter Faktoren
  - Motivation: Geschwindigkeitssteigerungen bei Prozessoren irrelevant
- nur obere (bzw. untere) Schranken
  - Motivation: können nur schlechtesten Fall analysieren

Überblick

Zu Notation und Redeweise

- Notation:
  - $\mathbb{R}^+$: Menge der positiven reellen Zahlen (*ohne* 0)
  - $\mathbb{R}_0^+$: Menge der nichtnegativen rellen Zahlen, $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.
  - betrachten Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$.
- Redeweisen:
  - *asymptotisches Wachstum* oder
  - *größenordnungsmäßiges Wachstum* von Funktionen
    - das Wort „größenordnungsmäßig" gibt es gar nicht …
- Definition:
  - Funktion $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ wächst *größenordnungsmäßig genauso schnell* wie Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$, wenn gilt:

$$\exists c, c' \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : cf(n) \leq g(n) \leq c'f(n) .$$

  - schreibe $f \asymp g$ oder $f(n) \asymp g(n)$

Zu Notation und Redeweise

- Notation:
  - $\mathbb{R}^+$: Menge der positiven reellen Zahlen (*ohne* 0)
  - $\mathbb{R}_0^+$: Menge der nichtnegativen rellen Zahlen, $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.
  - betrachten Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$.
- Redeweisen:
  - *asymptotisches Wachstum* oder
  - *größenordnungsmäßiges Wachstum* von Funktionen
    - das Wort „größenordnungsmäßig“ gibt es gar nicht ...
- Definition:
  - Funktion $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ wächst *größenordnungsmäßig genauso schnell* wie Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$, wenn gilt:

$$\exists c, c' \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : cf(n) \leq g(n) \leq c'f(n) .$$

  - schreibe $f \asymp g$ oder $f(n) \asymp g(n)$

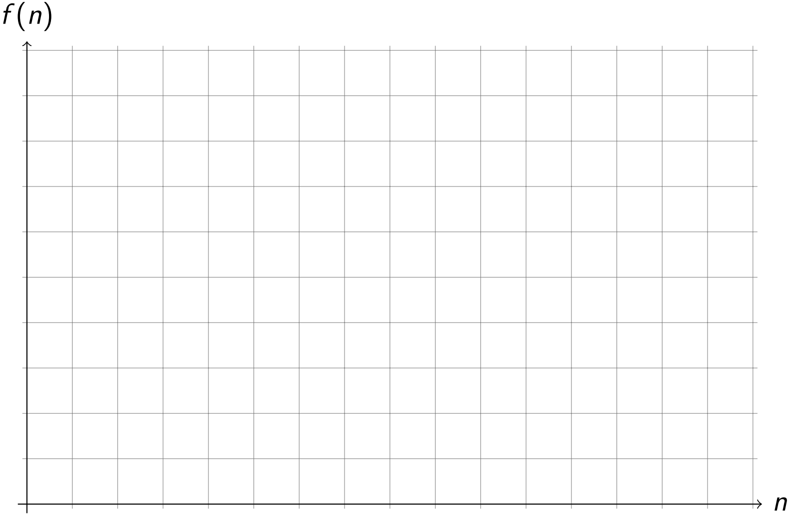
Zu Notation und Redeweise

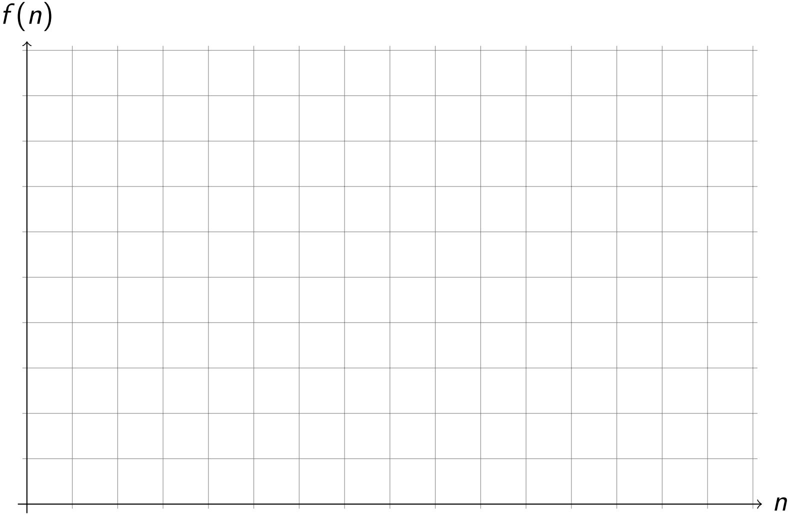
- Notation:
  - $\mathbb{R}^+$: Menge der positiven reellen Zahlen (*ohne* 0)
  - $\mathbb{R}_0^+$: Menge der nichtnegativen rellen Zahlen, $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.
  - betrachten Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$.
- Redeweisen:
  - *asymptotisches Wachstum* oder
  - *größenordnungsmäßiges Wachstum* von Funktionen
    - das Wort „größenordnungsmäßig“ gibt es gar nicht ...
- Definition:
  - Funktion $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ wächst *größenordnungsmäßig genauso schnell* wie Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$, wenn gilt:

$$\exists c, c' \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : cf(n) \leq g(n) \leq c' f(n) \ .$$

  - schreibe $f \asymp g$ oder $f(n) \asymp g(n)$

Erläuterungen zur Definition von $f \asymp g$ (1)




