

Grundbegriffe der Informatik

Einheit 5: formale Sprachen

Thomas Worsch

Karlsruher Institut für Technologie, Fakultät für Informatik

Wintersemester 2010/2011

Formale Sprachen

Formale Sprachen

Produkt formaler Sprachen

Konkatenationsabschluss formaler Sprachen

- ▶ natürliche Sprache:
 - ▶ Aussprache
 - ▶ Stil, z. B. Wortwahl und Satzbau
 - ▶ Welche Formulierungen sind syntaktisch korrekt?
 - ▶ Ist und syntaktische welcher korrekt nicht?
- ▶ Informatik:
 - ▶ Sprachen, die nicht natürlich sind:
 - ▶ Programmiersprachen
 - ▶ Aufbau von Emails, WWW-Seiten, ...
 - ▶ Eingabedateien für ...
 - ▶ **Syntax**
 - ▶ Wie spezifiziert man, was korrekt ist?
 - ▶ Wie überprüft man, ob etwas korrekt ist?
 - ▶ **Semantik**
 - ▶ Wie definiert man, was syntaktisch korrekte Gebilde bedeuten?
 - ▶ darum kümmern wir uns später

Formale Sprachen

Formale Sprachen

Produkt formaler Sprachen

Konkatenationsabschluss formaler Sprachen

- ▶ Alphabet A gegeben
- ▶ Eine **formale Sprache** (über einem Alphabet A) ist eine Teilmenge $L \subseteq A^*$.
- ▶ im Zusammenhang mit syntaktischer Korrektheit:
 - ▶ formale Sprache L der syntaktisch korrekten Gebilde
 - ▶ syntaktisch falsche Gebilde gehören *nicht* zu L

Beispiele:

- ▶ $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, -\}$.
formale Sprache der Dezimaldarstellungen ganzer Zahlen
 - ▶ enthält z.B. 1, -22 und 192837465,
 - ▶ aber nicht 2-3---41.
- ▶ formale Sprache der syntaktisch korrekten Java-Programme
 - ▶ enthält alle Java-Programme
 - ▶ enthält zum Beispiel *nicht*: `[2] class int)(`

Formale Sprachen

Formale Sprachen

Produkt formaler Sprachen

Konkatenationsabschluss formaler Sprachen

- ▶ kennen schon Konkatination von Wörtern
- ▶ Produkt der Sprachen L_1 und L_2 :

$$L_1 \cdot L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\}$$

- ▶ wegen der Assoziativität der Konkatination von Wörtern auch

$$L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 = \{w_1 w_2 w_3 \mid w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2 \wedge w_3 \in L_3\}$$

usw.

- ▶ den Punkt lässt man auch gerne wieder weg

- ▶ kennen schon Konkatination von Wörtern
- ▶ Produkt der Sprachen L_1 und L_2 :

$$L_1 \cdot L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\}$$

- ▶ wegen der Assoziativität der Konkatination von Wörtern auch

$$L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 = \{w_1 w_2 w_3 \mid w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2 \wedge w_3 \in L_3\}$$

usw.

- ▶ den Punkt lässt man auch gerne wieder weg

- ▶ wenn $L_1 = \{a, aa\}$ und $L_2 = \{b, ab\}$
dann $L_1 \cdot L_2 = \{a, aa\} \cdot \{b, ab\}$
$$= \{a \cdot b, a \cdot ab, aa \cdot b, aa \cdot ab\}$$
$$= \{ab, aab, aaab\}$$
- ▶ wenn $S = \{\text{int}, \text{double}, \text{char}, \dots\}$, $B = \{a, \dots, z\}$ und $Z = \{0, \dots, 9\}$
dann enthält $S \cdot \{_ \} \cdot B \cdot (B \cup Z)^* \cdot \{; \}$
„Deklarationen“ wie z. B.
 - ▶ `int_x42;`
 - ▶ `double_wurzelzwei;`aber leider auch
 - ▶ `int_double;`andererseits aber nicht
 - ▶ `char_hugo_;`

Lemma. Für jede formale Sprache L ist

$$L \cdot \{\varepsilon\} = L = \{\varepsilon\} \cdot L.$$

Beweis durch einfaches Nachrechnen:

$$\begin{aligned} L \cdot \{\varepsilon\} &= \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L \wedge w_2 \in \{\varepsilon\}\} \\ &= \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L \wedge w_2 = \varepsilon\} \\ &= \{w_1 \varepsilon \mid w_1 \in L\} \\ &= \{w_1 \mid w_1 \in L\} \\ &= L \end{aligned}$$

Analog zeigt man $L = \{\varepsilon\} \cdot L$.

