Grundbegriffe der Informatik

Vorlesung vom 29.10.2008

Thomas Worsch

Universität Karlsruhe, Fakultät für Informatik

Oktober 2008

Plan für heute

Ergänzungen zur Vorlesung vom 22.10.08

- Aussagenlogik: Bindungsstärke von $\neg$, $\wedge$, $\vee$ und $\Rightarrow$
- Aussagenlogik: die Implikation
- Prädikatenlogik: Allquantor und Existenzquantor

Einheit 4: Wörter (und vollständige Induktion)

Bindungsstärke von $\neg$, $\wedge$, $\vee$ und $\Rightarrow$

- Um Klammern zu sparen, legt man z. B. in der Arithmetik Vorrangregeln fest:

$$x \cdot y + z \qquad \text{bedeutet} \qquad (x \cdot y) + z$$

- Analog in der Aussagenlogik:

$$\text{Was soll} \qquad \neg A \wedge B \vee C \Rightarrow D \qquad \text{bedeuten?}$$

- Um Klammern zu sparen, legt man z. B. in der Arithmetik Vorrangregeln fest:

$$x \cdot y + z \qquad \text{bedeutet} \qquad (x \cdot y) + z$$

- Analog in der Aussagenlogik:

$$\text{Was soll} \qquad \neg A \wedge B \vee C \Rightarrow D \qquad \text{bedeuten?}$$

$$(\,(\,(\neg A) \wedge B\,) \vee C\,) \Rightarrow D\ ?$$

- Um Klammern zu sparen, legt man z. B. in der Arithmetik Vorrangregeln fest:

$$x \cdot y + z \qquad \text{bedeutet} \qquad (x \cdot y) + z$$

- Analog in der Aussagenlogik:

$$\text{Was soll} \qquad \neg A \wedge B \vee C \Rightarrow D \qquad \text{bedeuten?}$$

$$(\neg(A \wedge (B \vee (C \Rightarrow D)\,)\,)\,?$$

Bindungsstärke von $\neg$, $\wedge$, $\vee$ und $\Rightarrow$

- Um Klammern zu sparen, legt man z. B. in der Arithmetik Vorrangregeln fest:

$$x \cdot y + z \qquad \text{bedeutet} \qquad (x \cdot y) + z$$

- Analog in der Aussagenlogik:

Was soll $\neg A \wedge B \vee C \Rightarrow D$ bedeuten?

$(\neg(A \wedge B) \vee (C \Rightarrow D))$?

Bindungsstärke von $\neg$, $\wedge$, $\vee$ und $\Rightarrow$

- Um Klammern zu sparen, legt man z. B. in der Arithmetik Vorrangregeln fest:

$$x \cdot y + z \qquad \text{bedeutet} \qquad (x \cdot y) + z$$

- Analog in der Aussagenlogik:

Was soll $\neg A \wedge B \vee C \Rightarrow D$ bedeuten?

$$(\,(\,(\neg A) \wedge B) \vee C) \Rightarrow D\ !$$

- wir vereinbaren:
  - $\neg$ bindet am stärksten
  - $\wedge$ bindet weniger stark
  - $\vee$ bindet noch schwächer
  - $\Rightarrow$ bindet am schwächsten

- Beobachtung: Bei $A \wedge B$ und $A \vee B$ hängt der Wahrheitswert der ganzen Formel
  - nur von den Wahrheitswerten von A und B ab, und
  - nicht davon, worum es in den Aussagen A und B geht.
- Ziel: Bei $A \Rightarrow B$ wollen wir das auch

zur Definition von $\Rightarrow$ (2)

- Wahrheitswert von $A \Rightarrow B$ soll nur von den Wahrheitswerten von A und B abhängen
- und nichts anderem
  (Können Sie sich darauf einlassen?)
- relativ unstrittig (?) ist, was sein soll, wenn A wahr ist:
  - wenn A wahr ist und B falsch, dann soll $A \Rightarrow B$ falsch sein
  - wenn A und B wahr sind, dann soll auch $A \Rightarrow B$ wahr sein

A	B	$A \Rightarrow B$
falsch	falsch	
falsch	wahr	
wahr	falsch	falsch
wahr	wahr	wahr

zur Definition von $\Rightarrow$ (3)

- nun der Fall, dass A falsch ist und B falsch ist
  - z. B. $0 = 1$ und $0 = 3$
  - Man darf die beiden Seiten einer Gleichung mit der gleichen Konstanten multiplizieren.