$f(n)$
n

Beispiel

- $f(n) = 3n^2$ und $g(n) = 10^{-2}n^2$.
- Behauptung: $f(n) \asymp g(n)$
  - einerseits gilt für $c = 10^{-3}$ und $n_0 = 0$:

$$\forall n \geq n_0 : cf(n) = 10^{-3} \cdot 3n^2 \leq 10^{-2}n^2 = g(n)$$

  - Andererseits gilt z. B. für $c' = 1$ und $n_0 = 0$:

$$\forall n \geq n_0 : g(n) = 10^{-2}n^2 \leq 3n^2 = c'f(n)$$

Das lässt sich leicht etwas allgemeiner rechnen. Dann sieht man:

Rechenregel

Für alle $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ gilt:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : af(n) \asymp bf(n)$$

Beispiel

- $f(n) = 3n^2$ und $g(n) = 10^{-2}n^2$.
- Behauptung: $f(n) \asymp g(n)$
  - einerseits gilt für $c = 10^{-3}$ und $n_0 = 0$:

$$\forall n \geq n_0 : cf(n) = 10^{-3} \cdot 3n^2 \leq 10^{-2}n^2 = g(n)$$

  - Andererseits gilt z. B. für $c' = 1$ und $n_0 = 0$:

$$\forall n \geq n_0 : g(n) = 10^{-2}n^2 \leq 3n^2 = c'f(n)$$

Das lässt sich leicht etwas allgemeiner rechnen. Dann sieht man:

Rechenregel

Für alle $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ gilt:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : af(n) \asymp bf(n)$$

Beispiel

- $f(n) = 3n^2$ und $g(n) = 10^{-2}n^2$.
- Behauptung: $f(n) \asymp g(n)$
  - einerseits gilt für $c = 10^{-3}$ und $n_0 = 0$:

$$\forall n \geq n_0 : cf(n) = 10^{-3} \cdot 3n^2 \leq 10^{-2}n^2 = g(n)$$

  - Andererseits gilt z. B. für $c' = 1$ und $n_0 = 0$:

$$\forall n \geq n_0 : g(n) = 10^{-2}n^2 \leq 3n^2 = c'f(n)$$

Das lässt sich leicht etwas allgemeiner rechnen. Dann sieht man:

Rechenregel

Für alle $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ gilt:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : af(n) \asymp bf(n)$$

Beispiel (2)

- $f(n) = n^3 + 5n^2$ und $g(n) = 3n^3 - n$
- Behauptung $f(n) \asymp g(n)$
  - einerseits ist für $n \geq 0$ offensichtlich

$$\begin{aligned} f(n) &= n^3 + 5n^2 \\ &\leq n^3 + 5n^3 \\ &= 6n^3 \\ &= 9n^3 - 3n^3 \\ &\leq 9n^3 - 3n \\ &= 3(3n^3 - n) = 3g(n) \end{aligned}$$

also $$\frac{1}{3}f(n) \leq g(n)$$

  - Andererseits ist

$$g(n) = 3n^3 - n \leq 3n^3 \leq 3(n^3 + 5n^2) = 3f(n)$$

Beispiel (2)

- $f(n) = n^3 + 5n^2$ und $g(n) = 3n^3 - n$
- Behauptung $f(n) \asymp g(n)$
  - einerseits ist für $n \geq 0$ offensichtlich

$$\begin{aligned} f(n) &= n^3 + 5n^2 \\ &\leq n^3 + 5n^3 \\ &= 6n^3 \\ &= 9n^3 - 3n^3 \\ &\leq 9n^3 - 3n \\ &= 3(3n^3 - n) = 3g(n) \end{aligned}$$

$$\text{also} \qquad \frac{1}{3} f(n) \leq g(n)$$

  - Andererseits ist

$$g(n) = 3n^3 - n \leq 3n^3 \leq 3(n^3 + 5n^2) = 3f(n)$$

„Nichtbeispiel“ für $\asymp$

- betrachte $f(n) = n^2$ und $g(n) = n^3$
- Behauptung: $f \not\asymp g$
- Begründung:
  - Für $f \asymp g$ muss insbesondere $g(n) \leq c' f(n)$ gelten.
  - Das ist für $f(n) \neq 0$ äquivalent zu $g(n)/f(n) \leq c'$.
  - Das muss also für ein $c' \in \mathbb{R}^+$ ab einem n_0 für alle n gelten.
  - Aber $g(n)/f(n) = n$ kann durch keine Konstante beschränkt werden.

„Nichtbeispiel" für $\asymp$

- betrachte $f(n) = n^2$ und $g(n) = n^3$
- Behauptung: $f \not\asymp g$
- Begründung:
  - Für $f \asymp g$ muss insbesondere $g(n) \leq c' f(n)$ gelten.
  - Das ist für $f(n) \neq 0$ äquivalent zu $g(n)/f(n) \leq c'$.
  - Das muss also für ein $c' \in \mathbb{R}^+$ ab einem n_0 für alle n gelten.
  - Aber $g(n)/f(n) = n$ kann durch keine Konstante beschränkt werden.

„Nichtbeispiel“ für $\asymp$

- betrachte $f(n) = n^2$ und $g(n) = n^3$
- Behauptung: $f \not\asymp g$
- Begründung:
  - Für $f \asymp g$ muss insbesondere $g(n) \leq c' f(n)$ gelten.
  - Das ist für $f(n) \neq 0$ äquivalent zu $g(n)/f(n) \leq c'$.
  - Das muss also für ein $c' \in \mathbb{R}^+$ ab einem n_0 für alle n gelten.
  - Aber $g(n)/f(n) = n$ kann durch keine Konstante beschränkt werden.

