Grundbegriffe der Informatik
Wintersemester 2024/25 – Hauptklausur

INF (6 ECTS)

Lösung!

- Prüfen Sie, ob Sie die richtige Version der Klausur haben:
  Physik/Geo: PH/GEO (4 ECTS), alle anderen: INF (6 ECTS)
- Bringen Sie den Aufkleber mit Ihrer Matrikelnummer auf diesem Deckblatt an und beschriften Sie jedes Aufgabenblatt mit Ihrer Matrikelnummer.
- Die Klausur ist **doppelseitig** gedruckt, inklusive der Rückseite des Titelblatts.
- Am Ende der Klausur sind zusätzliche Leerseiten. Wenn Sie diese nutzen, verweisen Sie in der entsprechenden Aufgabe darauf. Fordern Sie zusätzliches Papier bitte nur an, falls Sie den gesamten Platz aufgebraucht haben.
- Verwenden Sie nur dokumentenechte Stifte in blau oder schwarz.
- Die Tackernadel darf nicht gelöst werden.
- Bearbeitungszeit: 2 Stunden

	Mögliche Punkte						Erreichte Punkte					
	a	b	c	d	e	Σ	a	b	c	d	e	Σ
Aufg. 1	4	3	1	2	–	10					–	
Aufg. 2	2	1	2	2	3	10						
Aufg. 3	2	2	1	1	4	10						
Aufg. 4	1	6	2	1	–	10					–	
Aufg. 5	3	1	3	2	1	10						
Aufg. 6	2	2	2	2	2	10						
Σ						60						

Aufgabe 1

$4 + 3 + 1 + 2 = 10$ Punkte

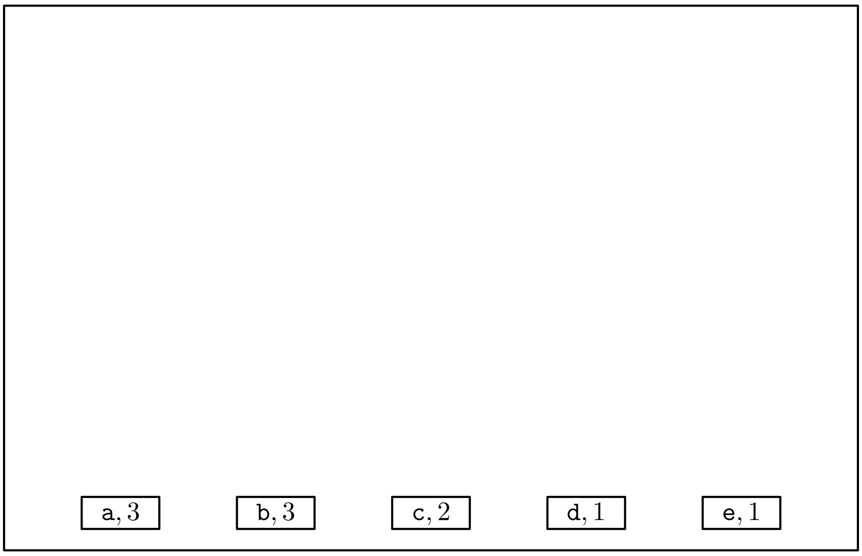
(a) Gegeben sei die Relation $R = \{(a, b) \in \mathbb{N}_+ \times (\mathbb{N}_+ \setminus \{1\}) \mid a \bmod b = 1\}$. Geben Sie an, welche der Eigenschaften *linkstotal*, *rechtstotal*, *linkseindeutig* und *rechtseindeutig* R erfüllt und welche nicht. Beweisen Sie jeweils Ihre Antwort.

☐ R ist linkstotal ☐ R ist **nicht** linkstotal
☐ R ist rechtstotal ☐ R ist **nicht** rechtstotal
☐ R ist linkseindeutig ☐ R ist **nicht** linkseindeutig
☐ R ist rechtseindeutig ☐ R ist **nicht** rechtseindeutig

(b) Berechnen Sie für das Wort $w = \texttt{abababcdec}$ eine Huffman-Kodierung

$$h\colon \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}, \texttt{d}, \texttt{e}\}^* \to \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^*.$$

Zeichnen Sie dafür den zugehörigen Huffman-Baum in den dafür vorgesehenen Kasten. Beschriften Sie alle linken Kanten mit `0` und alle rechten Kanten mit `1`. Geben Sie außerdem die Kodierung für jedes Zeichen aus $\{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}, \texttt{d}, \texttt{e}\}$ an.