A	B	$A \Rightarrow B$
falsch	falsch	
falsch	wahr	
wahr	falsch	falsch
wahr	wahr	wahr

zur Definition von $\Rightarrow$ (3)

- nun der Fall, dass A falsch ist und B falsch ist
  - z. B. $0 = 1$ und $0 = 3$
  - Man darf die beiden Seiten einer Gleichung mit der gleichen Konstanten multiplizieren.
  - liefert Beweis, dass $0 = 3$ „logisch" aus $0 = 1$ folgt.

A	B	$A \Rightarrow B$
falsch	falsch	wahr
falsch	wahr	
wahr	falsch	falsch
wahr	wahr	wahr

zur Definition von $\Rightarrow$ (3)

- nun der Fall, dass A falsch ist und B falsch ist
  - z. B. $0 = 1$ und $0 = 3$
  - Man darf die beiden Seiten einer Gleichung mit der gleichen Konstanten multiplizieren.
  - liefert Beweis, dass $0 = 3$ „logisch“ aus $0 = 1$ folgt.
- nun der Fall, dass A falsch ist und B wahr
  - z. B. $0 = 1$ und $1 = 1$
  - wenn $0 = 1$, dann $1 = 0$ und daher $0 + 1 = 1 + 0$, also $1 = 1$

A	B	$A \Rightarrow B$
falsch	falsch	wahr
falsch	wahr	
wahr	falsch	falsch
wahr	wahr	wahr

zur Definition von $\Rightarrow$ (3)

- nun der Fall, dass A falsch ist und B falsch ist
  - z. B. $0 = 1$ und $0 = 3$
  - Man darf die beiden Seiten einer Gleichung mit der gleichen Konstanten multiplizieren.
  - liefert Beweis, dass $0 = 3$ „logisch“ aus $0 = 1$ folgt.
- nun der Fall, dass A falsch ist und B wahr
  - z. B. $0 = 1$ und $1 = 1$
  - wenn $0 = 1$, dann $1 = 0$ und daher $0 + 1 = 1 + 0$, also $1 = 1$
  - liefert Beweis, dass $1 = 1$ „logisch“ aus $0 = 1$ folgt.

A	B	$A \Rightarrow B$
falsch	falsch	wahr
falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
wahr	wahr	wahr

Die Quantoren

- $\forall x\, A(x)$ ist zu lesen als: „Für alle x gilt: $A(x)$“.
- $\exists x\, A(x)$ ist zu lesen als: „Es gibt ein x mit: $A(x)$“.

oder auch

- $\forall x \in M : A(x)$ ist zu lesen als: „Für alle $x \in M$ gilt: $A(x)$“.
- $\exists x \in M : A(x)$ ist zu lesen als: „Es gibt ein $x \in M$ mit: $A(x)$“.

Die Quantoren

- $\forall x\ A(x)$ ist zu lesen als: „Für alle x gilt: $A(x)$“.
- $\exists x\ A(x)$ ist zu lesen als: „Es gibt ein x mit: $A(x)$“.

oder auch

- $\forall x \in M : A(x)$ ist zu lesen als: „Für alle $x \in M$ gilt: $A(x)$“.
- $\exists x \in M : A(x)$ ist zu lesen als: „Es gibt ein $x \in M$ mit: $A(x)$“.

Beispiele:

$$\exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : x \leq y \qquad \text{ist wahr}$$

Die Quantoren

- $\forall x\, A(x)$ ist zu lesen als: „Für alle x gilt: $A(x)$“.
- $\exists x\, A(x)$ ist zu lesen als: „Es gibt ein x mit: $A(x)$“.

oder auch

- $\forall x \in M : A(x)$ ist zu lesen als: „Für alle $x \in M$ gilt: $A(x)$“.
- $\exists x \in M : A(x)$ ist zu lesen als: „Es gibt ein $x \in M$ mit: $A(x)$“.