„Nichtbeispiel" für $\asymp$

- betrachte $f(n) = n^2$ und $g(n) = n^3$
- Behauptung: $f \not\asymp g$
- Begründung:
  - Für $f \asymp g$ muss insbesondere $g(n) \leq c' f(n)$ gelten.
  - Das ist für $f(n) \neq 0$ äquivalent zu $g(n)/f(n) \leq c'$.
  - Das muss also für ein $c' \in \mathbb{R}^+$ ab einem n_0 für alle n gelten.
  - Aber $g(n)/f(n) = n$ kann durch keine Konstante beschränkt werden.

Äquivalenzrelation $\asymp$

- Zeichen $\asymp$ erinnert an das Gleichheitszeichen.
- Das ist Absicht: Relation $\asymp$ hat wichtige Eigenschaften:

Lemma

Die Relation $\asymp$ ist eine Äquivalenzrelation.

Zur Erinnerung: Eine Äquivalenzrelation ist per definitionem

- reflexiv,
- symmetrisch,
- transitiv.

Äquivalenzrelation $\asymp$: Beweis (1)

- *Reflexitvität*: $f \asymp f$
  denn man für $c = c' = 1$ und $n_0 = 0$ gilt:
  für $n \geq n_0$ ist $cf(n) \leq f(n) \leq c'f(n)$
- *Symmetrie:* Wenn $f \asymp g$, dann auch $g \asymp f$
  Wenn für Konstanten $c, c' \in \mathbb{R}^+$, $n_0 \in \mathbb{N}_0$ und alle $n \geq n_0$

$$cf(n) \leq g(n) \leq c'f(n) \,,$$

  dann gilt für die gleichen $n \geq n_0$ und
  die Konstanten $d = 1/c$ und $d' = 1/c'$:

$$d'g(n) \leq f(n) \leq dg(n) \,.$$

Äquivalenzrelation $\asymp$: Beweis (1)

- *Reflexitvität*: $f \asymp f$
  denn man für $c = c' = 1$ und $n_0 = 0$ gilt:
  für $n \geq n_0$ ist $cf(n) \leq f(n) \leq c'f(n)$
- *Symmetrie:* Wenn $f \asymp g$, dann auch $g \asymp f$
  Wenn für Konstanten $c, c' \in \mathbb{R}^+$, $n_0 \in \mathbb{N}_0$ und alle $n \geq n_0$

  $$cf(n) \leq g(n) \leq c'f(n) ,$$

  dann gilt für die gleichen $n \geq n_0$ und
  die Konstanten $d = 1/c$ und $d' = 1/c'$:

  $$d'g(n) \leq f(n) \leq dg(n) .$$

Äquivalenzrelation $\asymp$: Beweis (1)

- *Reflexitvität*: $f \asymp f$
  denn man für $c = c' = 1$ und $n_0 = 0$ gilt:
  für $n \geq n_0$ ist $cf(n) \leq f(n) \leq c'f(n)$
- *Symmetrie:* Wenn $f \asymp g$, dann auch $g \asymp f$
  Wenn für Konstanten $c, c' \in \mathbb{R}^+$, $n_0 \in \mathbb{N}_0$ und alle $n \geq n_0$

$$cf(n) \leq g(n) \leq c'f(n) \ ,$$

dann gilt für die gleichen $n \geq n_0$ und
die Konstanten $d = 1/c$ und $d' = 1/c'$:

$$d'g(n) \leq f(n) \leq dg(n) \ .$$

Äquivalenzrelation $\asymp$: Beweis (1)

- *Reflexitvität*: $f \asymp f$
  denn man für $c = c' = 1$ und $n_0 = 0$ gilt:
  für $n \geq n_0$ ist $cf(n) \leq f(n) \leq c'f(n)$
- *Symmetrie:* Wenn $f \asymp g$, dann auch $g \asymp f$
  Wenn für Konstanten $c, c' \in \mathbb{R}^+$, $n_0 \in \mathbb{N}_0$ und alle $n \geq n_0$

  $$cf(n) \leq g(n) \leq c'f(n) \; ,$$

  dann gilt für die gleichen $n \geq n_0$ und
  die Konstanten $d = 1/c$ und $d' = 1/c'$:

  $$d'g(n) \leq f(n) \leq dg(n) \; .$$

Äquivalenzrelation $\asymp$: Beweis (2)

- *Transitivität:* wenn $f \asymp g$ und $g \asymp h$, dann $f \asymp h$.
  gelte für Konstanten $c, c' \in \mathbb{R}_+$ und alle $n \geq n_0$

  $$cf(n) \leq g(n) \leq c'f(n)$$

  und für Konstanten $d, d' \in \mathbb{R}_+$ und alle $n \geq n_1$

  $$dg(n) \leq h(n) \leq d'g(n) \; .$$

  Dann gilt für alle $n \geq \max(n_0, n_1)$

  $$dcf(n) \leq dg(n) \leq h(n) \leq d'g(n) \leq d'c'f(n) \; ,$$

  wobei auch die Konstanten dc und $d'c'$ wieder positiv sind.