$h(\texttt{a}) =$ ☐ $h(\texttt{b}) =$ ☐ $h(\texttt{c}) =$ ☐

$h(\texttt{d}) =$ ☐ $h(\texttt{e}) =$ ☐

(c) Geben Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{N}_0^3 \to \mathbb{Z}$ an, sodass für alle endlichen Mengen A, B, C mit $|B \cap C| = 2$ gilt:

$$f(|A|, |B|, |C|) = |A \times (B \setminus C)|.$$

$f(a, b, c) =$ ☐

(d) Geben Sie eine Sprache L an, sodass $f\colon L \to \{\mathtt{a}\}^+ \cdot \{\mathtt{b}\}^+$ mit

$$f(xw) = \mathtt{a}wx,\ \text{wobei } x \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\} \text{ und } w \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^*,$$

eine surjektive Abbildung ist. Verwenden Sie dafür ausschließlich die folgenden Zeichen

$$\mathtt{a} \quad \mathtt{b} \quad \{ \quad \} \quad (\quad) \quad {}^* \quad \cup \quad \cdot \quad \varepsilon \quad {}^+$$

Zeichen dürfen mehrfach verwendet werden.

$L =$ $\boxed{}$

Lösung

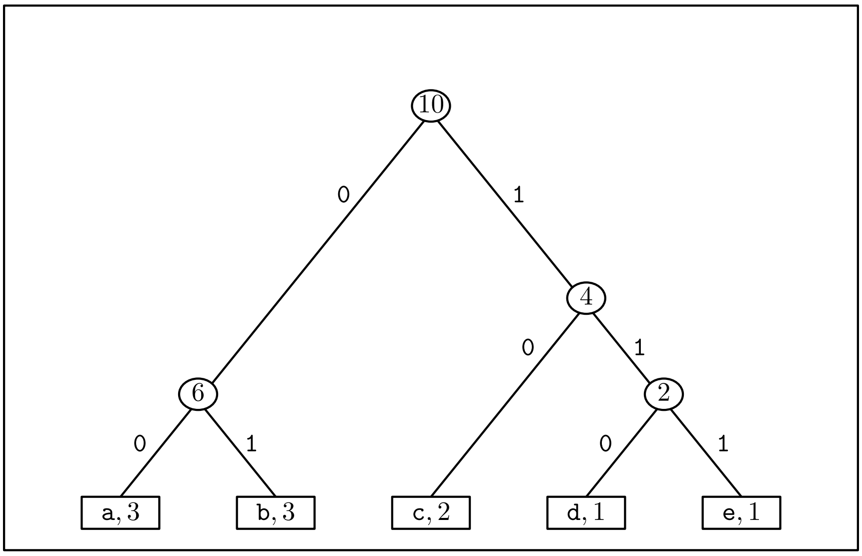
(a) **Linkstotal:** Nein, Division durch eine größere Zahl ergibt nur den Rest, also gilt $2 \bmod b = 2$ für alle $b > 2$. Außerdem ist 2 durch sich selbst teilbar, also $2 \bmod 2 = 0$. Also ist $2 \bmod b \neq 1$, und damit $(2, b) \notin R$, für alle $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, was zeigt, dass R nicht linkstotal ist.

Rechtstotal: Ja, sei $b \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$. Wir betrachten das Tupel $(1, b)$. Es gilt $1 \bmod b = 1$. Also ist $(1, b) \in R$ für alle $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Also ist R rechtstotal.

Linkseindeutig Nein, es gilt $3 \bmod 2 = 1$ und $5 \bmod 2 = 1$. Also gilt $(3, 2), (5, 2) \in R$. Somit ist R nicht linkseindeutig.

Rechtseindeutig Nein, es gilt $5 \bmod 2 = 1$ und $5 \bmod 4 = 1$. Also gilt $(5, 2), (5, 4) \in R$. Somit ist R nicht rechtseindeutig.

