Grundbegriffe der Informatik

Einheit 13: Quantitative Aspekte von Algorithmen

Thomas Worsch

Karlsruher Institut für Technologie, Fakultät für Informatik

Wintersemester 2010/2011

Überblick

Ressourcenverbrauch bei Berechnungen

Groß-O-Notation

- Ignorieren konstanter Faktoren
- Notation für obere und untere Schranken des Wachstums
- Eine furchtbare Schreibweise
- Rechnen im O-Kalkül

Matrixmultiplikation

- Rückblick auf die Schulmethode
- Algorithmus von Strassen

Asymptotisches Verhalten „implizit“ definierter Funktionen

- Laufzeit von Teile-und-Herrsche-Algorithmen
- Ineinander geschachtelte Schleifen

Ressourcenverbrauch bei Berechnungen

- Groß-O-Notation
  - Ignorieren konstanter Faktoren
  - Notation für obere und untere Schranken des Wachstums
  - Eine furchtbare Schreibweise
  - Rechnen im O-Kalkül
- Matrixmultiplikation
  - Rückblick auf die Schulmethode
  - Algorithmus von Strassen
- Asymptotisches Verhalten „implizit“ definierter Funktionen
  - Laufzeit von Teile-und-Herrsche-Algorithmen
  - Ineinander geschachtelte Schleifen

Zählen arithmetischer Operationen

Einheit über Graphalgorithmen:

- Zählen elementarer arithmetischer Operationen
  - für Addition von $n \times n$-Matrizen: n^2
  - für Multiplikation von $n \times n$-Matrizen $2n^3 - n^2$
  - für Berechnung der Wegematrix $n^5 - \frac{3}{2}n^4 + \frac{3}{2}n^3 + n^2$
  - oder weniger ...
- Idee: Das hat was mit der Laufzeit der Algorithmen zu tun.

Ressourcen für Rechnungen

- Laufzeit/Rechenzeit
- Speicherplatzbedarf
  - insbesondere für „Zwischenergebnisse“
- das sind sogenannte *Komplexitätsmaße*
  - im Sinne von *computational complexity*
  - tauchen an vielen Stellen wieder auf
  - es gibt auch noch andere ...

In dieser Einheit

- wichtiges Handwerkszeug zum
  - Reden über und
  - Ausrechnen von

  z. B. Laufzeiten
- insbesondere: „kontrollierte Ungenauigkeiten“
  - „Groß-O“: stammt von Bachmann (oder früher), von Landau bekannt gemacht
  - Ω, Θ: von Knuth zumindest verbreitet
- nicht genau,
  - weil man nicht will
  - weil man nicht kann

  ein Beispiel kommt gleich . . .

Beispiel Insertionsort

```
public class InsertionSort {
    public static void sort(long[] a) {
        for (int i ← 1;  i < a.length;  i++) {
            insert(a, i);
        }
    }
    private static void insert(long[] a, int idx) {
        int i ← idx;
        // Tausche a[idx] nach links bis es einsortiert ist
        while (i > 0 ∧ a[i − 1] > a[i]) {
            // Feldelemente a[i − 1] und a[i] vertauschen
            a[i − 1] ↔ a[i];
            i − −;
        }
    }
}
```

Beispiel Insertionsort (2)

Wie oft wird die **while**-Schleife in der Methode *insert* ausgeführt?

- hängt von der Problemgröße $n = a.length$ ab
- aber nicht nur davon, sondern
- auch von der konkreten Probleminstanz
  - Wenn Array a anfangs an sortiert:
    while-Schleife wird überhaupt nicht ausgeführt.
  - Wenn Array a anfangs in entgegengesetzter Richtung sortiert:
    Schleifenrumpf wird $\sum_{i=1}^{n-1} i = n(n-1)/2$ mal ausgeführt.

Wie beschreibt man den Ressourcenverbrauch?

- für jede Probleminstanz einzeln:
  - präzise aber oft unpraktikabel
- gröber: nur in Abhängigkeit von der „Problemgröße“
- Frage: Was angeben, wenn Ressourcenverbrauch für verschiedene Instanzen gleicher Größe unterschiedlich?
  - bester Fall? (best case)
    - oft total uninteressant
  - Durchschnitt? (average case)
    - oft sehr schwer
  - schlechtester Fall? (worst case)
    - oft angegeben
    - mit dem „Hinweis“, dass es auch besser sein kann . . .

Wie beschreibt man den Ressourcenverbrauch?

- für jede Probleminstanz einzeln:
  - präzise aber oft unpraktikabel
- gröber: nur in Abhängigkeit von der „Problemgröße“
- Frage: Was angeben, wenn Ressourcenverbrauch für verschiedene Instanzen gleicher Größe unterschiedlich?
  - bester Fall? (best case)
    - oft total uninteressant
  - Durchschnitt? (average case)
    - oft sehr schwer
  - schlechtester Fall? (worst case)
    - oft angegeben
    - mit dem „Hinweis“, dass es auch besser sein kann . . .

Wie beschreibt man den Ressourcenverbrauch?

- für jede Probleminstanz einzeln:
  - präzise aber oft unpraktikabel
- gröber: nur in Abhängigkeit von der „Problemgröße“
- Frage: Was angeben, wenn Ressourcenverbrauch für verschiedene Instanzen gleicher Größe unterschiedlich?
  - bester Fall? (best case)
    - oft total uninteressant
  - Durchschnitt? (average case)
    - oft sehr schwer
  - schlechtester Fall? (worst case)
    - oft angegeben
    - mit dem „Hinweis“, dass es auch besser sein kann . . .

Wie beschreibt man den Ressourcenverbrauch?

- für jede Probleminstanz einzeln:
  - präzise aber oft unpraktikabel
- gröber: nur in Abhängigkeit von der „Problemgröße“
- Frage: Was angeben, wenn Ressourcenverbrauch für verschiedene Instanzen gleicher Größe unterschiedlich?
  - bester Fall? (best case)
    - oft total uninteressant
  - Durchschnitt? (average case)
    - oft sehr schwer
  - schlechtester Fall? (worst case)
    - oft angegeben
    - mit dem „Hinweis“, dass es auch besser sein kann ...

Was ist wichtig

Das sollten Sie mitnehmen:

- Bedarf an
  - Rechenzeit und
  - Speicherplatzbedarf

  wichtige Komplexitätsmaße
- Meist will/kann man nur die Abhängigkeit von der Problemgröße quantifizieren
  - üblicherweise den schlimmsten Fall (worst case)
  - gelegentlich einen mittleren Fall (average case)

Das sollten Sie üben:

- Abschätzen/ausrechnen wie oft ein Programmstück, z. B. ein Schleifenrumpf, durchlaufen wird.

Überblick

Warum keine exakten Angaben?

- Man will nicht.
  - Faulheit
  - Vergänglichkeit der genauen Werte
    - Prozessor bald höher getaktet
    - Prozessor bald mit schnellerer Architektur
  - mangelndes Interesse an genauen Werten
    - will nur prozessorunabhängige Aussagen
- Man kann nicht.
  - Dummheit
  - Unwissenheit der genauen Randbedingungen
    - welcher Prozessor?
  - Ungenauigkeiten bei der Formulierung des Algorithmus (äh)
    - unabhängig von Programmiersprache
- Man „soll“ nicht.
  - nur vergröbernde Angaben in Abhängigkeit von Problemgröße

Warum keine exakten Angaben?

- Man will nicht.
  - Faulheit
  - Vergänglichkeit der genauen Werte
    - Prozessor bald höher getaktet
    - Prozessor bald mit schnellerer Architektur
  - mangelndes Interesse an genauen Werten
    - will nur prozessorunabhängige Aussagen
- Man kann nicht.
  - Dummheit
  - Unwissenheit der genauen Randbedingungen
    - welcher Prozessor?
  - Ungenauigkeiten bei der Formulierung des Algorithmus (äh)
    - unabhängig von Programmiersprache
- Man „soll“ nicht.
  - nur vergröbernde Angaben in Abhängigkeit von Problemgröße

Warum keine exakten Angaben?

- Man will nicht.
  - Faulheit
  - Vergänglichkeit der genauen Werte
    - Prozessor bald höher getaktet
    - Prozessor bald mit schnellerer Architektur
  - mangelndes Interesse an genauen Werten
    - will nur prozessorunabhängige Aussagen
- Man kann nicht.
  - Dummheit
  - Unwissenheit der genauen Randbedingungen
    - welcher Prozessor?
  - Ungenauigkeiten bei der Formulierung des Algorithmus (äh)
    - unabhängig von Programmiersprache
- Man „soll“ nicht.
  - nur vergröbernde Angaben in Abhängigkeit von Problemgröße

Warum keine exakten Angaben?