Groß-Θ

- $\Theta(f)$: Menge aller Funktionen, die zu einer gegebenen Funktion $f(n)$ im Sinne von $\asymp$ äquivalent sind
- Also:

$$\begin{aligned}\Theta(f(n)) &= \{g(n) \mid f(n) \asymp g(n)\} \\ &= \big\{g(n) \mid \exists c, c' \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : \\ &\qquad cf(n) \leq g(n) \leq c'f(n)\big\}\end{aligned}$$

Rechenregel

Für alle $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ und alle Konstanten $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ gilt:

$$\Theta(af(n)) = \Theta(bf(n)) \ .$$

Überblick

Obere und untere Schranken

- Manchmal kennt man eine Funktion nicht mal bis auf einen konstanten Faktor, sondern nur obere (oder/und untere) Schranken.
  - Erinnerung: Anzahl Schleifendurchläufe bei Insertionsort
- Definition:
  - $\mathrm{O}(f) = \{g \mid \exists c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : g(n) \leq cf(n)\}$
  - $\Omega(f) = \{g \mid \exists c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : g(n) \geq cf(n)\}$
- gelegentlich auch

$$\begin{array}{lll} g \preceq f & \text{falls} & g \in \mathrm{O}(f) \\ g \succeq f & \text{falls} & g \in \Omega(f) \end{array}$$

- Redeweise
  - g *wächst asymptotisch höchstens so schnell wie* f (falls $g \preceq f$)
  - g *wächst asymptotisch mindestens so schnell wie* f (falls $g \succeq f$)

Beispiel (1)

- Es sei $g(n) = 10^{90} n^7$ und $f(n) = 10^{-90} n^8$
- Behauptung: $g(n) \in \mathrm{O}(f(n))$
- Begründung:
  - wähle $c = 10^{180}$ und $n_0 = 0$
  - dann für alle $n \geq 0$: $10^{90} n^7 \leq c \cdot 10^{-90} n^8$.
- Man sieht: In $\mathrm{O}(\cdot)$ usw. können *große* Konstanten stecken.
- Deswegen: Ob z. B. Algorithmus mit Laufzeit in $\mathrm{O}(n^8)$ in der Praxis wirklich tauglich ist, hängt durchaus von der Konstante c bei der oberen Schranke cn^8 ab.
  - $c = 10^{-90}$ dürfte okay sein,
  - $c = 10^{90}$ vermutlich nicht.

Beispiel (1)

- Es sei $g(n) = 10^{90}n^7$ und $f(n) = 10^{-90}n^8$
- Behauptung: $g(n) \in \mathrm{O}(f(n))$
- Begründung:
  - wähle $c = 10^{180}$ und $n_0 = 0$
  - dann für alle $n \geq 0$: $10^{90}n^7 \leq c \cdot 10^{-90}n^8$.
- Man sieht: In $\mathrm{O}(\cdot)$ usw. können *große* Konstanten stecken.
- Deswegen: Ob z. B. Algorithmus mit Laufzeit in $\mathrm{O}(n^8)$ in der Praxis wirklich tauglich ist, hängt durchaus von der Konstante c bei der oberen Schranke cn^8 ab.
  - $c = 10^{-90}$ dürfte okay sein,
  - $c = 10^{90}$ vermutlich nicht.

Beispiel (2)

- Was ist $\mathrm{O}(1)$?
- Definition: alle Funktionen $g(n)$, für die es $c \in \mathbb{R}^+$ und $n_0 \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$g(n) \leq c \cdot 1 = c$$

- alle Funktionen, die durch eine Konstante beschränkbar sind
  - Dazu gehören etwa alle konstanten Funktionen,
  - aber auch Funktionen wie $3 + \sin(n)$
    (So etwas habe ich aber noch nie eine Rolle spielen sehen.)

Beispiel (3)

- vorne: er Quotient n^2/n nicht für alle hinreichend großen n durch eine Konstante beschränkbar
- Also gilt *nicht* $n^2 \preceq n$.
- Andererseits gilt $n \preceq n^2$ (klar?)
- Die Relation $\preceq$ ist also *nicht* symmetrisch.
- Allgemein für reelle Konstanten $0 < a < b$:

$$n^a \preceq n^b \qquad \text{aber} \qquad n^b \not\preceq n^a$$

also

$$n^a \in \mathrm{O}\left(n^b\right) \qquad \text{aber} \qquad n^b \notin \mathrm{O}(n^a)$$

- in der Ungleichung $g(n) \leq cf(n)$ die Konstante auf die andere Seite bringen (hatten wir schon) liefert

Rechenregel

Für alle Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ und $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ gilt:

$$g(n) \in \mathrm{O}(f(n)) \iff f(n) \in \Omega(g(n)), \quad \text{also} \quad g \preceq f \iff f \succeq g$$

- Man kann auch zeigen:

$$\Theta(f(n)) = \mathrm{O}(f(n)) \cap \Omega(f(n))$$

$$\text{also} \qquad g \asymp f \iff g \preceq f \wedge g \succeq f$$

Überblick

Ressourcenverbrauch bei Berechnungen

Groß-O-Notation
- Ignorieren konstanter Faktoren
- Notation für obere und untere Schranken des Wachstums
- Die furchtbare Schreibweise
- Rechnen im O-Kalkül

Matrixmultiplikation
- Rückblick auf die Schulmethode
- Algorithmus von Strassen

Abschätzung des Wachstums rekursiv definierter Funktionen

Für die Lektüre leider unverzichtbar

- eine sehr unschöne (um nicht zu sagen irreführende) Variante der eben eingeführten Notation
- aber leider weit verbreitet
- Man schreibt

$$\begin{aligned} g(n) &= \mathrm{O}(f(n)) &\quad \text{statt} \quad & g(n) \in \mathrm{O}(f(n))\ , \\ g(n) &= \Theta(f(n)) &\quad \text{statt} \quad & g(n) \in \Theta(f(n))\ , \\ g(n) &= \Omega(f(n)) &\quad \text{statt} \quad & g(n) \in \Omega(f(n))\ . \end{aligned}$$

- Ausdrücke auf der linken Seite sind keine Gleichungen!
- Lassen Sie daher bitte immer große Vorsicht walten:
  - Es ist falsch, aus $g(n) = \mathrm{O}(f_1(n))$ und $g(n) = \mathrm{O}(f_2(n))$ zu folgern, dass $\mathrm{O}(f_1(n)) = \mathrm{O}(f_2(n))$ ist.
  - Es ist falsch, aus $g_1(n) = \mathrm{O}(f(n))$ und $g_2(n) = \mathrm{O}(f(n))$ zu folgern, dass $g_1(n) = g_2(n)$ ist.