Beispiele:

$$\exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : x \leq y \qquad \text{ist wahr}$$
$$\exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : y \leq x \qquad \text{ist falsch}$$

Die Quantoren

- $\forall x\, A(x)$ ist zu lesen als: „Für alle x gilt: $A(x)$".
- $\exists x\, A(x)$ ist zu lesen als: „Es gibt ein x mit: $A(x)$".

oder auch

- $\forall x \in M : A(x)$ ist zu lesen als: „Für alle $x \in M$ gilt: $A(x)$".
- $\exists x \in M : A(x)$ ist zu lesen als: „Es gibt ein $x \in M$ mit: $A(x)$".

Beispiele:

$$\begin{aligned} \exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : x \le y &\qquad \text{ist wahr} \\ \exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : y \le x &\qquad \text{ist falsch} \\ \neg\exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : y \le x &\qquad \text{ist wahr} \end{aligned}$$

Die Quantoren

- $\forall x\, A(x)$ ist zu lesen als: „Für alle x gilt: $A(x)$“.
- $\exists x\, A(x)$ ist zu lesen als: „Es gibt ein x mit: $A(x)$“.

oder auch

- $\forall x \in M : A(x)$ ist zu lesen als: „Für alle $x \in M$ gilt: $A(x)$“.
- $\exists x \in M : A(x)$ ist zu lesen als: „Es gibt ein $x \in M$ mit: $A(x)$“.

Beispiele:

$$\begin{array}{rl}
\exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : x \leq y & \text{ist wahr} \\
\exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : y \leq x & \text{ist falsch} \\
\neg\exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : y \leq x & \text{ist wahr} \\
\forall x \in \mathbb{N}_0 : \neg\forall y \in \mathbb{N}_0 : y \leq x & \text{ist wahr}
\end{array}$$

Die Quantoren

- $\forall x\, A(x)$ ist zu lesen als: „Für alle x gilt: $A(x)$“.
- $\exists x\, A(x)$ ist zu lesen als: „Es gibt ein x mit: $A(x)$“.

oder auch

- $\forall x \in M : A(x)$ ist zu lesen als: „Für alle $x \in M$ gilt: $A(x)$“.
- $\exists x \in M : A(x)$ ist zu lesen als: „Es gibt ein $x \in M$ mit: $A(x)$“.

Beispiele:

$$\begin{array}{rl}
\exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : x \leq y & \text{ist wahr} \\
\exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : y \leq x & \text{ist falsch} \\
\neg\exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : y \leq x & \text{ist wahr} \\
\forall x \in \mathbb{N}_0 : \neg\forall y \in \mathbb{N}_0 : y \leq x & \text{ist wahr} \\
\forall x \in \mathbb{N}_0 : \exists y \in \mathbb{N}_0 : \neg(y \leq x) & \text{ist wahr}
\end{array}$$

Die Quantoren

- $\forall x\, A(x)$ ist zu lesen als: „Für alle x gilt: $A(x)$“.
- $\exists x\, A(x)$ ist zu lesen als: „Es gibt ein x mit: $A(x)$“.

oder auch

- $\forall x \in M : A(x)$ ist zu lesen als: „Für alle $x \in M$ gilt: $A(x)$“.
- $\exists x \in M : A(x)$ ist zu lesen als: „Es gibt ein $x \in M$ mit: $A(x)$“.

Beispiele:

$$\begin{array}{rl}
\exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : x \leq y & \text{ist wahr} \\
\exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : y \leq x & \text{ist falsch} \\
\neg\exists x \in \mathbb{N}_0 : \forall y \in \mathbb{N}_0 : y \leq x & \text{ist wahr} \\
\forall x \in \mathbb{N}_0 : \neg\forall y \in \mathbb{N}_0 : y \leq x & \text{ist wahr} \\
\forall x \in \mathbb{N}_0 : \exists y \in \mathbb{N}_0 : \neg(y \leq x) & \text{ist wahr} \\
\forall x \in \mathbb{N}_0 : \exists y \in \mathbb{N}_0 : y > x & \text{ist wahr}
\end{array}$$

Bindungsstärke von Quantoren

Vereinbarung: die Quantoren binden *schwächer* als die binären aussagenlogischen Operatoren.
Also bedeutet

$$\forall x \in M : A(x) \Rightarrow B(x)$$

das gleiche wie

$$\forall x \in M : (A(x) \Rightarrow B(x))$$

Einheit 4: Wörter (und vollständige Induktion)

- Wörter
- insbesondere das leere Wort ε
- Konkatenation von Wörtern
- induktive Definitionen
- vollständige Induktion