(b)



$$h(\texttt{a}) = \texttt{00} \qquad h(\texttt{b}) = \texttt{01} \qquad h(\texttt{c}) = \texttt{10}$$
$$h(\texttt{d}) = \texttt{110} \qquad h(\texttt{e}) = \texttt{111}$$

(c) $f(a, b, c) = a \cdot (b - 2)$

(d) $L = \{\texttt{b}\} \cdot \{\texttt{a}\}^* \cdot \{\texttt{b}\}^*$

Aufgabe 2 **$2 + 1 + 2 + 2 + 3 = 10$ Punkte**

(a) Seien P, Q und R aussagenlogische Variablen. Geben Sie eine Interpretation I an, die ein Modell für die folgende aussagenlogische Formel ist.

$$\Big(\big((P \to (Q \to R)) \wedge (P \vee Q)\big) \leftrightarrow \neg P\Big) \wedge \Big(Q \wedge \neg(R \leftrightarrow P)\Big)$$

$$I(P) = \boxed{} \qquad I(Q) = \boxed{} \qquad I(R) = \boxed{}$$

Seien P und Q zwei aussagenlogische Variablen. Wir definieren den logischen Operator „$\oplus$“ so, dass $P \oplus Q$ genau dann wahr ist, wenn P und Q unterschiedliche Wahrheitswerte haben.

(b) Füllen Sie die folgende Wahrheitstabelle entsprechend der Beschreibung von „$\oplus$“ aus.

P	Q	$P \oplus Q$
f	**f**	
f	**w**	
w	**f**	
w	**w**	

(c) Geben Sie eine aussagenlogische Formel an, die äquivalent zu $P \oplus Q$ ist und nur Zeichen aus $\{P, Q, \neg, \wedge,), (\}$ enthält. Ihre Formel darf höchstens drei mal das Zeichen „$\wedge$“ enthalten.

(d) Zeigen Sie, dass für jede Formel G gilt: G ist genau dann **keine** Tautologie, wenn ihre Negation $\neg G$ erfüllbar ist.

(e) Gegeben sei die folgende prädikatenlogische Signatur $\mathcal{S} = (\mathrm{Var}_{\mathrm{PL}}, \mathrm{Fun}_{\mathrm{PL}}, \mathrm{Rel}_{\mathrm{PL}})$ mit Stelligkeitsfunktion ar und

$\mathrm{Var}_{\mathrm{PL}} = \{x, y, z\}$, $\quad \mathrm{Fun}_{\mathrm{PL}} = \{\texttt{Eins}\}$, $\quad \mathrm{Rel}_{\mathrm{PL}} = \{\texttt{N}\}$, $\quad \mathrm{ar}(\texttt{N}) = 2$, $\quad \mathrm{ar}(\texttt{Eins}) = 0$.

Wir betrachten die Interpretation (D, I), für die Folgendes gilt:

- $D = \mathbb{N}_+$
- $(x, y) \in I(\texttt{N})$ genau dann, wenn y der Nachfolger von x ist.
- $I(\texttt{Eins}) = 1$

Geben Sie jeweils eine Formel der Prädikatenlogik über $\mathcal{S}$ mit Gleichheit an, die folgende Sachverhalte darstellt.

(i) Jede natürliche Zahl hat genau einen Nachfolger.
(ii) Keine natürliche Zahl hat die Eins als Nachfolger.
(iii) Jede natürliche Zahl außer der Eins ist Nachfolger von mindestens einer natürlichen Zahl.

Lösung

(a) Die Interpretationen

$$I_1(P) = \mathbf{f}, \qquad I_1(Q) = \mathbf{w}, \qquad I_1(R) = \mathbf{w}$$
$$I_2(P) = \mathbf{w}, \qquad I_2(Q) = \mathbf{w}, \qquad I_2(R) = \mathbf{f}$$

sind (die einzigen) Modelle der Formel.

(b)

P	Q	$P \oplus Q$
f	**f**	**f**
f	**w**	**w**
w	**f**	**w**
w	**w**	**f**

(c) $\neg(\neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg(\neg P \wedge Q))$ oder $\neg(\neg P \wedge \neg Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$

(d) Sei G keine Tautologie. Dann existiert eine Interpretation I, sodass $val_I(G) = \mathbf{f}$. Per Definition gilt $val_I(\neg G) = \neg val_I(G) = \mathbf{w}$. Also ist I ein Modell von $\neg G$. Somit ist $\neg G$ erfüllbar.