Für die Lektüre leider unverzichtbar

- eine sehr unschöne (um nicht zu sagen irreführende) Variante der eben eingeführten Notation
- aber leider weit verbreitet
- Man schreibt

$$
\begin{aligned}
g(n) = \mathrm{O}(f(n)) &\quad \text{statt} \quad g(n) \in \mathrm{O}(f(n)) \;, \\
g(n) = \Theta(f(n)) &\quad \text{statt} \quad g(n) \in \Theta(f(n)) \;, \\
g(n) = \Omega(f(n)) &\quad \text{statt} \quad g(n) \in \Omega(f(n)) \;.
\end{aligned}
$$

- Ausdrücke auf der linken Seite sind keine Gleichungen!
- Lassen Sie daher bitte immer große Vorsicht walten:
  - Es ist falsch, aus $g(n) = \mathrm{O}(f_1(n))$ und $g(n) = \mathrm{O}(f_2(n))$ zu folgern, dass $\mathrm{O}(f_1(n)) = \mathrm{O}(f_2(n))$ ist.
  - Es ist falsch, aus $g_1(n) = \mathrm{O}(f(n))$ und $g_2(n) = \mathrm{O}(f(n))$ zu folgern, dass $g_1(n) = g_2(n)$ ist.

Überblick

Eine nützliche Rechenregel

- Ist $g_1 \preceq f_1$ und $g_2 \preceq f_2$, dann ist auch $g_1 + g_2 \preceq f_1 + f_2$.
- Ist umgekehrt $g \preceq f_1 + f_2$, dann kann man g in der Form $g = g_1 + g_2$ schreiben mit $g_1 \preceq f_1$ und $g_2 \preceq f_2$.

Das schreiben wir auch so:

Lemma
Für alle Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ gilt:

$$\mathrm{O}(f_1) + \mathrm{O}(f_2) = \mathrm{O}(f_1 + f_2)$$

Das Pluszeichen auf der linken Seite bedarf der Erläuterung ...

Komplexoperationen

- Sind M_1 und M_2 Mengen von Elementen, die man addieren bzw. multiplizieren kann, dann sei

$$M_1 + M_2 = \{g_1 + g_2 \mid g_1 \in M_1 \wedge g_2 \in M_2\}$$
$$M_1 \cdot M_2 = \{g_1 \cdot g_2 \mid g_1 \in M_1 \wedge g_2 \in M_2\}$$

- Das ist nichts Neues: Definition des Produkts formaler Sprachen passt genau in dieses Schema.

- Wenn eine der Mengen M_i einelementig ist, lässt man manchmal die Mengenklammern darum weg.
- Beispiele
  - mit Zahlenmengen

    statt $\{3\} \cdot \mathbb{N}_0 + \{1\}$ kürzer $3\mathbb{N}_0 + 1$

  - mit Funktionenmengen

    statt $\{n^3\} + \mathrm{O}\left(n^2\right)$ kürzer $n^3 + \mathrm{O}\left(n^2\right)$

Beweis des Lemmas

beide Inklusionen getrennt beweisen:

„$\subseteq$“: das ist einfach
Wenn für alle $n \geq n_{01}$ gilt: $g_1(n) \leq c_1 f_1(n)$ und
wenn für alle $n \geq n_{02}$ gilt: $g_2(n) \leq c_2 f_2(n)$, dann
gilt für $n \geq n_0 = \max(n_{01}, n_{02})$ und $c = \max(c_1, c_2)$:

$$\begin{aligned} g_1(n) + g_2(n) &\leq c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) \\ &\leq c f_1(n) + c f_2(n) \\ &= c(f_1(n) + f_2(n)) \end{aligned}$$

„$\supseteq$“: „schwieriger“, weil man g_1 und g_2 finden muss.
Definiere

$$g_1(n) = \begin{cases} g(n) & \text{falls } g(n) \leq c f_1(n) \\ c f_1(n) & \text{falls } g(n) > c f_1(n) \end{cases}$$

und $$g_2(n) = g(n) - g_1(n)$$

Der Rest ist einfache Rechnung.

Weitere Regeln

Rechenregel

Wenn $g_1 \preceq f_1$ ist, und wenn $g_1 \asymp g_2$ und $f_1 \asymp f_2$, dann gilt auch $g_2 \preceq f_2$.

Rechenregel

Wenn $g \preceq f$ ist, also $g \in \mathrm{O}(f)$, dann ist auch $\mathrm{O}(g) \subseteq \mathrm{O}(f)$ und $\mathrm{O}(g + f) = \mathrm{O}(f)$.