Lemma. Für jede formale Sprache L ist

$$L \cdot \{\varepsilon\} = L = \{\varepsilon\} \cdot L.$$

Beweis durch einfaches Nachrechnen:

$$\begin{aligned} L \cdot \{\varepsilon\} &= \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L \wedge w_2 \in \{\varepsilon\}\} \\ &= \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L \wedge w_2 = \varepsilon\} \\ &= \{w_1 \varepsilon \mid w_1 \in L\} \\ &= \{w_1 \mid w_1 \in L\} \\ &= L \end{aligned}$$

Analog zeigt man $L = \{\varepsilon\} \cdot L$.

Lemma. Für jede formale Sprache L ist

$$L \cdot \{\varepsilon\} = L = \{\varepsilon\} \cdot L.$$

Beweis durch einfaches Nachrechnen:

$$\begin{aligned} L \cdot \{\varepsilon\} &= \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L \wedge w_2 \in \{\varepsilon\}\} \\ &= \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L \wedge w_2 = \varepsilon\} \\ &= \{w_1 \varepsilon \mid w_1 \in L\} \\ &= \{w_1 \mid w_1 \in L\} \\ &= L \end{aligned}$$

Analog zeigt man $L = \{\varepsilon\} \cdot L$.

Lemma. Für jede formale Sprache L ist

$$L \cdot \{\varepsilon\} = L = \{\varepsilon\} \cdot L.$$

Beweis durch einfaches Nachrechnen:

$$\begin{aligned} L \cdot \{\varepsilon\} &= \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L \wedge w_2 \in \{\varepsilon\}\} \\ &= \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L \wedge w_2 = \varepsilon\} \\ &= \{w_1 \varepsilon \mid w_1 \in L\} \\ &= \{w_1 \mid w_1 \in L\} \\ &= L \end{aligned}$$

Analog zeigt man $L = \{\varepsilon\} \cdot L$.

Lemma. Für jede formale Sprache L ist

$$L \cdot \{\varepsilon\} = L = \{\varepsilon\} \cdot L.$$

Beweis durch einfaches Nachrechnen:

$$\begin{aligned} L \cdot \{\varepsilon\} &= \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L \wedge w_2 \in \{\varepsilon\}\} \\ &= \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L \wedge w_2 = \varepsilon\} \\ &= \{w_1 \varepsilon \mid w_1 \in L\} \\ &= \{w_1 \mid w_1 \in L\} \\ &= L \end{aligned}$$

Analog zeigt man $L = \{\varepsilon\} \cdot L$.

Lemma. Für jede formale Sprache L ist

$$L \cdot \{\varepsilon\} = L = \{\varepsilon\} \cdot L.$$

Beweis durch einfaches Nachrechnen:

$$\begin{aligned} L \cdot \{\varepsilon\} &= \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L \wedge w_2 \in \{\varepsilon\}\} \\ &= \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L \wedge w_2 = \varepsilon\} \\ &= \{w_1 \varepsilon \mid w_1 \in L\} \\ &= \{w_1 \mid w_1 \in L\} \\ &= L \end{aligned}$$

Analog zeigt man $L = \{\varepsilon\} \cdot L$.

- ▶ wir wollen Potenzen L^k formaler Sprachen definieren
- ▶ „Problem“: Was soll L^0 sein?
- ▶ Definiere:

$$L^0 = \{\varepsilon\}$$
$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : L^{k+1} = L \cdot L^k$$

- ▶ Einfaches Nachrechnen ergibt z. B.:

$$L^1 = L$$

$$L^2 = L \cdot L$$

$$L^3 = L \cdot L \cdot L$$

- ▶ Genau genommen: $L^3 = L \cdot (L \cdot L)$, aber:
Konkatenation von Sprachen ist eine assoziative Operation.

- ▶ wir wollen Potenzen L^k formaler Sprachen definieren
- ▶ „Problem“: Was soll L^0 sein?
- ▶ Definiere:

$$L^0 = \{\varepsilon\}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : L^{k+1} = L \cdot L^k$$

- ▶ Einfaches Nachrechnen ergibt z. B.:

$$L^1 = L$$

$$L^2 = L \cdot L$$

$$L^3 = L \cdot L \cdot L$$

- ▶ Genau genommen: $L^3 = L \cdot (L \cdot L)$, aber:
Konkatenation von Sprachen ist eine assoziative Operation.