- Man will nicht.
  - Faulheit
  - Vergänglichkeit der genauen Werte
    - Prozessor bald höher getaktet
    - Prozessor bald mit schnellerer Architektur
  - mangelndes Interesse an genauen Werten
    - will nur prozessorunabhängige Aussagen
- Man kann nicht.
  - Dummheit
  - Unwissenheit der genauen Randbedingungen
    - welcher Prozessor?
  - Ungenauigkeiten bei der Formulierung des Algorithmus (äh)
    - unabhängig von Programmiersprache
- Man „soll“ nicht.
  - nur vergröbernde Angaben in Abhängigkeit von Problemgröße

Wie ungenau wollen wir über Funktionen reden?

- Ignorieren konstanter Faktoren
  - Motivation: Geschwindigkeitssteigerungen bei Prozessoren irrelevant
- nur obere (bzw. untere) Schranken
  - Motivation: können nur schlechtesten Fall analysieren

Überblick

Zu Notation und Redeweise

- Notation:
  - $\mathbb{R}_+$: Menge der positiven reellen Zahlen (*ohne* 0)
  - $\mathbb{R}_0^+$: Menge der nichtnegativen rellen Zahlen, $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.
  - betrachten Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$.
- Redeweisen:
  - *asymptotisches Wachstum* oder
  - *größenordnungsmäßiges Wachstum* von Funktionen
- Definition:
  - Funktion $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ wächst asymptotisch genauso schnell wie Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$, wenn gilt:

$$\exists c, c' \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : cf(n) \leq g(n) \leq c'f(n) .$$

  - schreibe $f \asymp g$ oder $f(n) \asymp g(n)$

Zu Notation und Redeweise

- Notation:
  - $\mathbb{R}_+$: Menge der positiven reellen Zahlen (*ohne* 0)
  - $\mathbb{R}_0^+$: Menge der nichtnegativen rellen Zahlen, $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.
  - betrachten Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$.
- Redeweisen:
  - *asymptotisches Wachstum* oder
  - *größenordnungsmäßiges Wachstum* von Funktionen
- Definition:
  - Funktion $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ wächst asymptotisch genauso schnell wie Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$, wenn gilt:

$$\exists c, c' \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : cf(n) \leq g(n) \leq c'f(n) .$$

  - schreibe $f \asymp g$ oder $f(n) \asymp g(n)$

Zu Notation und Redeweise

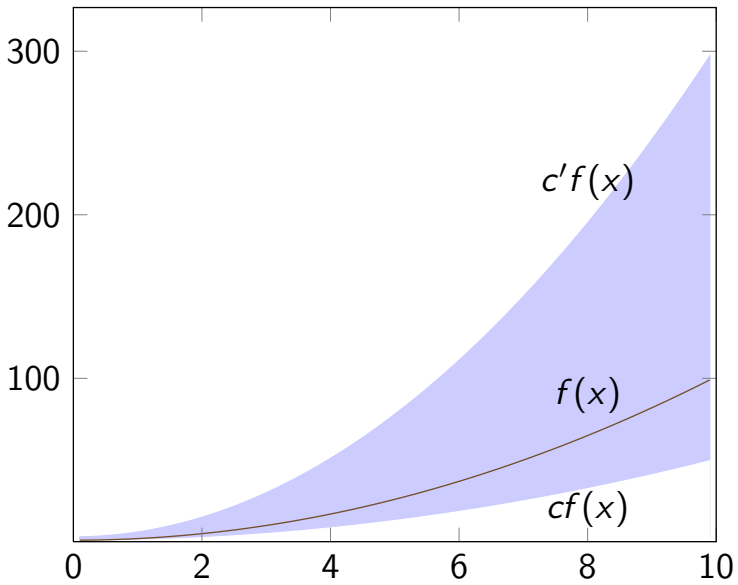
- Notation:
  - $\mathbb{R}_+$: Menge der positiven reellen Zahlen (*ohne* 0)
  - $\mathbb{R}_0^+$: Menge der nichtnegativen rellen Zahlen, $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.
  - betrachten Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$.
- Redeweisen:
  - *asymptotisches Wachstum* oder
  - *größenordnungsmäßiges Wachstum* von Funktionen
- Definition:
  - Funktion $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ wächst asymptotisch genauso schnell wie Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$, wenn gilt:

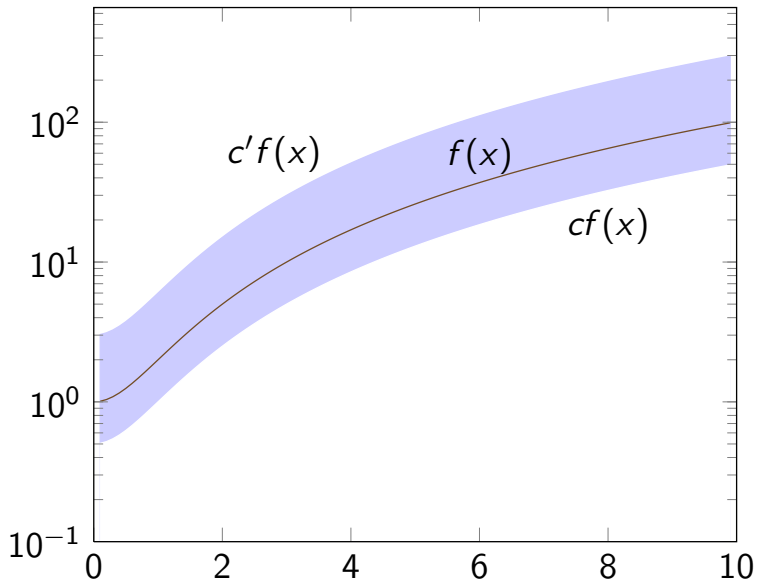
$$\exists c, c' \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : cf(n) \leq g(n) \leq c'f(n) \,.$$

  - schreibe $f \asymp g$ oder $f(n) \asymp g(n)$

Erläuterungen zur Definition von $f \asymp g$ (1)

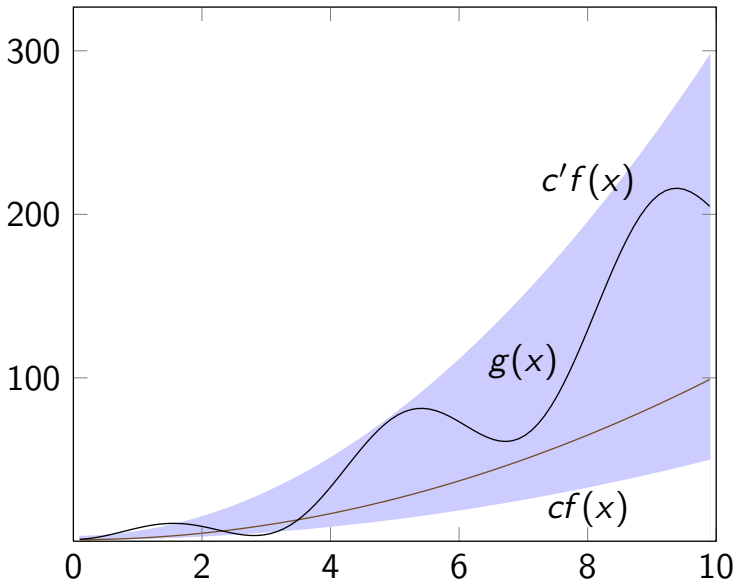
$$\exists c, c' \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : cf(n) \leq g(n) \leq c'f(n)$$

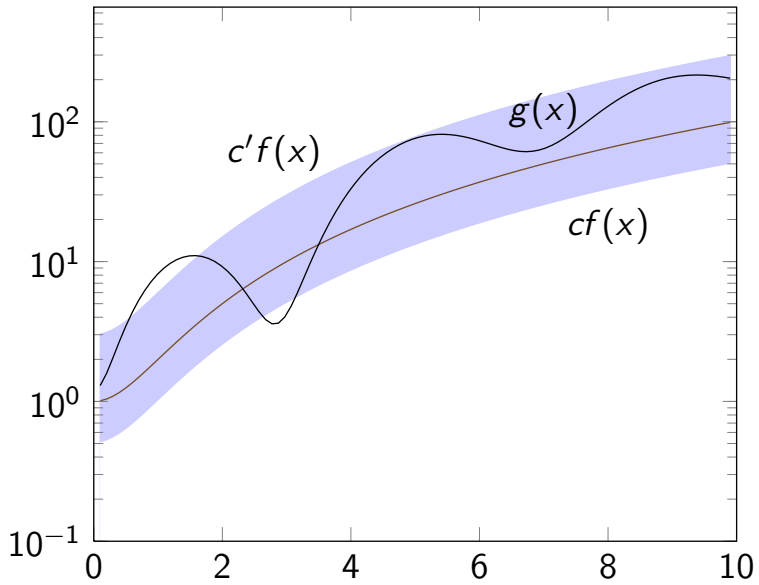




Erläuterungen zur Definition von $f \asymp g$ (2)

$$\exists c, c' \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : cf(n) \leq g(n) \leq c'f(n)$$