Was ist wichtig

Das sollten Sie mitnehmen:

- Definitionen von $\mathrm{O}(f)$, $\Theta(f)$, $\Omega(f)$
- Definitionen von $\asymp$, $\preceq$, $\succeq$

Das sollten Sie üben:

- Anschauung für $\mathrm{O}(f)$, $\Theta(f)$, $\Omega(f)$
- rechnen mit $\mathrm{O}(f)$, $\Theta(f)$, $\Omega(f)$

Überblick

Ressourcenverbrauch bei Berechnungen

Groß-O-Notation

- Ignorieren konstanter Faktoren
- Notation für obere und untere Schranken des Wachstums
- Die furchtbare Schreibweise
- Rechnen im O-Kalkül

Matrixmultiplikation

- Rückblick auf die Schulmethode
- Algorithmus von Strassen

Abschätzung des Wachstums rekursiv definierter Funktionen

Überblick

Multiplikation von 2×2-Matrizen

$$
\begin{array}{cc|cc}
 & & b_{11} & b_{12} \\
 & & b_{21} & b_{22} \\
\hline
a_{11} & a_{12} & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\
a_{21} & a_{22} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}
\end{array}
$$

- Anzahl Multiplikationen: $N_{mult}(2) = 2^2 \cdot 2 = 8$
- Anzahl Additionen: $N_{add}(2) = 2^2 \cdot (2-1) = 4$.

Multiplikation von $n \times n$-Matrizen

- n sei gerade
- Verwendung von Blockmatrizen:

$$\begin{array}{cc|cc} & & B_{11} & B_{12} \\ & & B_{21} & B_{22} \\ \hline A_{11} & A_{12} & A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21} & A_{22} & A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array}$$

- alle Blöcke haben Größe $n/2 \times n/2$
- 8 Multiplikationen von Blockmatrizen und
  4 Additionen von Blockmatrizen.
- Anzahl elementarer Operationen
  - $N_{mult}(n) = 8 \cdot N_{mult}(n/2)$ und
  - $N_{add}(n) = 8 \cdot N_{add}(n/2) + 4 \cdot (n/2)^2 = 8 \cdot N_{add}(n/2) + n^2$.

Multiplikation von $2^k \times 2^k$-Matrizen

- Fälle $n \neq 2^k$ kann man mit mehr Aufwand analog behandeln.
- aus $N_{mult}(n) = 8 \cdot N_{mult}(n/2)$ folgt

$$
\begin{aligned}
N_{mult}(2^k) &= 8 \cdot N_{mult}(2^{k-1}) = 8 \cdot 8 \cdot N_{mult}(2^{k-2}) = \cdots \\
&= 8^k \cdot N_{mult}(1) \\
&= 8^k = 8^{\log_2(n)} = 2^{3\log_2(n)} = 2^{\log_2(n)\cdot 3} = n^3
\end{aligned}
$$

- Induktion wäre klar, oder?
- Aus $N_{add}(n) = 8 \cdot N_{add}(n/2) + n^2$ folgt

$$
\begin{aligned}
N_{add}(2^k) &= 8 \cdot N_{add}(2^{k-1}) + 4^k \\
&= 8 \cdot 8 \cdot N_{add}(2^{k-2}) + 8 \cdot 4^{k-1} + 4^k = \cdots \\
&= 8 \cdot 8 \cdot N_{add}(2^{k-2}) + 2 \cdot 4^k + 4^k = \cdots \\
&= 8^k N_{add}(2^0) + (2^{k-1} + \cdots 1) \cdot 4^k = \\
&= 2^k \cdot 4^k \cdot 1 + (2^k - 1) \cdot 4^k = \\
&= 2 \cdot 2^k \cdot 4^k - 4^k = 2n^3 - n^2
\end{aligned}
$$

Nichts neues

- Das wussten wir doch schon:
  - $N_{mult}(n) = n^3$
  - $N_{add}(n) = 2n^3 - n^2$
- und?

Überblick

Ressourcenverbrauch bei Berechnungen

Groß-O-Notation

- Ignorieren konstanter Faktoren
- Notation für obere und untere Schranken des Wachstums
- Die furchtbare Schreibweise
- Rechnen im O-Kalkül

Matrixmultiplikation

- Rückblick auf die Schulmethode
- Algorithmus von Strassen

Abschätzung des Wachstums rekursiv definierter Funktionen

Die Idee von Strassen

Man kann die Einträge C_{ij} des Matrixproduktes auch wie folgt berechnen:

$$
\begin{aligned}
M_1 &= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}) \\
M_2 &= (A_{21} + A_{22})B_{11} \\
M_3 &= A_{11}(B_{12} - B_{22}) \\
M_4 &= A_{22}(B_{21} - B_{11}) \\
M_5 &= (A_{11} + A_{12})B_{22} \\
M_6 &= (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}) \\
M_7 &= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}) \\
\text{und dann} \quad C_{11} &= M_1 + M_4 - M_5 + M_7 \\
C_{12} &= M_3 + M_5 \\
C_{21} &= M_2 + M_4 \\
C_{22} &= M_1 - M_2 + M_3 + M_6
\end{aligned}
$$

Die Idee von Strassen (2)

$$\begin{aligned} M_1 &= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}) \\ M_2 &= (A_{21} + A_{22})B_{11} \\ M_3 &= A_{11}(B_{12} - B_{22}) \\ M_4 &= A_{22}(B_{21} - B_{11}) \\ M_5 &= (A_{11} + A_{12})B_{22} \\ M_6 &= (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}) \\ M_7 &= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}) \\ \text{und dann} \quad C_{11} &= M_1 + M_4 - M_5 + M_7 \\ C_{12} &= M_3 + M_5 \\ C_{21} &= M_2 + M_4 \\ C_{22} &= M_1 - M_2 + M_3 + M_6 \end{aligned}$$

- 18 Additionen statt 4
- 7 Multiplikationen statt 8

Die Idee von Strassen (3)

- 18 Additionen statt 4
- 7 Multiplikationen statt 8

- ja und?