- ▶ wir wollen Potenzen L^k formaler Sprachen definieren
- ▶ „Problem“: Was soll L^0 sein?
- ▶ Definiere:

$$L^0 = \{\varepsilon\}$$
$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : L^{k+1} = L \cdot L^k$$

- ▶ Einfaches Nachrechnen ergibt z. B.:

$$L^1 = L$$

$$L^2 = L \cdot L$$

$$L^3 = L \cdot L \cdot L$$

- ▶ Genau genommen: $L^3 = L \cdot (L \cdot L)$, aber:
Konkatenation von Sprachen ist eine assoziative Operation.

- ▶ wir wollen Potenzen L^k formaler Sprachen definieren
- ▶ „Problem“: Was soll L^0 sein?
- ▶ Definiere:

$$L^0 = \{\varepsilon\}$$
$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : L^{k+1} = L \cdot L^k$$

- ▶ Einfaches Nachrechnen ergibt z. B.:

$$L^1 = L$$

$$L^2 = L \cdot L$$

$$L^3 = L \cdot L \cdot L$$

- ▶ Genau genommen: $L^3 = L \cdot (L \cdot L)$, aber:
Konkatenation von Sprachen ist eine assoziative Operation.

- ▶ $L = \{aa, b\}$
- ▶ Dann ist

$$L^0 = \{\varepsilon\}$$

$$L^1 = \{aa, b\}$$

$$\begin{aligned} L^2 &= \{aa, b\} \cdot \{aa, b\} = \{aa \cdot aa, aa \cdot b, b \cdot aa, b \cdot b\} \\ &= \{aaaa, aab, baa, bb\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L^3 &= \{aa \cdot aa \cdot aa, aa \cdot aa \cdot b, aa \cdot b \cdot aa, aa \cdot b \cdot b, \\ &\quad b \cdot aa \cdot aa, b \cdot aa \cdot b, b \cdot b \cdot aa, b \cdot b \cdot b\} \\ &= \{aaaaaa, aaaab, aabaa, aabb, baaaa, baab, bbaa, bbb\} \end{aligned}$$

- ▶ Sei

$$L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_+\},$$

also sozusagen (immer diese Pünktchen ...)

$$L = \{ab, aabb, aaabbb, aaaabbbb, \dots\}.$$

- ▶ Was ist $L^2 = L \cdot L$?



$$\begin{aligned} L^2 = & \{ab \cdot ab, ab \cdot aabb, ab \cdot aaabbb, \dots\} \\ & \cup \{aabb \cdot ab, aabb \cdot aabb, aabb \cdot aaabbb, \dots\} \\ & \cup \{aaaabbb \cdot ab, aaaabbb \cdot aabb, aaaabbb \cdot aaabbb, \dots\} \\ & \vdots \end{aligned}$$

- ▶ Mit anderen Worten

$$L^2 = \{a^{n_1} b^{n_1} a^{n_2} b^{n_2} \mid n_1 \in \mathbb{N}_+ \wedge n_2 \in \mathbb{N}_+\}.$$

- ▶ Beachte: die Exponenten n_1 „vorne“ und n_2 „hinten“ heißen verschieden.

- ▶ Sei

$$L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_+\},$$

also sozusagen (immer diese Pünktchen ...)

$$L = \{ab, aabb, aaabbb, aaaabbbb, \dots\}.$$

- ▶ Was ist $L^2 = L \cdot L$?



$$\begin{aligned} L^2 = & \{ab \cdot ab, ab \cdot aabb, ab \cdot aaabbb, \dots\} \\ & \cup \{aabb \cdot ab, aabb \cdot aabb, aabb \cdot aaabbb, \dots\} \\ & \cup \{aaabbb \cdot ab, aaabbb \cdot aabb, aaabbb \cdot aaabbb, \dots\} \\ & \vdots \end{aligned}$$

- ▶ Mit anderen Worten

$$L^2 = \{a^{n_1} b^{n_1} a^{n_2} b^{n_2} \mid n_1 \in \mathbb{N}_+ \wedge n_2 \in \mathbb{N}_+\}.$$

- ▶ Beachte: die Exponenten n_1 „vorne“ und n_2 „hinten“ heißen verschieden.

- ▶ für Alphabet A und für $i \in \mathbb{N}_0$ hatten wir schon Potenzen A^i definiert.
- ▶ Jedes Alphabet A kann man als formale Sprache L_A auffassen (enthält alle Wörter der Länge 1)
- ▶ Man mache sich klar:
 A^i ist („im Wesentlichen“) das Gleiche wie L_A^i .