Beispiel

- $f(n) = 3n^2$ und $g(n) = 10^{-2}n^2$.
- Behauptung: $f(n) \asymp g(n)$
  - $cf(n) \leq g(n)$: für $c = 10^{-3}$ und $n_0 = 0$ gilt

$$\forall n \geq n_0 : cf(n) = 10^{-3} \cdot 3n^2 \leq 10^{-2}n^2 = g(n)$$

  - $g(n) \leq c'f(n)$ gilt z. B. für $c' = 1$ und $n_0 = 0$:

$$\forall n \geq n_0 : g(n) = 10^{-2}n^2 \leq 3n^2 = c'f(n)$$

Das lässt sich leicht etwas allgemeiner rechnen. Dann sieht man:

Rechenregel

Für alle $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ gilt:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+ : af(n) \asymp bf(n)$$

Beispiel

- $f(n) = 3n^2$ und $g(n) = 10^{-2}n^2$.
- Behauptung: $f(n) \asymp g(n)$
  - $cf(n) \leq g(n)$: für $c = 10^{-3}$ und $n_0 = 0$ gilt

$$\forall n \geq n_0 : cf(n) = 10^{-3} \cdot 3n^2 \leq 10^{-2}n^2 = g(n)$$

  - $g(n) \leq c'f(n)$ gilt z. B. für $c' = 1$ und $n_0 = 0$:

$$\forall n \geq n_0 : g(n) = 10^{-2}n^2 \leq 3n^2 = c'f(n)$$

Das lässt sich leicht etwas allgemeiner rechnen. Dann sieht man:

Rechenregel

Für alle $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ gilt:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+ : af(n) \asymp bf(n)$$

Beispiel

- $f(n) = 3n^2$ und $g(n) = 10^{-2}n^2$.
- Behauptung: $f(n) \asymp g(n)$
  - $cf(n) \leq g(n)$: für $c = 10^{-3}$ und $n_0 = 0$ gilt

$$\forall n \geq n_0 : cf(n) = 10^{-3} \cdot 3n^2 \leq 10^{-2}n^2 = g(n)$$

  - $g(n) \leq c'f(n)$ gilt z. B. für $c' = 1$ und $n_0 = 0$:

$$\forall n \geq n_0 : g(n) = 10^{-2}n^2 \leq 3n^2 = c'f(n)$$

Das lässt sich leicht etwas allgemeiner rechnen. Dann sieht man:

Rechenregel

Für alle $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ gilt:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+ : af(n) \asymp bf(n)$$

Beispiel (2)

- $f(n) = n^3 + 5n^2$ und $g(n) = 3n^3 - n$
- Behauptung $f(n) \asymp g(n)$
  - einerseits ist für $n \geq 0$ offensichtlich

$$\begin{aligned} f(n) &= n^3 + 5n^2 \\ &\leq n^3 + 5n^3 \\ &= 6n^3 \\ &= 9n^3 - 3n^3 \\ &\leq 9n^3 - 3n \\ &= 3(3n^3 - n) = 3g(n) \end{aligned}$$

$$\text{also} \qquad \frac{1}{3} f(n) \leq g(n)$$

  - Andererseits ist

$$g(n) = 3n^3 - n \leq 3n^3 \leq 3(n^3 + 5n^2) = 3f(n)$$

Beispiel (2)

- $f(n) = n^3 + 5n^2$ und $g(n) = 3n^3 - n$
- Behauptung $f(n) \asymp g(n)$
  - einerseits ist für $n \geq 0$ offensichtlich

$$\begin{aligned} f(n) &= n^3 + 5n^2 \\ &\leq n^3 + 5n^3 \\ &= 6n^3 \\ &= 9n^3 - 3n^3 \\ &\leq 9n^3 - 3n \\ &= 3(3n^3 - n) = 3g(n) \end{aligned}$$

$$\text{also} \qquad \frac{1}{3} f(n) \leq g(n)$$

  - Andererseits ist

$$g(n) = 3n^3 - n \leq 3n^3 \leq 3(n^3 + 5n^2) = 3f(n)$$

„Nichtbeispiele“ für $\asymp$ (1)

- betrachte $f(n) = n^2$ und $g(n) = n^3$
- Behauptung: $f \not\asymp g$
- Begründung:
  - insbesondere müsste sonst $g(n) \leq c' f(n)$ gelten (für ...)
  - für $f(n) \neq 0$ äquivalent zu $g(n)/f(n) \leq c'$
  - Das müste also für ein $c' \in \mathbb{R}_+$ ab einem n_0 für alle n gelten.
  - Aber $g(n)/f(n) = n$ kann durch keine Konstante beschränkt werden.

„Nichtbeispiele“ für $\asymp$ (1)

- betrachte $f(n) = n^2$ und $g(n) = n^3$
- Behauptung: $f \not\asymp g$
- Begründung:
  - insbesondere müsste sonst $g(n) \leq c' f(n)$ gelten (für ...)
  - für $f(n) \neq 0$ äquivalent zu $g(n)/f(n) \leq c'$
  - Das müste also für ein $c' \in \mathbb{R}_+$ ab einem n_0 für alle n gelten.
  - Aber $g(n)/f(n) = n$ kann durch keine Konstante beschränkt werden.

„Nichtbeispiele“ für $\asymp$ (1)

- betrachte $f(n) = n^2$ und $g(n) = n^3$
- Behauptung: $f \not\asymp g$
- Begründung:
  - insbesondere müsste sonst $g(n) \leq c' f(n)$ gelten (für ...)
  - für $f(n) \neq 0$ äquivalent zu $g(n)/f(n) \leq c'$
  - Das müste also für ein $c' \in \mathbb{R}_+$ ab einem n_0 für alle n gelten.
  - Aber $g(n)/f(n) = n$ kann durch keine Konstante beschränkt werden.

„Nichtbeispiele“ für $\asymp$ (1)

- betrachte $f(n) = n^2$ und $g(n) = n^3$
- Behauptung: $f \not\asymp g$
- Begründung:
  - insbesondere müsste sonst $g(n) \leq c' f(n)$ gelten (für ...)
  - für $f(n) \neq 0$ äquivalent zu $g(n)/f(n) \leq c'$
  - Das müste also für ein $c' \in \mathbb{R}_+$ ab einem n_0 für alle n gelten.
  - Aber $g(n)/f(n) = n$ kann durch keine Konstante beschränkt werden.

„Nichtbeispiele“ für $\asymp$ (2)

- betrachte $f(n) = n^2$ und $g(n) = 2^n$
- Behauptung: $f \not\asymp g$
- Begründung:
  - für $f \asymp g$ müsste insbesondere $g(n)/f(n) \leq c'$ gelten (für ...)
  - Aber $2^n/n^2$ kann durch keine Konstante beschränkt werden:
    - einfache Grenzwertbetrachtung, oder
    - betrachte die $n_i = 2^{i+2}$ und zeige durch Induktion:

$$\forall i \in \mathbb{N}_0 : 2^{n_i} \geq 4^i n_i^2$$

Äquivalenzrelation $\asymp$

- Zeichen $\asymp$ erinnert an das Gleichheitszeichen.
- Das ist Absicht: Relation $\asymp$ hat wichtige Eigenschaften:

Lemma

Die Relation $\asymp$ ist eine Äquivalenzrelation.

Zur Erinnerung: Eine Äquivalenzrelation ist per definitionem

- reflexiv,
- symmetrisch,
- transitiv.