Sei $\neg G$ erfüllbar. Dann existiert eine Interpretation I, sodass $val_I(\neg G) = \mathbf{w}$. Es gilt $val_I(G) = \neg\neg val_I(G) = \neg val_I(\neg G) = \mathbf{f}$. Also ist I kein Modell von G. Somit ist G keine Tautologie.

(e) (i) $(\forall x\, \exists y\, \mathtt{N}(x,y)) \wedge (\forall x\, \forall y\, \forall z\, (\mathtt{N}(x,y) \wedge \mathtt{N}(x,z)) \rightarrow y \doteq z)$ (1,5 Punkte)
(ii) $\forall x\, \neg \mathtt{N}(x, \mathtt{Eins})$ (0,5 Punkte)
(iii) $\forall x\, \neg(x \doteq \mathtt{Eins}) \rightarrow \exists y\, \mathtt{N}(y,x)$ (1 Punkt)

Aufgabe 3

$2 + 2 + 1 + 1 + 4 = 10$ Punkte

(a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (\Sigma, V, S, R)$ für die Sprache

$$L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^{2m}\mathtt{a}^n \mid n, m \in \mathbb{N}_0\}$$

mit $L(G) = L$ an.

$\Sigma =$ $V =$

$R =$

(b) Sei $G = (\Sigma, V, S, R)$ eine beliebige Grammatik. Geben Sie eine Menge R' von Regeln an, sodass für die Grammatik $G' = (\Sigma, V \cup \{S'\}, S', R \cup R')$ gilt: $L(G') = L(G)^+$. Dabei gelte für das neue Startsymbol S', dass $S' \notin V$.

$R' =$

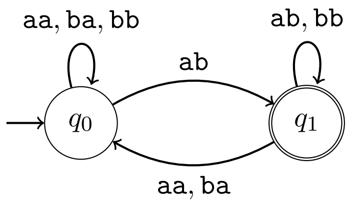
Wir definieren einen neuen Automaten-Typ. Ein *endlicher 2-Automat* ist definiert wie ein normaler endlicher Automat aus der Vorlesung mit dem einzigen Unterschied, dass die Übergangsfunktion immer zwei Zeichen liest. Dabei können nur Wörter gerader Länge abgearbeitet werden. Die Übergangsfunktion für einen 2-Automaten mit Alphabet Σ und Zustandsmenge Q hat also die Form

$$\delta\colon Q \times \Sigma^2 \to Q.$$

Erinnerung: Die Übergangsfunktion eines endlichen Automaten aus der Vorlesung hat die Form

$$\delta\colon Q \times \Sigma \to Q.$$

Im Folgenden ist ein 2-Automat $\mathcal{A}$ abgebildet:



(c) Geben Sie ein Wort w der Länge 4 an, das von $\mathcal{A}$ akzeptiert wird.

$w =$

(d) Geben Sie für das Wort $\texttt{abbbbabb}$ die Folge der Zustände an, die bei der Abarbeitung von $\mathcal{A}$ durchlaufen werden (inkl. Start- und Endzustand). Zustände, die mehrfach durchlaufen werden, müssen entsprechend oft aufgeführt werden.

$\delta_{**}(q_0, \texttt{abbbbabb}) =$

(e) Geben Sie graphisch einen endlichen Automaten an, der die gleiche Sprache akzeptiert wie $\mathcal{A}$.
Empfehlung: Benutzen Sie 6 *Zustände. (*4 *Zustände reichen aber aus.)*

Lösung

(a) $G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $\Sigma = \{\texttt{a}, \texttt{b}\}, V = \{S, B\}$. R enthält die folgenden Regeln:

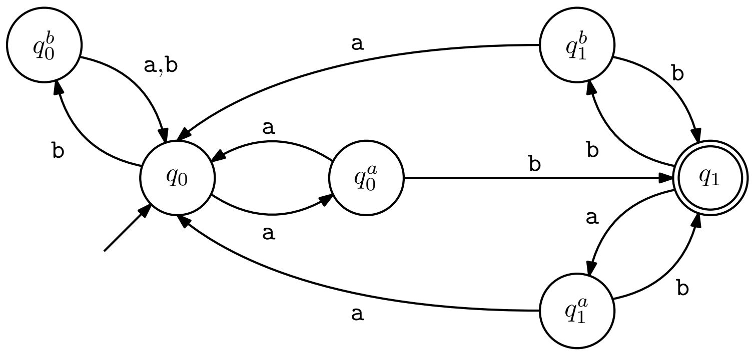
$$S \to \texttt{a}S\texttt{a} \mid B$$
$$B \to \texttt{bb}B \mid \varepsilon$$