Die Idee von Strassen (3)

- 18 Additionen statt 4
- 7 Multiplikationen statt 8

- ja und?

- ganze Block*matrizen*:
  Additionen sind *viel* „billiger“ als Multiplikationen

- übrigens:
  - bei einzelnen Zahlen sind Additionen auch *viel* „billiger“ als Multiplikationen
  - bei den kleinen Werten in Rechnern merkt man das nur nicht

Die Idee von Strassen (3)

- 18 Additionen statt 4
- 7 Multiplikationen statt 8

- ja und?

- ganze Block*matrizen*:
  Additionen sind *viel* „billiger“ als Multiplikationen

- übrigens:
  - bei einzelnen Zahlen sind Additionen auch *viel* „billiger“ als Multiplikationen
  - bei den kleinen Werten in Rechnern merkt man das nur nicht

Aufwandsabschätzung für den Algorithmus von Strassen

- Anzahl elementarer Operationen:
  - $N_{mult}(n) = 7 \cdot N_{mult}(n/2)$
  - $N_{add}(n) = 7 \cdot N_{add}(n/2) + 18 \cdot (n/2)^2 = 7 \cdot N_{add}(n/2) + 4.5 \cdot n^2$
- Für den Fall $n = 2^k$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} N_{mult}(2^k) &= 7 \cdot N_{mult}(2^{k-1}) = 7 \cdot 7 \cdot N_{mult}(2^{k-2}) = \cdots \\ &= 7^k \cdot N_{mult}(1) \\ &= 7^k = 7^{\log_2(n)} = 2^{\log_2 7 \cdot \log_2(n)} = n^{\log_2 7} \approx n^{2.807\ldots} \end{aligned}$$

- Analog auch $N_{add}(n) \in \Theta(n^{\log_2 7})$.
- Gesamtzahl elementarer Operationen ist also in

$$\Theta(n^{\log_2 7}) + \Theta(n^{\log_2 7}) = \Theta(n^{\log_2 7}) \approx \Theta(n^{2.807\ldots})\ .$$

Noch schneller?

- Ja: Algorithmus von Coppersmith und Winograd: $\mathrm{O}(n^{2.376\ldots})$
  - der konstante Faktor ist *groß*.
- Unklar: Reichen $\mathrm{O}(n^2)$ Operationen?

Teile und herrsche

- Man teilt die Probleminstanz in kleinere Teile auf
  - mehr oder weniger viele
- Man bearbeitet die Teile rekursiv nach dem gleichen Verfahren.
- Man benutzt die Teilergebnisse, um das Resultat für die ursprüngliche Eingabe zu berechnen.
- engl. *divide and conquer*

Was ist wichtig

Das sollten Sie mitnehmen:

- bei algorithmischen Problemen kann man überraschende Dinge tun
- Teile und Herrsche
- Rekursionsformel für Abschätzung von (z. B.) Laufzeiten

Das sollten Sie üben:

- in dieser Vorlesung: rechnen mit $\mathrm{O}(\cdot)$, $\Theta(\cdot)$, $\Omega(\cdot)$
  - spätestens in kommenden Semestern: rekursive Algorithmen

Überblick

Ressourcenverbrauch bei Berechnungen

Groß-O-Notation

- Ignorieren konstanter Faktoren
- Notation für obere und untere Schranken des Wachstums
- Die furchtbare Schreibweise
- Rechnen im O-Kalkül

Matrixmultiplikation

- Rückblick auf die Schulmethode
- Algorithmus von Strassen

Abschätzung des Wachstums rekursiv definierter Funktionen

Laufzeit von Teile-und-Herrsche-Algorithmen

- in einfachen Fällen:
  - Problem der Größe n wird in konstante Anzahl a von Teilprobleme gleicher Größe n/b zerhackt
  - sinnvollerweise $a \geq 1$ und $b > 1$
  - Zerhacken vorher und Zusammensetzen hinterher kosten $f(n)$.
- Abschätzung (z. B.) der Laufzeit $T(n)$ liefert Rekursionsformel, die „grob gesagt" die Form hat

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

- genau genommen:
  - $\lfloor n/b \rfloor$ oder $\lceil n/b \rceil$
  - oder gar $\lfloor n/b + c \rfloor$ oder $\lceil n/b + c \rceil$
  - Mitteilung: Das ändert nichts.
- Gesucht: explizite Formel für $T(n)$.

Laufzeit von Teile-und-Herrsche-Algorithmen

- in einfachen Fällen:
  - Problem der Größe n wird in konstante Anzahl a von Teilprobleme gleicher Größe n/b zerhackt
  - sinnvollerweise $a \geq 1$ und $b > 1$
  - Zerhacken vorher und Zusammensetzen hinterher kosten $f(n)$.
- Abschätzung (z. B.) der Laufzeit $T(n)$ liefert Rekursionsformel, die „grob gesagt" die Form hat

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

- genau genommen:
  - $\lfloor n/b \rfloor$ oder $\lceil n/b \rceil$
  - oder gar $\lfloor n/b + c \rfloor$ oder $\lceil n/b + c \rceil$
  - Mitteilung: Das ändert nichts.
- Gesucht: explizite Formel für $T(n)$.