Äquivalenzrelation $\asymp$: Beweis (1)

- *Reflexitvität*: $f \asymp f$
  denn man für $c = c' = 1$ und $n_0 = 0$ gilt:
  für $n \geq n_0$ ist $cf(n) \leq f(n) \leq c'f(n)$
- *Symmetrie:* Wenn $f \asymp g$, dann auch $g \asymp f$
  Wenn für Konstanten $c, c' \in \mathbb{R}_+$, $n_0 \in \mathbb{N}_0$ und alle $n \geq n_0$

$$cf(n) \leq g(n) \leq c'f(n) \ ,$$

  dann gilt für die gleichen $n \geq n_0$ und
  die Konstanten $d = 1/c$ und $d' = 1/c'$:

$$d'g(n) \leq f(n) \leq dg(n) \ .$$

Äquivalenzrelation $\asymp$: Beweis (1)

- *Reflexitvität*: $f \asymp f$
  denn man für $c = c' = 1$ und $n_0 = 0$ gilt:
  für $n \geq n_0$ ist $cf(n) \leq f(n) \leq c'f(n)$
- *Symmetrie:* Wenn $f \asymp g$, dann auch $g \asymp f$
  Wenn für Konstanten $c, c' \in \mathbb{R}_+$, $n_0 \in \mathbb{N}_0$ und alle $n \geq n_0$

$$cf(n) \leq g(n) \leq c'f(n) \ ,$$

  dann gilt für die gleichen $n \geq n_0$ und
  die Konstanten $d = 1/c$ und $d' = 1/c'$:

$$d'g(n) \leq f(n) \leq dg(n) \ .$$

Äquivalenzrelation $\asymp$: Beweis (1)

- *Reflexitvität*: $f \asymp f$
  denn man für $c = c' = 1$ und $n_0 = 0$ gilt:
  für $n \geq n_0$ ist $cf(n) \leq f(n) \leq c'f(n)$
- *Symmetrie:* Wenn $f \asymp g$, dann auch $g \asymp f$
  Wenn für Konstanten $c, c' \in \mathbb{R}_+$, $n_0 \in \mathbb{N}_0$ und alle $n \geq n_0$

$$cf(n) \leq g(n) \leq c'f(n) \ ,$$

  dann gilt für die gleichen $n \geq n_0$ und
  die Konstanten $d = 1/c$ und $d' = 1/c'$:

$$d'g(n) \leq f(n) \leq dg(n) \ .$$

Äquivalenzrelation $\asymp$: Beweis (1)

- *Reflexitvität*: $f \asymp f$
  denn man für $c = c' = 1$ und $n_0 = 0$ gilt:
  für $n \geq n_0$ ist $cf(n) \leq f(n) \leq c'f(n)$
- *Symmetrie:* Wenn $f \asymp g$, dann auch $g \asymp f$
  Wenn für Konstanten $c, c' \in \mathbb{R}_+$, $n_0 \in \mathbb{N}_0$ und alle $n \geq n_0$

$$cf(n) \leq g(n) \leq c'f(n) \ ,$$

  dann gilt für die gleichen $n \geq n_0$ und
  die Konstanten $d = 1/c$ und $d' = 1/c'$:

$$d'g(n) \leq f(n) \leq dg(n) \ .$$

Äquivalenzrelation $\asymp$: Beweis (2)

- *Transitivität:* wenn $f \asymp g$ und $g \asymp h$, dann $f \asymp h$.
  gelte für Konstanten $c, c' \in \mathbb{R}_+$ und alle $n \geq n_0$

$$cf(n) \leq g(n) \leq c'f(n)$$

und für Konstanten $d, d' \in \mathbb{R}_+$ und alle $n \geq n_1$

$$dg(n) \leq h(n) \leq d'g(n) \ .$$

Dann gilt für alle $n \geq \max(n_0, n_1)$

$$dcf(n) \leq dg(n) \leq h(n) \leq d'g(n) \leq d'c'f(n) \ ,$$

wobei auch die Konstanten dc und $d'c'$ wieder positiv sind.

Groß-Θ

- $\Theta(f)$: Menge aller Funktionen, die zu einer gegebenen Funktion $f(n)$ im Sinne von $\asymp$ äquivalent sind
- Also:

$$\begin{aligned}\Theta(f(n)) &= \{g(n) \mid f(n) \asymp g(n)\} \\ &= \{g(n) \mid \exists c, c' \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : \\ &\qquad cf(n) \leq g(n) \leq c'f(n)\}\end{aligned}$$

Rechenregel

Für alle $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ und alle Konstanten $a, b \in \mathbb{R}_+$ gilt:

$$\Theta\left(af(n)\right) = \Theta\left(bf(n)\right) \ .$$

Obere und untere Schranken

- Manchmal kennt man eine Funktion nicht mal bis auf einen konstanten Faktor, sondern nur obere (oder/und untere) Schranken.
  - Erinnerung: Anzahl Schleifendurchläufe bei Insertionsort
- Definition:
  - $\mathrm{O}(f) = \{g \mid \exists c \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : g(n) \leq cf(n)\}$
  - $\Omega(f) = \{g \mid \exists c \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : g(n) \geq cf(n)\}$
- gelegentlich auch

$$g \preceq f \quad \text{falls} \quad g \in \mathrm{O}(f)$$
$$g \succeq f \quad \text{falls} \quad g \in \Omega(f)$$

- Redeweise
  - g wächst asymptotisch höchstens so schnell wie f (falls $g \preceq f$)
  - g wächst asymptotisch mindestens so schnell wie f (falls $g \succeq f$)

Beispiel (1)

- Es sei $g(n) = 10^{90} n^7$ und $f(n) = 10^{-90} n^8$
- Behauptung: $g(n) \in \mathrm{O}(f(n))$
- Begründung:
  - wähle $c = 10^{180}$ und $n_0 = 0$
  - dann für alle $n \geq 0$: $10^{90} n^7 \leq c \cdot 10^{-90} n^8$.
- Man sieht: In $\mathrm{O}(\cdot)$ usw. können *große* Konstanten stecken.
- Deswegen: Ob z. B. Algorithmus mit Laufzeit in $\mathrm{O}(n^8)$ in der Praxis wirklich tauglich ist, hängt durchaus von der Konstante c bei der oberen Schranke cn^8 ab.
  - $c = 10^{-90}$ dürfte okay sein,
  - $c = 10^{90}$ vermutlich nicht.

Beispiel (1)

- Es sei $g(n) = 10^{90} n^7$ und $f(n) = 10^{-90} n^8$
- Behauptung: $g(n) \in \mathrm{O}(f(n))$
- Begründung:
  - wähle $c = 10^{180}$ und $n_0 = 0$
  - dann für alle $n \geq 0$: $10^{90} n^7 \leq c \cdot 10^{-90} n^8$.
- Man sieht: In $\mathrm{O}(\cdot)$ usw. können *große* Konstanten stecken.
- Deswegen: Ob z. B. Algorithmus mit Laufzeit in $\mathrm{O}(n^8)$ in der Praxis wirklich tauglich ist, hängt durchaus von der Konstante c bei der oberen Schranke cn^8 ab.
  - $c = 10^{-90}$ dürfte okay sein,
  - $c = 10^{90}$ vermutlich nicht.

Beispiel (2)

- Was ist $\mathrm{O}(1)$?
- Definition: alle Funktionen $g(n)$, für die es $c \in \mathbb{R}_+$ und $n_0 \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$g(n) \leq c \cdot 1 = c$$

- alle Funktionen, die durch eine Konstante beschränkbar sind
  - Dazu gehören etwa alle konstanten Funktionen,
  - aber auch Funktionen wie $3 + \sin(n)$
    (So etwas habe ich aber noch nie eine Rolle spielen sehen.)

Beispiel (3)

- vorne: er Quotient n^2/n nicht für alle hinreichend großen n durch eine Konstante beschränkbar
- Also gilt *nicht* $n^2 \preceq n$.
- Andererseits gilt $n \preceq n^2$.
- Die Relation $\preceq$ ist also *nicht* symmetrisch.
- Allgemein für positive reelle Konstanten $0 < a < b$:

$$n^a \preceq n^b \qquad \text{aber} \qquad n^b \not\preceq n^a$$

also

$$n^a \in \mathrm{O}\left(n^b\right) \qquad \text{aber} \qquad n^b \notin \mathrm{O}\left(n^a\right)$$

also

$$n^b \in \Omega\left(n^a\right) \qquad \text{aber} \qquad n^a \notin \Omega\left(n^b\right)$$

Beispiel (4)

- vorne: er Quotient $2^n/n^2$ nicht für alle hinreichend großen n durch eine Konstante beschränkbar
- Also gilt *nicht* $2^n \preceq n^2$.
- Andererseits gilt $n^2 \preceq 2^n$.
- Allgemein für reelle Konstanten a und b, beide echt größer 1:

$$n^a \preceq b^n \qquad \text{aber} \qquad b^n \not\preceq n^a$$

also

$$n^a \in \mathrm{O}\left(b^n\right) \qquad \text{aber} \qquad b^n \notin \mathrm{O}\left(n^a\right)$$

also

$$b^n \in \Omega\left(n^a\right) \qquad \text{aber} \qquad n^a \notin \Omega\left(b^n\right)$$

- in der Ungleichung $g(n) \leq cf(n)$ die Konstante auf die andere Seite bringen (hatten wir schon) liefert

Rechenregel

Für alle Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ und $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ gilt:

$$g(n) \in \mathrm{O}(f(n)) \iff f(n) \in \Omega(g(n)), \quad \text{also} \quad g \preceq f \iff f \succeq g$$

- Man kann auch zeigen:

$$\Theta(f(n)) = \mathrm{O}(f(n)) \cap \Omega(f(n))$$

$$\text{also} \qquad g \asymp f \iff g \preceq f \wedge g \succeq f$$

Überblick

Für die Lektüre leider unverzichtbar

- sehr unschöne Variante der O-Notation, aber weit verbreitet
- Man schreibt

$$g(n) = \mathrm{O}(f(n)) \quad \text{statt} \quad g(n) \in \mathrm{O}(f(n)) \ ,$$
$$g(n) = \Theta(f(n)) \quad \text{statt} \quad g(n) \in \Theta(f(n)) \ ,$$
$$g(n) = \Omega(f(n)) \quad \text{statt} \quad g(n) \in \Omega(f(n)) \ .$$

- Ausdrücke auf der linken Seite sind keine Gleichungen!
- Lassen Sie daher bitte immer große Vorsicht walten:
  - Es ist falsch, aus $g(n) = \mathrm{O}(f_1(n))$ und $g(n) = \mathrm{O}(f_2(n))$ zu folgern, dass $\mathrm{O}(f_1(n)) = \mathrm{O}(f_2(n))$ ist.
  - Es ist falsch, aus $g_1(n) = \mathrm{O}(f(n))$ und $g_2(n) = \mathrm{O}(f(n))$ zu folgern, dass $g_1(n) = g_2(n)$ ist.