(b) $R' = \{S' \to S'S \mid S\}$
Erinnerung: $L^+ = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_+} L^i$

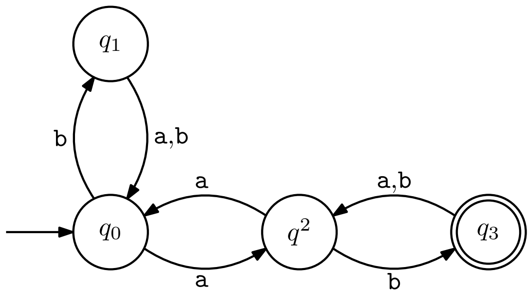
(c) `abbb`, `abab`, `aaab`, `baab` oder `bbab`

(d) $\delta_{**}(q_0, \texttt{abbbbabb}) = q_0 q_1 q_1 q_0 q_0$

(e) Wir fügen für beide Zustände jeweils zwei zusätzliche Zustände hinzu, die sich merken, ob ein `a` oder ein `b` gelesen wurde. Von dort aus sind die Übergänge zu q_0 und q_1 wie in $\mathcal{A}$.



Alternativ kann man sich auch überlegen, dass der Automat genau die Wörter gerader Länge erkennt, die auf `ab`(`bb`)* enden, und den Automaten dafür konstruieren:



Anmerkung: Ein 2-Automat erfüllt nicht die Definition eines endlichen Automaten aus der Vorlesung und ist damit keine gültige Lösung.

Aufgabe 4 **$1 + 6 + 2 + 1 = 10$ Punkte**

Seien $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und $B = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$ zwei Alphabete und $f\colon A^* \to B^*$ eine Abbildung mit

$$f(\varepsilon) = \varepsilon \text{ und}$$
$$f(xw) = \mathtt{c}x\mathtt{c} \cdot f(w) \text{ für } x \in A \text{ und } w \in A^*.$$

(a) Geben Sie $f(\mathtt{aba})$ an.

$f(\mathtt{aba}) =$ $\boxed{}$

(b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion über die Wortlänge $n = |w_1 \cdot w_2|$, dass für alle $w_1, w_2 \in A^*$ gilt: $f(w_1 \cdot w_2) = f(w_1) \cdot f(w_2)$.

(c) Geben Sie eine Abbildung $g\colon A \to B^*$ an, sodass für den von g induzierten Homomorphismus g^{**} und jedes Wort $w \in A^*$ gilt: $g^{**}(w) = f(w)$.

(d) Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung kein Homomorphismus ist.

$$h\colon \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \to \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \text{ mit } h(w) = w^R,$$

wobei w^R das Wort w rückwärts ist.

Lösung

(a) $f(\mathtt{aba}) = \mathtt{caccbccac}$

(b) Wir zeigen die Aussage mittels vollständiger Induktion über $n = |w_1 \cdot w_2|$.

Induktionsanfang: $n = 0$: Es gilt $w_1 = w_2 = \varepsilon$. Somit gilt $f(w_1 \cdot w_2) = f(\varepsilon) = \varepsilon = \varepsilon \cdot \varepsilon = f(\varepsilon) \cdot f(\varepsilon) = f(w_1) \cdot f(w_2)$.

Induktionsschritt: Sei $n > 0$ und es gelte $f(w_1' \cdot w_2') = f(w_1') \cdot f(w_2')$ für alle $w_1' \cdot w_2'$ mit $|w_1' \cdot w_2'| < n$. Sei nun $w = w_1 \cdot w_2$ mit $|w| = n$. Wenn $w_1 = \varepsilon$, gilt $f(w_1 \cdot w_2) = f(\varepsilon \cdot w_2) = f(w_2) = \varepsilon \cdot f(w_2) = f(\varepsilon) \cdot f(w_2) = f(w_1) \cdot f(w_2)$. Wenn $w_1 \neq \varepsilon$, dann gilt $w_1 = x \cdot w_1'$ für ein $x \in A$ und $w_1' \in A^*$. Damit gilt $f(w_1 \cdot w_2) = f(x \cdot w_1' \cdot w_2) = cxc \cdot f(w_1' \cdot w_2) \overset{\text{IV}}{=} cxc \cdot f(w_1') \cdot f(w_2) = f(x \cdot w_1') \cdot f(w_2) = f(w_1) \cdot f(w_2)$. Tatsächlich darf die Induktionsvoraussetzung hier angewendet werden, da $|w_1' \cdot w_2| = n - 1 < n$.