Laufzeit von Teile-und-Herrsche-Algorithmen

- in einfachen Fällen:
  - Problem der Größe n wird in konstante Anzahl a von Teilprobleme gleicher Größe n/b zerhackt
  - sinnvollerweise $a \geq 1$ und $b > 1$
  - Zerhacken vorher und Zusammensetzen hinterher kosten $f(n)$.
- Abschätzung (z. B.) der Laufzeit $T(n)$ liefert Rekursionsformel, die „grob gesagt" die Form hat

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

- genau genommen:
  - $\lfloor n/b \rfloor$ oder $\lceil n/b \rceil$
  - oder gar $\lfloor n/b + c \rfloor$ oder $\lceil n/b + c \rceil$
  - Mitteilung: Das ändert nichts.
- Gesucht: explizite Formel für $T(n)$.

Laufzeit von Teile-und-Herrsche-Algorithmen

- in einfachen Fällen:
  - Problem der Größe n wird in konstante Anzahl a von Teilprobleme gleicher Größe n/b zerhackt
  - sinnvollerweise $a \geq 1$ und $b > 1$
  - Zerhacken vorher und Zusammensetzen hinterher kosten $f(n)$.
- Abschätzung (z. B.) der Laufzeit $T(n)$ liefert Rekursionsformel, die „grob gesagt" die Form hat

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

- genau genommen:
  - $\lfloor n/b \rfloor$ oder $\lceil n/b \rceil$
  - oder gar $\lfloor n/b + c \rfloor$ oder $\lceil n/b + c \rceil$
  - Mitteilung: Das ändert nichts.
- Gesucht: explizite Formel für $T(n)$.

Drei Kochrezepte, in denen $f(n)$ und $\log_b a$ eine Rolle spielen:

Fall 1: Wenn $f(n) \in \mathrm{O}(n^{(\log_b a)-\varepsilon})$ für ein $\varepsilon > 0$ ist,
dann ist $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$.

Fall 2: Wenn $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$ ist,
dann ist $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n)$.

Fall 3: Wenn $f(n) \in \Omega(n^{(\log_b a)+\varepsilon})$ für ein $\varepsilon > 0$ ist, und
wenn es eine Konstante d gibt mit $0 < d < 1$, so dass
für alle hinreichend großen n gilt $af(n/b) \leq df(n)$,
dann ist $T(n) \in \Theta(f(n))$.

Beispiel Matrixmultipliaktion (1)

- „Problemgröße“ n: die Zeilen- Spaltenzahl.
- Schulmethode:
  - $a = 8$ Multiplikationen
  - von Matrizen der Größe $n/2$: also $b = 2$
  - $\log_b a = \log_2 8 = 3$
  - zusätzlicher Aufwand: 4 kleine Matrixadditionen, also $f(n) = 4 \cdot n^2/4 = n^2$
  - $f(n) \in \mathrm{O}(n^{3-\varepsilon})$ (z. B. für $\varepsilon = 1/2$)
  - Mastertheorem, Fall 1: $T(n) \in \Theta(n^3)$
- Strassen
  - $a = 7$ Multiplikationen
  - von Matrizen der Größe $n/2$: also $b = 2$
  - $\log_b a = \log_2 7 \approx 2.807\ldots$
  - zusätzlicher Aufwand: 18 kleinen Matrixadditionen, also $f(n) = 18 \cdot n^2/4 \in \Theta(n^2)$
  - $f(n) \in \mathrm{O}(n^{\log_b a-\varepsilon}) = \mathrm{O}(n^{\log_2 7-\varepsilon})$ (z. B. für $\varepsilon = 0.1$)
  - Mastertheorem, Fall 1: $T(n) \in \Theta(n^{\log_2 7}) = \Theta(n^{2.807\cdots})$

Beispiel Matrixmultipliaktion (1)

- „Problemgröße“ n: die Zeilen- Spaltenzahl.
- Schulmethode:
  - $a = 8$ Multiplikationen
  - von Matrizen der Größe $n/2$: also $b = 2$
  - $\log_b a = \log_2 8 = 3$
  - zusätzlicher Aufwand: 4 kleine Matrixadditionen, also $f(n) = 4 \cdot n^2/4 = n^2$
  - $f(n) \in \mathrm{O}(n^{3-\varepsilon})$ (z. B. für $\varepsilon = 1/2$)
  - Mastertheorem, Fall 1: $T(n) \in \Theta(n^3)$
- Strassen
  - $a = 7$ Multiplikationen
  - von Matrizen der Größe $n/2$: also $b = 2$
  - $\log_b a = \log_2 7 \approx 2.807\ldots$
  - zusätzlicher Aufwand: 18 kleinen Matrixadditionen, also $f(n) = 18 \cdot n^2/4 \in \Theta(n^2)$
  - $f(n) \in \mathrm{O}(n^{\log_b a-\varepsilon}) = \mathrm{O}(n^{\log_2 7-\varepsilon})$ (z. B. für $\varepsilon = 0.1$)
  - Mastertheorem, Fall 1: $T(n) \in \Theta(n^{\log_2 7}) = \Theta(n^{2.807\cdots})$

Was ist wichtig

Das sollten Sie mitnehmen:

- Mastertheorem: Kochrezepte zum Nachschlagen des asymptotischen Wachstums einfach rekursiv definierter Funktionen

Das sollten Sie üben:

- Mastertheorem anwenden

Zusammenfassung

- Komplexitätsmaße
  - Laufzeitbedarf
  - Speicherplatzbedarf
- Abschätzung asymptotischen Wachstums bis auf konstante Faktoren
  - nach oben mit $\mathrm{O}(\cdot)$
  - nach oben und unten mit $\Theta(\cdot)$
  - nach unten mit $\Omega(\cdot)$
- algorithmisches Prinzip
  - Teile und Herrsche (divide and conquer)
  - am Beispiel Matrixmultiplikation
- Mastertheorem