Formale Sprachen

Formale Sprachen

Produkt formaler Sprachen

Konkatenationsabschluss formaler Sprachen

- ▶ bei Alphabeten schon gesehen: $A^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} A^i$.

- ▶ der **Konkatenationsabschluss** L^* von L ist

$$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$$

- ▶ der **ε -freie Konkatenationsabschluss** L^+ von L ist

$$L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$$

- ▶ Man sieht:

$$L^* = L^0 \cup L^+ .$$

- ▶ Es sei wieder $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_+\}$.
- ▶ haben schon gesehen:

$$L^2 = \{a^{n_1} b^{n_1} a^{n_2} b^{n_2} \mid n_1 \in \mathbb{N}_+ \wedge n_2 \in \mathbb{N}_+\}.$$

- ▶ analog

$$L^3 = \{a^{n_1} b^{n_1} a^{n_2} b^{n_2} a^{n_3} b^{n_3} \mid n_1 \in \mathbb{N}_+ \wedge n_2 \in \mathbb{N}_+ \wedge n_3 \in \mathbb{N}_+\}.$$

- ▶ wir erlauben uns Pünktchen ...:

$$L^i = \{a^{n_1} b^{n_1} \dots a^{n_i} b^{n_i} \mid n_1, \dots, n_i \in \mathbb{N}_+\}.$$

- ▶ Dann kann man für L^+ notieren:

$$L^+ = \{a^{n_1} b^{n_1} \dots a^{n_i} b^{n_i} \mid i \in \mathbb{N}_+ \wedge n_1, \dots, n_i \in \mathbb{N}_+\}.$$

- ▶ Sie merken (hoffentlich): L^+ und L^* sind *präziser und kürzer* hinzuschreiben als viele Pünktchen.

- ▶ $A = \{a, b\}$
- ▶ $L = \{a\}^* \cup \{b\}^* = \{\epsilon, a, aa, aaa, \dots, b, bb, bbb, \dots\}$
- ▶ Welche Wörter enthält L^* ?
 - ▶ alle Wörter, die man erhält, wenn man
 - ▶ eine beliebige endliche Zahl k
 - ▶ von Wörtern w_1, \dots, w_k aus L
 - ▶ konkateniert zu $w_1 \cdot \dots \cdot w_k$
 - ▶ z. B. $aa \cdot \epsilon \cdot aaaa \cdot b \cdot aaaaa$
 - ▶ z. B. $aa \cdot bbbbbb \cdot aaa \cdot b \cdot aaaaa \cdot bbb \cdot aaa$
 - ▶ jedes Wort aus A^* ist die Konkatenation von Blöcken, die nur aus a oder nur aus b bestehen
 - ▶ also ist $L^* = A^*$

- ▶ $A = \{a, b\}$
- ▶ $L = \{a\}^* \cup \{b\}^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, \dots, b, bb, bbb, \dots\}$
- ▶ Welche Wörter enthält L^* ?
 - ▶ alle Wörter, die man erhält, wenn man
– eine beliebige Anzahl k
– von Wörtern w_1, w_2, \dots, w_k
– konkateniert zu $w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_k$
 - ▶ z. B. $aa \cdot \varepsilon \cdot aaaa \cdot b \cdot aaaaa$
 - ▶ z. B. $aa \cdot bbbbb \cdot aaa \cdot b \cdot aaaaa \cdot bbb \cdot aaa$
 - ▶ jedes Wort aus A^* ist die Konkatenation von Blöcken,
– die nur aus a oder nur aus b bestehen
 - ▶ also ist $L^* = A^*$

- ▶ $A = \{a, b\}$
- ▶ $L = \{a\}^* \cup \{b\}^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, \dots, b, bb, bbb, \dots\}$
- ▶ Welche Wörter enthält L^* ?
 - ▶ alle Wörter, die man erhält, wenn man
 - ▶ eine beliebige endliche Zahl k
 - ▶ von Wörtern w_1, \dots, w_k aus L
 - ▶ konkateniert zu $w_1 \cdot \dots \cdot w_k$
 - ▶ z. B. $aa \cdot \varepsilon \cdot aaaa \cdot b \cdot aaaaa$
 - ▶ z. B. $aa \cdot bbbbb \cdot aaa \cdot b \cdot aaaaa \cdot bbb \cdot aaa$
 - ▶ jedes Wort aus A^* ist die Konkatenation von Blöcken, die nur aus a oder nur aus b bestehen
 - ▶ also ist $L^* = A^*$