(c) $g(\mathtt{a}) = \mathtt{cac}$, $g(\mathtt{b}) = \mathtt{cbc}$

(d) Damit h ein Homomorphismus ist, müsste für alle Wörter $w_1, w_2 \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*$ gelten, dass $h(w_1 \cdot w_2) = h(w_1) \cdot h(w_2)$. Wir betrachten $w_1 = \mathtt{0}$ und $w_2 = \mathtt{1}$. Dann gilt

$$h(w_1 \cdot w_2) = h(\mathtt{01}) = \mathtt{10} \neq \mathtt{01} = h(\mathtt{0}) \cdot h(\mathtt{1}) = h(w_1) \cdot h(w_2).$$

Also ist h kein Homomorphismus.

Aufgabe 5

$3 + 1 + 3 + 2 + 1 = 10$ Punkte

Im Folgenden finden Sie verschiedene Eigenschaften, die ein Graph $G = (V, E)$ haben kann. Geben Sie jeweils an, wie Graphen mit der entsprechenden Eigenschaft genannt werden.

(a)
- $\forall v \in V\colon\ \deg(v) = |V| - 1$
- G ist zusammenhängend und kreisfrei
- $\exists U \subseteq V\ \forall e \in E\colon |e \cap U| = 1$

Sei T ein Baum mit mindestens 2 Knoten, bei dem jeder innere Knoten Grad 4 hat. Es bezeichne n die Anzahl der Knoten, b die Anzahl der Blätter und i die Anzahl der inneren Knoten von T.

(b) Wie viele innere Knoten hat T, wenn T zehn Blätter hat?

(c) Zeigen Sie, dass T genau $\frac{2n-2-b}{4}$ innere Knoten hat.
Hinweis: Benutzen Sie das Handshake-Lemma. Sie dürfen (d) ***nicht*** *verwenden.*

(d) Zeigen Sie, dass T genau $\frac{b-2}{2}$ innere Knoten hat.
Hinweis: Wie hängen n, b und i zusammen? Nutzen Sie außerdem (c).
(Das dürfen Sie auch, wenn Sie (c) nicht bearbeitet haben.)

(e) Kann T genau 2025 Blätter haben? Begründen Sie ihre Antwort.
☐ Ja, denn … ☐ Nein, denn …

Lösung

(a)
- Vollständige Graphen
- Bäume
- Bipartite Graphen

(b) 4

(c) Wir nutzen das Handshake-Lemma, setzen die Knotengrade von T ein und nutzen, dass $|E(T)| = n - 1$, da T ein Baum ist.

$$
\begin{aligned}
& \sum_{v \in V(T)} \deg(v) = 2 \cdot |E(T)| \\
\implies \quad & b \cdot 1 + i \cdot 4 = 2 \cdot |E(T)| \\
\implies \quad & b \cdot 1 + i \cdot 4 = 2 \cdot (n-1) = 2n - 2 \\
\implies \quad & 4i = 2n - 2 - b \\
\implies \quad & i = \frac{2n - 2 - b}{4}
\end{aligned}
$$

(d) Jeder Knoten ist entweder ein Blatt oder ein innerer Knoten. Es gilt also $n = b + i$. Wir setzen das in das Ergbenis $i = \frac{2n-2-b}{4}$ aus (c) ein und bekommen damit:

$$
\begin{aligned}
i &= \frac{2(b+i) - 2 - b}{4} \\
\implies \quad i &= \frac{b + 2i - 2}{4} \\
\implies 4i &= b + 2i - 2 \\
\implies 2i &= b - 2 \\
\implies \quad i &= \frac{b-2}{2}
\end{aligned}
$$

(e) Nach (d) gilt, dass T genau $\frac{b-2}{2}$ innere Knoten hat. Für $b = 2025$ ist das keine ganze Zahl. Somit kann T nicht 2025 Blätter haben.