Für die Lektüre leider unverzichtbar

- sehr unschöne Variante der O-Notation, aber weit verbreitet
- Man schreibt

$$g(n) = \mathrm{O}(f(n)) \quad \text{statt} \quad g(n) \in \mathrm{O}(f(n)) \ ,$$
$$g(n) = \Theta(f(n)) \quad \text{statt} \quad g(n) \in \Theta(f(n)) \ ,$$
$$g(n) = \Omega(f(n)) \quad \text{statt} \quad g(n) \in \Omega(f(n)) \ .$$

- Ausdrücke auf der linken Seite sind keine Gleichungen!
- Lassen Sie daher bitte immer große Vorsicht walten:
  - Es ist falsch, aus $g(n) = \mathrm{O}(f_1(n))$ und $g(n) = \mathrm{O}(f_2(n))$ zu folgern, dass $\mathrm{O}(f_1(n)) = \mathrm{O}(f_2(n))$ ist.
  - Es ist falsch, aus $g_1(n) = \mathrm{O}(f(n))$ und $g_2(n) = \mathrm{O}(f(n))$ zu folgern, dass $g_1(n) = g_2(n)$ ist.

Überblick

Eine nützliche Rechenregel

- Ist $g_1 \preceq f_1$ und $g_2 \preceq f_2$, dann ist auch $g_1 + g_2 \preceq f_1 + f_2$.
- Ist umgekehrt $g \preceq f_1 + f_2$, dann kann man g in der Form $g = g_1 + g_2$ schreiben mit $g_1 \preceq f_1$ und $g_2 \preceq f_2$.

Das schreiben wir auch so:

Lemma

Für alle Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ gilt:

$$\mathrm{O}(f_1) + \mathrm{O}(f_2) = \mathrm{O}(f_1 + f_2)$$

Das Pluszeichen auf der linken Seite bedarf der Erläuterung ...

Komplexoperationen

- Sind M_1 und M_2 Mengen von Elementen, die man addieren bzw. multiplizieren kann, dann sei

$$M_1 + M_2 = \{g_1 + g_2 \mid g_1 \in M_1 \wedge g_2 \in M_2\}$$
$$M_1 \cdot M_2 = \{g_1 \cdot g_2 \mid g_1 \in M_1 \wedge g_2 \in M_2\}$$

- Das ist nichts Neues: Definition des Produkts formaler Sprachen passt genau in dieses Schema.

Komplexoperationen (2)

- Wenn eine der Mengen M_i einelementig ist, lässt man manchmal die Mengenklammern darum weg.
- Beispiele
  - mit Zahlenmengen

    statt $\{3\} \cdot \mathbb{N}_0 + \{1\}$ kürzer $3\mathbb{N}_0 + 1$

  - mit Funktionenmengen

    statt $\{n^3\} + \mathrm{O}\left(n^2\right)$ kürzer $n^3 + \mathrm{O}\left(n^2\right)$

beide Inklusionen getrennt beweisen:

„$\subseteq$“: das ist einfach

Wenn für alle $n \geq n_{01}$ gilt: $g_1(n) \leq c_1 f_1(n)$ und wenn für alle $n \geq n_{02}$ gilt: $g_2(n) \leq c_2 f_2(n)$, dann gilt für $n \geq n_0 = \max(n_{01}, n_{02})$ und $c = \max(c_1, c_2)$:

$$\begin{aligned} g_1(n) + g_2(n) &\leq c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) \\ &\leq c f_1(n) + c f_2(n) \\ &= c(f_1(n) + f_2(n)) \end{aligned}$$

„$\supseteq$“: „schwieriger“, weil man g_1 und g_2 finden muss.

Definiere

$$g_1(n) = \begin{cases} g(n) & \text{falls } g(n) \leq c f_1(n) \\ c f_1(n) & \text{falls } g(n) > c f_1(n) \end{cases}$$

und $\quad g_2(n) = g(n) - g_1(n)$

Der Rest ist einfache Rechnung.

Rechenregel

Wenn $g_1 \preceq f_1$ ist, und wenn $g_1 \asymp g_2$ und $f_1 \asymp f_2$,
dann gilt auch $g_2 \preceq f_2$.

Rechenregel

Wenn $g \preceq f$ ist, also $g \in \mathrm{O}(f)$,
dann ist auch $\mathrm{O}(g) \subseteq \mathrm{O}(f)$ und $\mathrm{O}(g + f) = \mathrm{O}(f)$.

Was ist wichtig

Das sollten Sie mitnehmen:

- Definitionen von $\mathrm{O}(f)$, $\Theta(f)$, $\Omega(f)$
- Definitionen von $\asymp$, $\preceq$, $\succeq$

Das sollten Sie üben:

- Anschauung für $\mathrm{O}(f)$, $\Theta(f)$, $\Omega(f)$
- rechnen mit $\mathrm{O}(f)$, $\Theta(f)$, $\Omega(f)$

Überblick

Überblick

Multiplikation von 2×2-Matrizen

		b_{11}	b_{12}
		b_{21}	b_{22}
a_{11}	a_{12}	$a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$	$a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$
a_{21}	a_{22}	$a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}$	$a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$

- Anzahl Multiplikationen: $N_{mult}(2) = 2^2 \cdot 2 = 8$
- Anzahl Additionen: $N_{add}(2) = 2^2 \cdot (2 - 1) = 4$.

Multiplikation von $n \times n$-Matrizen

- n sei gerade
- Verwendung von Blockmatrizen:

		B_{11}	B_{12}
		B_{21}	B_{22}
A_{11}	A_{12}	$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}$	$A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}$
A_{21}	A_{22}	$A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}$	$A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}$

- alle Blöcke haben Größe $n/2 \times n/2$
- 8 Multiplikationen von Blockmatrizen und
  4 Additionen von Blockmatrizen.
- Anzahl elementarer Operationen
  - $N_{mult}(n) = 8 \cdot N_{mult}(n/2)$ und
  - $N_{add}(n) = 8 \cdot N_{add}(n/2) + 4 \cdot (n/2)^2 = 8 \cdot N_{add}(n/2) + n^2$.

Multiplikation von $2^k \times 2^k$-Matrizen

- Fälle $n \neq 2^k$ kann man mit mehr Aufwand analog behandeln.
- aus $N_{mult}(n) = 8 \cdot N_{mult}(n/2)$ folgt (Induktion)

$$\begin{aligned} N_{mult}(2^k) &= 8 \cdot N_{mult}(2^{k-1}) = 8 \cdot 8 \cdot N_{mult}(2^{k-2}) = \cdots \\ &= 8^k \cdot N_{mult}(1) \\ &= 8^k = (2^3)^k = (2^k)^3 = n^3 \end{aligned}$$

- Aus $N_{add}(n) = 8 \cdot N_{add}(n/2) + n^2$ folgt

$$\begin{aligned} N_{add}(2^k) &= 8 \cdot N_{add}(2^{k-1}) + 4^k \\ &= 8 \cdot 8 \cdot N_{add}(2^{k-2}) + 8 \cdot 4^{k-1} + 4^k = \cdots \\ &= 8 \cdot 8 \cdot N_{add}(2^{k-2}) + 2 \cdot 4^k + 4^k = \cdots \\ &= 8^k N_{add}(2^0) + (2^{k-1} + \cdots 1) \cdot 4^k = \\ &= 2^k \cdot 4^k \cdot 0 + (2^k - 1) \cdot 4^k = \\ &= 2^k \cdot 4^k - 4^k = n^3 - n^2 \end{aligned}$$

Nichts neues

- Das wussten wir doch schon:
  - $N_{mult}(n) = n^3$
  - $N_{add}(n) = 2n^3 - n^2$
- und?