- ▶ $A = \{a, b\}$
- ▶ $L = \{a\}^* \cup \{b\}^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, \dots, b, bb, bbb, \dots\}$
- ▶ Welche Wörter enthält L^* ?
 - ▶ alle Wörter, die man erhält, wenn man
 - ▶ eine beliebige endliche Zahl k
 - ▶ von Wörtern w_1, \dots, w_k aus L
 - ▶ konkateniert zu $w_1 \cdots w_k$
 - ▶ z. B. $aa \cdot \varepsilon \cdot aaaa \cdot b \cdot aaaaa$
 - ▶ z. B. $aa \cdot bbbbb \cdot aaa \cdot b \cdot aaaaa \cdot bbb \cdot aaa$
 - ▶ jedes Wort aus A^* ist die Konkatenation von Blöcken, die nur aus a oder nur aus b bestehen
 - ▶ also ist $L^* = A^*$

- ▶ $A = \{a, b\}$
- ▶ $L = \{a\}^* \cup \{b\}^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, \dots, b, bb, bbb, \dots\}$
- ▶ Welche Wörter enthält L^* ?
 - ▶ alle Wörter, die man erhält, wenn man
 - ▶ eine beliebige endliche Zahl k
 - ▶ von Wörtern w_1, \dots, w_k aus L
 - ▶ konkateniert zu $w_1 \cdots w_k$
 - ▶ z. B. $aa \cdot \varepsilon \cdot aaaa \cdot b \cdot aaaaa$
 - ▶ z. B. $aa \cdot bbbbb \cdot aaa \cdot b \cdot aaaaa \cdot bbb \cdot aaa$
 - ▶ jedes Wort aus A^* ist die Konkatenation von Blöcken, die nur aus a oder nur aus b bestehen
 - ▶ also ist $L^* = A^*$

- ▶ $A = \{a, b\}$
- ▶ $L = \{a\}^* \cup \{b\}^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, \dots, b, bb, bbb, \dots\}$
- ▶ Welche Wörter enthält L^* ?
 - ▶ alle Wörter, die man erhält, wenn man
 - ▶ eine beliebige endliche Zahl k
 - ▶ von Wörtern w_1, \dots, w_k aus L
 - ▶ konkateniert zu $w_1 \cdots w_k$
 - ▶ z. B. $aa \cdot \varepsilon \cdot aaaa \cdot b \cdot aaaaa$
 - ▶ z. B. $aa \cdot bbbbb \cdot aaa \cdot b \cdot aaaaa \cdot bbb \cdot aaa$
 - ▶ jedes Wort aus A^* ist die Konkatenation von Blöcken, die nur aus a oder nur aus b bestehen
 - ▶ also ist $L^* = A^*$

- ▶ $A = \{a, b\}$
- ▶ $L = \{a\}^* \cup \{b\}^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, \dots, b, bb, bbb, \dots\}$
- ▶ Welche Wörter enthält L^* ?
 - ▶ alle Wörter, die man erhält, wenn man
 - ▶ eine beliebige endliche Zahl k
 - ▶ von Wörtern w_1, \dots, w_k aus L
 - ▶ konkateniert zu $w_1 \cdots w_k$
 - ▶ z. B. $aa \cdot \varepsilon \cdot aaaa \cdot b \cdot aaaaa$
 - ▶ z. B. $aa \cdot bbbbb \cdot aaa \cdot b \cdot aaaaa \cdot bbb \cdot aaa$
 - ▶ jedes Wort aus A^* ist die Konkatenation von Blöcken, die nur aus a oder nur aus b bestehen
 - ▶ also ist $L^* = A^*$

- ▶ $A = \{a, b\}$
- ▶ $L = \{a\}^* \cup \{b\}^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, \dots, b, bb, bbb, \dots\}$
- ▶ Welche Wörter enthält L^* ?
 - ▶ alle Wörter, die man erhält, wenn man
 - ▶ eine beliebige endliche Zahl k
 - ▶ von Wörtern w_1, \dots, w_k aus L
 - ▶ konkateniert zu $w_1 \cdots w_k$
 - ▶ z. B. $aa \cdot \varepsilon \cdot aaaa \cdot b \cdot aaaaa$
 - ▶ z. B. $aa \cdot bbbbb \cdot aaa \cdot b \cdot aaaaa \cdot bbb \cdot aaa$
 - ▶ jedes Wort aus A^* ist die Konkatenation von Blöcken, die nur aus a oder nur aus b bestehen
 - ▶ also ist $L^* = A^*$

- ▶ $A = \{a, b\}$
- ▶ $L = \{a\}^* \cup \{b\}^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, \dots, b, bb, bbb, \dots\}$
- ▶ Welche Wörter enthält L^* ?
 - ▶ alle Wörter, die man erhält, wenn man
 - ▶ eine beliebige endliche Zahl k
 - ▶ von Wörtern w_1, \dots, w_k aus L
 - ▶ konkateniert zu $w_1 \cdots w_k$
 - ▶ z. B. $aa \cdot \varepsilon \cdot aaaa \cdot b \cdot aaaaa$
 - ▶ z. B. $aa \cdot bbbbb \cdot aaa \cdot b \cdot aaaaa \cdot bbb \cdot aaa$
 - ▶ jedes Wort aus A^* ist die Konkatenation von Blöcken, die nur aus a oder nur aus b bestehen
 - ▶ also ist $L^* = A^*$

- ▶ $A = \{a, b\}$
- ▶ $L = \{a\}^* \cup \{b\}^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, \dots, b, bb, bbb, \dots\}$
- ▶ Welche Wörter enthält L^* ?
 - ▶ alle Wörter, die man erhält, wenn man
 - ▶ eine beliebige endliche Zahl k
 - ▶ von Wörtern w_1, \dots, w_k aus L
 - ▶ konkateniert zu $w_1 \cdots w_k$
 - ▶ z. B. $aa \cdot \varepsilon \cdot aaaa \cdot b \cdot aaaaa$
 - ▶ z. B. $aa \cdot bbbbb \cdot aaa \cdot b \cdot aaaaa \cdot bbb \cdot aaa$
 - ▶ jedes Wort aus A^* ist die Konkatenation von Blöcken, die nur aus a oder nur aus b bestehen
 - ▶ also ist $L^* = A^*$

- ▶ $A = \{a, b\}$
- ▶ $L = \{a\}^* \cup \{b\}^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, \dots, b, bb, bbb, \dots\}$
- ▶ Welche Wörter enthält L^* ?
 - ▶ alle Wörter, die man erhält, wenn man
 - ▶ eine beliebige endliche Zahl k
 - ▶ von Wörtern w_1, \dots, w_k aus L
 - ▶ konkateniert zu $w_1 \cdots w_k$
 - ▶ z. B. $aa \cdot \varepsilon \cdot aaaa \cdot b \cdot aaaaa$
 - ▶ z. B. $aa \cdot bbbbb \cdot aaa \cdot b \cdot aaaaa \cdot bbb \cdot aaa$
 - ▶ jedes Wort aus A^* ist die Konkatenation von Blöcken, die nur aus a oder nur aus b bestehen
 - ▶ also ist $L^* = A^*$

- ▶ Die Bezeichnung ε -freier Konkatenationsabschluss für L^+ ist irreführend.
 - ▶ Wie steht es um das leere Wort bei L^+ und L^* ?
 - ▶ Klar ist:

$$\varepsilon \in L^0 \subseteq L^*$$

- ▶ Aber: $L = L^1 \subseteq L^+$,
wenn also $\varepsilon \in L$, dann auch $\varepsilon \in L^+$.
- ▶ Beachte

$$\{\}^* = \{\varepsilon\}$$

- ▶ Die Bezeichnung ε -freier Konkatenationsabschluss für L^+ ist irreführend.
 - ▶ Wie steht es um das leere Wort bei L^+ und L^* ?
 - ▶ Klar ist:

$$\varepsilon \in L^0 \subseteq L^*$$

- ▶ Aber: $L = L^1 \subseteq L^+$,
wenn also $\varepsilon \in L$, dann auch $\varepsilon \in L^+$.
- ▶ Beachte

$$\{\}^* = \{\varepsilon\}$$

Das sollten Sie mitnehmen:

- ▶ was **formale Sprachen** sind,
- ▶ wie ihr **Produkt** definiert ist und
- ▶ wie **Konkatenationsabschluss** und ε -freier **Konkatenationsabschluss** definiert sind.

Das sollten Sie üben:

- ▶ Erkennen von Strukturen der Form L^* , L^+ , L_1L_2
- ▶ Lesen von Ausdrücken der Form $(L_1^+L_2)^*$ usw.
- ▶ „Rechnen“ mit formalen Sprachen