Überblick

Die Idee von Strassen

Man kann die Einträge C_{ij} des Matrixproduktes auch wie folgt berechnen:

$$
\begin{aligned}
& & M_1 &= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}) \\
& & M_2 &= (A_{21} + A_{22})B_{11} \\
& & M_3 &= A_{11}(B_{12} - B_{22}) \\
& & M_4 &= A_{22}(B_{21} - B_{11}) \\
& & M_5 &= (A_{11} + A_{12})B_{22} \\
& & M_6 &= (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}) \\
& & M_7 &= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}) \\
\text{und dann} & & C_{11} &= M_1 + M_4 - M_5 + M_7 \\
& & C_{12} &= M_3 + M_5 \\
& & C_{21} &= M_2 + M_4 \\
& & C_{22} &= M_1 - M_2 + M_3 + M_6
\end{aligned}
$$

Die Idee von Strassen (2)

$$
\begin{aligned}
M_1 &= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}) \\
M_2 &= (A_{21} + A_{22})B_{11} \\
M_3 &= A_{11}(B_{12} - B_{22}) \\
M_4 &= A_{22}(B_{21} - B_{11}) \\
M_5 &= (A_{11} + A_{12})B_{22} \\
M_6 &= (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}) \\
M_7 &= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}) \\
\text{und dann} \quad C_{11} &= M_1 + M_4 - M_5 + M_7 \\
C_{12} &= M_3 + M_5 \\
C_{21} &= M_2 + M_4 \\
C_{22} &= M_1 - M_2 + M_3 + M_6
\end{aligned}
$$

- 18 Additionen statt 4
- 7 Multiplikationen statt 8

Die Idee von Strassen (3)

- 18 Additionen statt 4
- 7 Multiplikationen statt 8

- ja und?

Die Idee von Strassen (3)

- 18 Additionen statt 4
- 7 Multiplikationen statt 8

- ja und?

- ganze Block*matrizen*:
  Additionen sind *viel* „billiger“ als Multiplikationen

- übrigens:
  - bei einzelnen Zahlen sind Additionen auch *viel* „billiger“ als Multiplikationen
  - bei den kleinen Werten in Rechnern merkt man das nur nicht

Die Idee von Strassen (3)

- 18 Additionen statt 4
- 7 Multiplikationen statt 8

- ja und?

- ganze Block*matrizen*:
  Additionen sind *viel* „billiger“ als Multiplikationen

- übrigens:
  - bei einzelnen Zahlen sind Additionen auch *viel* „billiger“ als Multiplikationen
  - bei den kleinen Werten in Rechnern merkt man das nur nicht

Aufwandsabschätzung für den Algorithmus von Strassen

- Anzahl elementarer Operationen:
  - $N_{mult}(n) = 7 \cdot N_{mult}(n/2)$
  - $N_{add}(n) = 7 \cdot N_{add}(n/2) + 18 \cdot (n/2)^2 = 7 \cdot N_{add}(n/2) + 4.5 \cdot n^2$
- Für den Fall $n = 2^k$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} N_{mult}(2^k) &= 7 \cdot N_{mult}(2^{k-1}) = 7 \cdot 7 \cdot N_{mult}(2^{k-2}) = \cdots \\ &= 7^k \cdot N_{mult}(1) \\ &= 7^k = (2^{\log_2 7})^k = (2^k)^{\log_2 7} \approx n^{2.807\ldots} \end{aligned}$$

- Analog auch $N_{add}(n) \in \Theta(n^{\log_2 7})$.
- Gesamtzahl elementarer Operationen ist also in

$$\Theta(n^{\log_2 7}) + \Theta(n^{\log_2 7}) = \Theta(n^{\log_2 7}) \approx \Theta(n^{2.807\ldots}) \; .$$

Noch schneller?

- Ja: Algorithmus von Coppersmith und Winograd: $\mathrm{O}\left(n^{2.376\ldots}\right)$
  - der konstante Faktor ist *groß*.
- Unklar: Reichen $\mathrm{O}\left(n^2\right)$ Operationen?

Teile und herrsche

- Man teilt die Probleminstanz in kleinere Teile auf
  - mehr oder weniger viele
- Man bearbeitet die Teile rekursiv nach dem gleichen Verfahren.
- Man benutzt die Teilergebnisse, um das Resultat für die ursprüngliche Eingabe zu berechnen.
- engl. *divide and conquer*

Was ist wichtig

Das sollten Sie mitnehmen:

- bei algorithmischen Problemen kann man überraschende Dinge tun
- Teile und Herrsche
- Rekursionsformel für Abschätzung von (z. B.) Laufzeiten

Das sollten Sie üben:

- in dieser Vorlesung: rechnen mit $\mathrm{O}(\cdot)$, $\Theta(\cdot)$, $\Omega(\cdot)$
  - spätestens in kommenden Semestern: rekursive Algorithmen

Überblick

Überblick

Laufzeit von Teile-und-Herrsche-Algorithmen

- in manchen Fällen:
  - Problem der Größe n wird in konstante Anzahl a von Teilprobleme gleicher Größe n/b zerhackt
  - sinnvollerweise $a \geq 1$ und $b > 1$
  - Zerhacken vorher und Zusammensetzen hinterher kosten $f(n)$.
- Abschätzung (z. B.) der Laufzeit $T(n)$ liefert Rekursionsformel, die „grob gesagt“ die Form hat

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

- genau genommen:
  - $\lfloor n/b \rfloor$ oder $\lceil n/b \rceil$
  - oder gar $\lfloor n/b + c \rfloor$ oder $\lceil n/b + c \rceil$
  - Mitteilung: Das ändert nichts.
- Gesucht: explizite Formel für $T(n)$.

Laufzeit von Teile-und-Herrsche-Algorithmen

- in manchen Fällen:
  - Problem der Größe n wird in konstante Anzahl a von Teilprobleme gleicher Größe n/b zerhackt
  - sinnvollerweise $a \geq 1$ und $b > 1$
  - Zerhacken vorher und Zusammensetzen hinterher kosten $f(n)$.
- Abschätzung (z. B.) der Laufzeit $T(n)$ liefert Rekursionsformel, die „grob gesagt“ die Form hat

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

- genau genommen:
  - $\lfloor n/b \rfloor$ oder $\lceil n/b \rceil$
  - oder gar $\lfloor n/b + c \rfloor$ oder $\lceil n/b + c \rceil$
  - Mitteilung: Das ändert nichts.
- Gesucht: explizite Formel für $T(n)$.

Laufzeit von Teile-und-Herrsche-Algorithmen

- in manchen Fällen:
  - Problem der Größe n wird in konstante Anzahl a von Teilprobleme gleicher Größe n/b zerhackt
  - sinnvollerweise $a \geq 1$ und $b > 1$
  - Zerhacken vorher und Zusammensetzen hinterher kosten $f(n)$.
- Abschätzung (z. B.) der Laufzeit $T(n)$ liefert Rekursionsformel, die „grob gesagt“ die Form hat

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

- genau genommen:
  - $\lfloor n/b \rfloor$ oder $\lceil n/b \rceil$
  - oder gar $\lfloor n/b + c \rfloor$ oder $\lceil n/b + c \rceil$
  - Mitteilung: Das ändert nichts.
- Gesucht: explizite Formel für $T(n)$.

Laufzeit von Teile-und-Herrsche-Algorithmen

- in manchen Fällen:
  - Problem der Größe n wird in konstante Anzahl a von Teilprobleme gleicher Größe n/b zerhackt
  - sinnvollerweise $a \geq 1$ und $b > 1$
  - Zerhacken vorher und Zusammensetzen hinterher kosten $f(n)$.
- Abschätzung (z. B.) der Laufzeit $T(n)$ liefert Rekursionsformel, die „grob gesagt“ die Form hat

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

- genau genommen:
  - $\lfloor n/b \rfloor$ oder $\lceil n/b \rceil$
  - oder gar $\lfloor n/b + c \rfloor$ oder $\lceil n/b + c \rceil$
  - Mitteilung: Das ändert nichts.
- Gesucht: explizite Formel für $T(n)$.

Mastertheorem

Drei Kochrezepte, in denen $f(n)$ und $\log_b a$ eine Rolle spielen:

- Fall 1: Wenn $f(n) \in \mathrm{O}\left(n^{(\log_b a)-\varepsilon}\right)$ für ein $\varepsilon > 0$ ist, dann ist $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$.
- Fall 2: Wenn $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$ ist, dann ist $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a} \log n\right)$.
- Fall 3: Wenn $f(n) \in \Omega\left(n^{(\log_b a)+\varepsilon}\right)$ für ein $\varepsilon > 0$ ist, und wenn es eine Konstante d gibt mit $0 < d < 1$, so dass für alle hinreichend großen n gilt $af(n/b) \leq df(n)$, dann ist $T(n) \in \Theta(f(n))$.

Achtung: Diese Fallunterscheidung ist *nicht vollständig!*

Beispiel Matrixmultiplikation

- „Problemgröße“ n: die Zeilen- bzw. Spaltenzahl
- Schulmethode
  - $a = 8$ Multiplikationen
  - von Matrizen der Größe $n/2$: also $b = 2$
  - $\log_b a = \log_2 8 = 3$
  - zusätzlicher Aufwand: 4 kleine Matrixadditionen, also $f(n) = 4 \cdot n^2/4 = n^2$
  - $f(n) \in \mathrm{O}\left(n^{3-\varepsilon}\right)$ (z. B. für $\varepsilon = 1$)
  - Mastertheorem, Fall 1: $T(n) \in \Theta\left(n^3\right)$
- Algorithmus von Strassen
  - $a = 7$ Multiplikationen
  - von Matrizen der Größe $n/2$: also $b = 2$
  - $\log_b a = \log_2 7 \approx 2.807\ldots$
  - zusätzlicher Aufwand: 18 kleine Matrixadditionen, also $f(n) = 18 \cdot n^2/4 \in \Theta\left(n^2\right)$
  - $f(n) \in \mathrm{O}\left(n^{\log_b a-\varepsilon}\right) = \mathrm{O}\left(n^{\log_2 7-\varepsilon}\right)$ (z. B. für $\varepsilon = 0.1$)
  - Mastertheorem, Fall 1: $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_2 7}\right) = \Theta\left(n^{2.807\ldots}\right)$

Beispiel Matrixmultiplikation

- „Problemgröße“ n: die Zeilen- bzw. Spaltenzahl
- Schulmethode
  - $a = 8$ Multiplikationen
  - von Matrizen der Größe $n/2$: also $b = 2$
  - $\log_b a = \log_2 8 = 3$
  - zusätzlicher Aufwand: 4 kleine Matrixadditionen, also $f(n) = 4 \cdot n^2/4 = n^2$
  - $f(n) \in \mathrm{O}\left(n^{3-\varepsilon}\right)$ (z. B. für $\varepsilon = 1$)
  - Mastertheorem, Fall 1: $T(n) \in \Theta\left(n^3\right)$
- Algorithmus von Strassen
  - $a = 7$ Multiplikationen
  - von Matrizen der Größe $n/2$: also $b = 2$
  - $\log_b a = \log_2 7 \approx 2.807\ldots$
  - zusätzlicher Aufwand: 18 kleine Matrixadditionen, also $f(n) = 18 \cdot n^2/4 \in \Theta\left(n^2\right)$
  - $f(n) \in \mathrm{O}\left(n^{\log_b a-\varepsilon}\right) = \mathrm{O}\left(n^{\log_2 7-\varepsilon}\right)$ (z. B. für $\varepsilon = 0.1$)
  - Mastertheorem, Fall 1: $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_2 7}\right) = \Theta\left(n^{2.807\ldots}\right)$

Überblick

Weitere Anwendung des Mastertheorems

$x \leftarrow n$; $\langle$*Eingabewert* $n \in \mathbb{N}_0\rangle$
$i \leftarrow 0$;
while $x \geq 2$ **do**
  $i++$;
  $x \leftarrow x$ **div** 2;
od
$\langle$*Ausgabewert* $i\rangle$

Weitere Anwendung des Mastertheorems

$x \leftarrow n$; $\langle$*Eingabewert* $n \in \mathbb{N}_0\rangle$
$i \leftarrow 0$;
while $x \geq 2$ **do**
  $i++$;
  $x \leftarrow x$ **div** 2;
od
$\langle$*Ausgabewert* $i\rangle$

- Welchen Wert hat am Ende i?
- Wieviele Schleifendurchläufe $D(n)$ werden insgesamt gemacht?

Weitere Anwendung des Mastertheorems

$x \leftarrow n$; $\langle$*Eingabewert* $n \in \mathbb{N}_0\rangle$
$i \leftarrow 0$;
while $x \geq 2$ **do**
  $i++$;
  $x \leftarrow x$ **div** 2;
od
$\langle$*Ausgabewert* $i\rangle$

- wie man sieht: $D(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \leq 1 \\ 1 + D(n/2) & \text{sonst} \end{cases}$
- Mastertheorem:
  - $a = 1$, $b = 2$, $f(n) = 1$
  - $\log_b a = 0$, also Fall 2: $f(n) \in \Theta\left(n^0\right)$
  - also $D(n) \in \Theta(\log n)$

Hier ist das Mastertheorem *nicht* anwendbar

$x \leftarrow n$; $\langle$*Eingabewert* $n \in \mathbb{N}_0\rangle$
$i \leftarrow 0$;
while $x \geq 2$ **do**
  $i++$;
  $x \leftarrow x - 2$;
od
$\langle$*Ausgabewert* $i\rangle$

- Anzahl Schleifendurchläufe

$$D(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \leq 1 \\ 1 + D(n-2) & \text{sonst} \end{cases}$$

- Kochrezept nicht anwendbar

Hier ist das Mastertheorem *nicht* anwendbar

$x \leftarrow n$; $\langle$*Eingabewert* $n \in \mathbb{N}_0\rangle$
$i \leftarrow 0$;
while $x \geq 2$ **do**
  $i++$;
  $x \leftarrow x - 2$;
od
$\langle$*Ausgabewert* $i\rangle$

- Anzahl Schleifendurchläufe

$$D(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \leq 1 \\ 1 + D(n-2) & \text{sonst} \end{cases}$$

- Kochrezept nicht anwendbar

Einfache **for**-Schleifen

$D \leftarrow 0;$
for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
  $S[i] \leftarrow V_1[i] + V_2[i]$
  $D++;$
od

- Anzahl Schleifendurchläufe offensichtlich: $D(n) = n$

Einfache **for**-Schleifen

$D \leftarrow 0;$
for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
  $S[i] \leftarrow V_1[i] + V_2[i]$
  $D++;$
od

- Anzahl Schleifendurchläufe offensichtlich: $D(n) = n$

Geschachtelte **for**-Schleifen

$D \leftarrow 0;$
for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
  $E \leftarrow 0;$
  for $j \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
    $C[i,j] \leftarrow A[i,j] + B[i,j]$
    $E++;$
  od
  $D \leftarrow D + E;$
od

- Anzahl Durchläufe
  - innerer Schleifenrumpf: $E(i,n) = n$
  - insgesamt $D(n) = \sum_{i=0}^{n-1} E(i,n) = \sum_{i=0}^{n-1} n = n^2$

Geschachtelte **for**-Schleifen

$D \leftarrow 0;$
for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
  $E \leftarrow 0;$
  for $j \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
    $C[i,j] \leftarrow A[i,j] + B[i,j]$
    $E++;$
  od
  $D \leftarrow D + E;$
od

- Anzahl Durchläufe
  - innerer Schleifenrumpf: $E(i,n) = n$
  - insgesamt $D(n) = \sum_{i=0}^{n-1} E(i,n) = \sum_{i=0}^{n-1} n = n^2$

Geschachtelte **for**-Schleifen

$D \leftarrow 0;$
for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
  $E \leftarrow 0;$
  for $j \leftarrow 0$ **to** i **do**
    $C[i,j] \leftarrow A[i,j] + B[i,j]$
    $E++;$
  od
  $D \leftarrow D + E;$
od

- Anzahl Durchläufe
  - innerer Schleifenrumpf: $E(i,n) = i+1$
  - insgesamt

$$D(n) = \sum_{i=0}^{n-1} E(i,n) = \sum_{i=0}^{n-1} i+1 = \frac{n(n+1)}{2} \in \Theta\left(n^2\right)$$

Geschachtelte **for**-Schleifen

$D \leftarrow 0;$
for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
  $E \leftarrow 0;$
  for $j \leftarrow 0$ **to** i **do**
    $C[i,j] \leftarrow A[i,j] + B[i,j]$
    $E++;$
  od
  $D \leftarrow D + E;$
od

- Anzahl Durchläufe
  - innerer Schleifenrumpf: $E(i,n) = i+1$
  - insgesamt

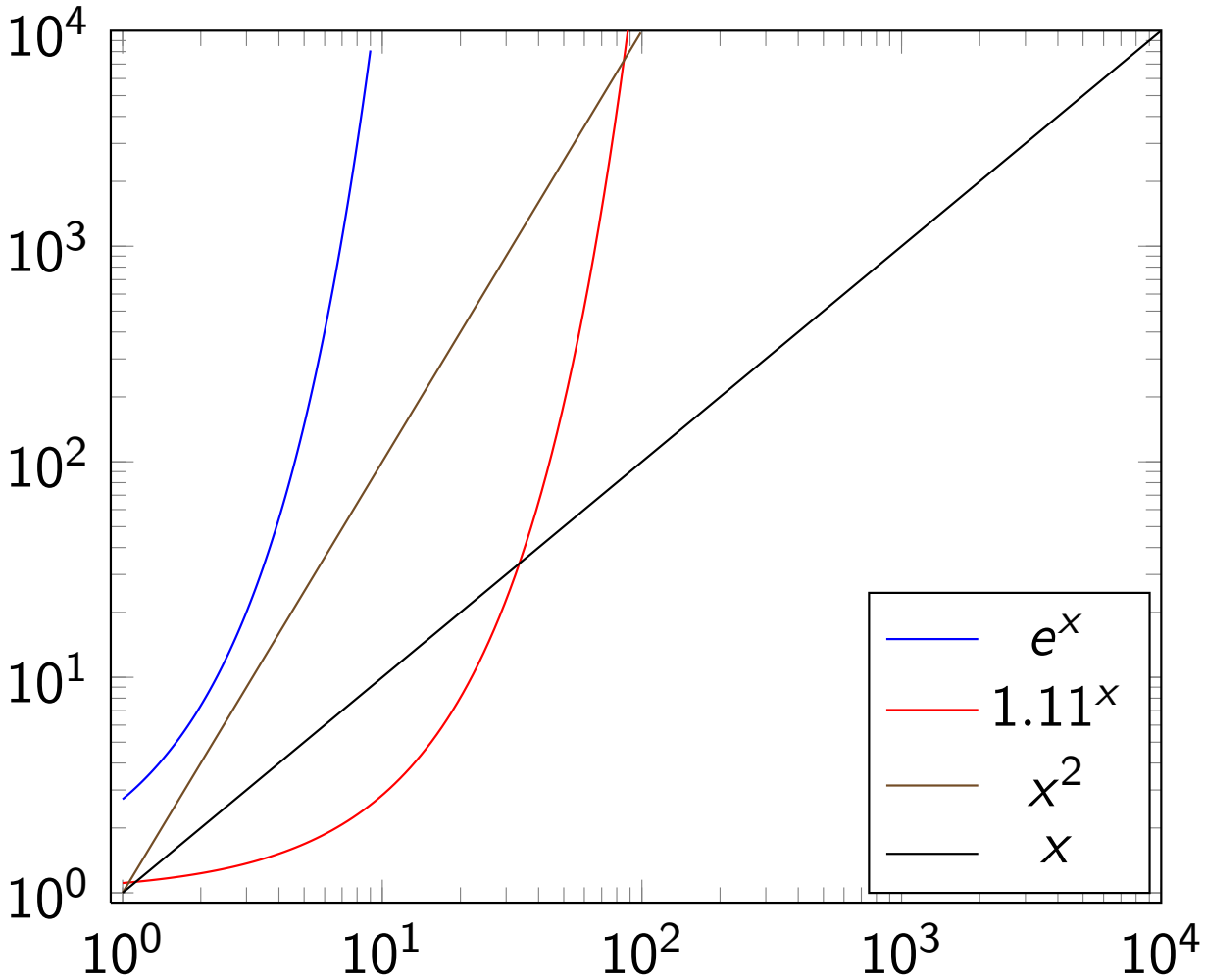
$$D(n) = \sum_{i=0}^{n-1} E(i,n) = \sum_{i=0}^{n-1} i+1 = \frac{n(n+1)}{2} \in \Theta\left(n^2\right)$$

Rechenzeiten

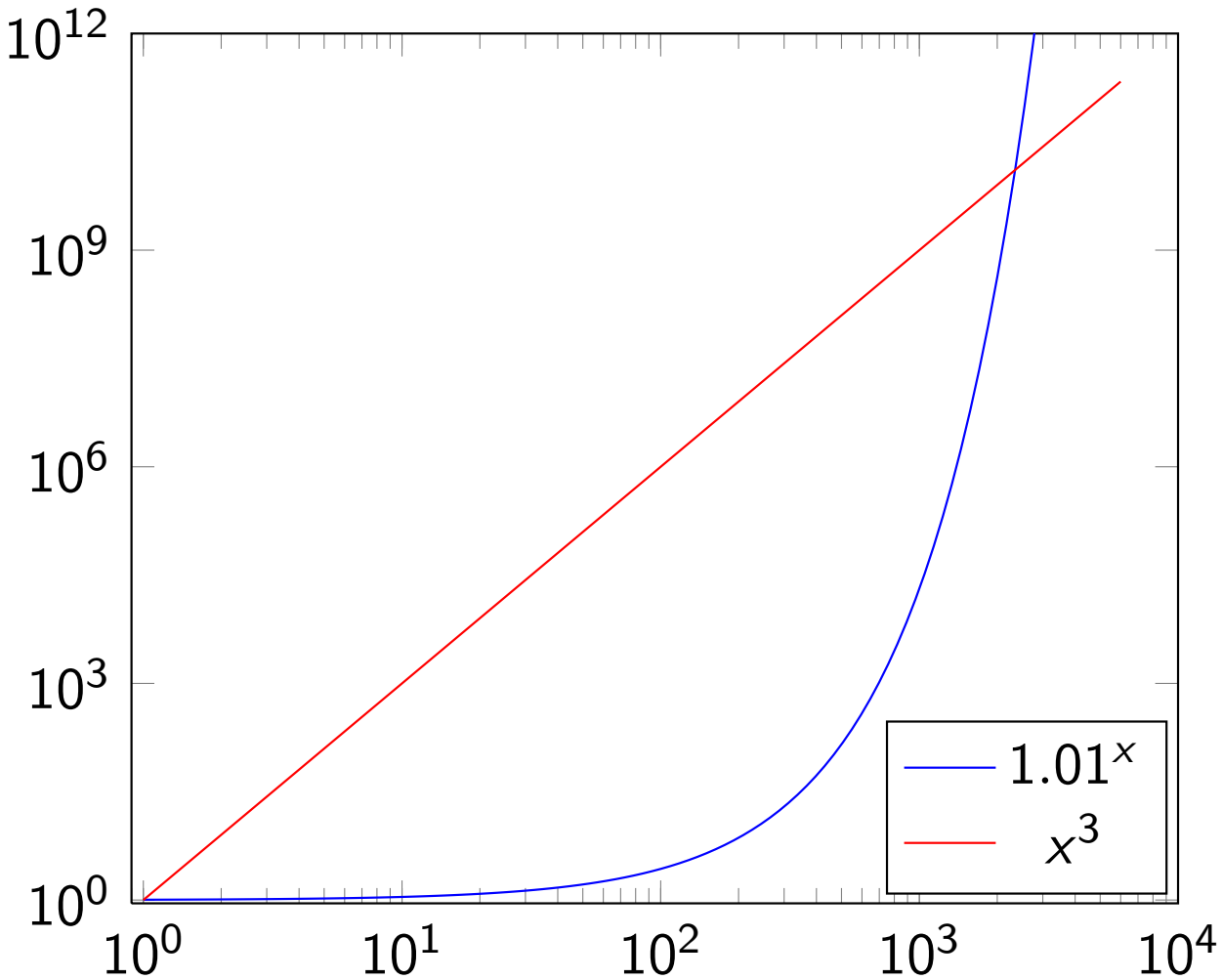
„Wie großen Einfluss“ hat die Rechenzeitschranke?

$T(n)$	n					
	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$\log_2(n)$	3.32 ns	6.64 ns	9.97 ns	13.29 ns	16.61 ns	19.93 ns
$\sqrt{n}$	3.16 ns	10.00 ns	31.62 ns	100.00 ns	316.23 ns	1.00 µs
n	10.00 ns	100.00 ns	1.00 µs	10.00 µs	100.00 µs	1.00 ms
$n \cdot \log_2(n)$	33.22 ns	664.39 ns	9.97 µs	132.88 µs	1.66 ms	19.93 ms
n^2	100.00 ns	10.00 µs	1.00 ms	100.00 ms	10.00 s	0.27 h
n^3	1.00 µs	1.00 ms	1.00 s	0.27 h	11.57 d	31.71 a
1.01^n	1.10 ns	2.70 ns	20.96 µs			
1.1^n	2.59 ns	13.78 µs				
2^n	1.02 µs					
n^n	10 s					

Rechenzeiten



Rechenzeiten (2)



Was ist wichtig

Das sollten Sie mitnehmen:

- Mastertheorem: Kochrezepte zum Nachschlagen des asymptotischen Wachstums nach einem einfachen Rezept rekursiv definierter Funktionen
- ineinandergeschachtelte Schleifen

Das sollten Sie üben:

- Mastertheorem anwenden
- Schleifen „auseinander nehmen“

Zusammenfassung

- Komplexitätsmaße
  - Laufzeitbedarf
  - Speicherplatzbedarf
- Abschätzung asymptotischen Wachstums bis auf konstante Faktoren
  - nach oben mit $\mathrm{O}(\cdot)$
  - nach oben und unten mit $\Theta(\cdot)$
  - nach unten mit $\Omega(\cdot)$
- algorithmisches Prinzip
  - Teile und Herrsche (divide and conquer)
  - am Beispiel Matrixmultiplikation
- Mastertheorem