Alternativ weiß man durch das Handshake-Lemma, dass

$$\sum_{v \in V(T)} \deg(v) = 2 \cdot |E(T)|.$$

Somit ist die Summe über die Knotengrade von T gerade. Es gibt also eine gerade Anzahl Knoten mit ungeradem Grad. Da alle Knoten von T, die keine Blätter sind, Grad 4 haben, hat T eine gerade Anzahl Blätter. Somit kann T nicht 2025 Blätter haben.

Aufgabe 6 $2+2+2+2+2 = 10$ Punkte

(a) Gegeben seien die folgenden Mengen von Funktionen:

$$A = \mathcal{O}(n^{3/2}) \qquad B = \mathcal{O}(\log(n)) \qquad C = \mathcal{O}(\sqrt{n})$$
$$D = \mathcal{O}(2^n) \qquad E = \mathcal{O}(n^2) \qquad F = \mathcal{O}(1).$$

Tragen Sie in die Kästen jeweils eine der Mengen $X \in \{A, B, C, D, E, F\}$ ein, sodass eine wahre Aussage entsteht und für jede andere mögliche Wahl Y gilt, dass $X \subseteq Y$.

$$\frac{n^2+2n}{5n^2} \in \square \qquad (n + \sqrt[3]{n})^2 \in \square \qquad n^{0.4}\log(n) \in \square \qquad n\sqrt{n} \in \square$$

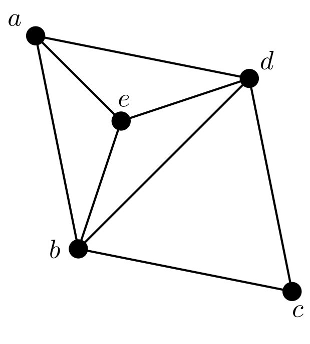
Gegeben sei der folgende Algorithmus $\mathcal{A}$, der als Eingabe einen Graphen $G = (V, E)$ bekommt. Er benutzt die Funktion IstClique, die als Eingabe einen Graphen G und eine Menge C an Knoten bekommt und genau dann *wahr* zurückgibt, wenn C eine Clique in G ist.
Erinnerung: Eine Clique C ist eine Knotenmenge mit $uv \in E$ für je zwei verschiedene Knoten $u, v \in C$.

Algorithmus $\mathcal{A}$

Eingabe: Graph $G = (V, E)$
Ausgabe: Menge D

$D \leftarrow \emptyset$
for all $C \subseteq V$ **do**
  if IstClique(G, C) und $|D| < |C|$ **then**
    $D \leftarrow C$

(b) Geben Sie an, was die Ausgabe D von Algorithmus $\mathcal{A}$ mit dem folgenden Graphen als Eingabe ist.



$D =$ $\square$

(c) Die Ausgabe von Algorithmus $\mathcal{A}$ hängt von der Reihenfolge der betrachteten C ab. Zeichnen Sie einen Graphen mit mindestens 6 Kanten, bei dem mindestens zwei verschiedene Ausgaben möglich sind. Geben Sie außerdem alle möglichen Ausgaben von $\mathcal{A}$ für diesen Graphen an.

(d) Die Funktion IstClique(G, C) hat Laufzeit $\mathcal{O}(|V|^2)$. Jeder andere Befehl (d. h. jede einzelne Zeile) benötigt Zeit $\mathcal{O}(1)$. Geben Sie die Laufzeit von Algorithmus $\mathcal{A}$ in Abhängigkeit von $n = |V|$ möglichst genau im $\mathcal{O}$-Kalkül an. Vereinfachen Sie so weit wie möglich.

Gegeben sei der folgende Algorithmus $\mathcal{B}$, der sich nur in Zeile 2 (**for all** ...) von Algorithmus $\mathcal{A}$ unterscheidet.

Algorithmus $\mathcal{B}$

Eingabe: Graph $G = (V, E)$

Ausgabe: Menge D

1: $D \leftarrow \emptyset$
2: **for all** $C \subseteq V$ mit $|C| \leq 6$ **do**
3:     **if** IstClique(G, C) und $|D| < |C|$ **then**
4:         $D \leftarrow C$

(e) Die Funktion IstClique(G, C) hat nun Laufzeit $\mathcal{O}(|C|^2)$. Jeder andere Befehl (d. h. jede andere einzelne Zeile) benötigt $\mathcal{O}(1)$ Zeit. Geben Sie die Laufzeit von Algorithmus $\mathcal{B}$ in Abhängigkeit von $n = |V|$ möglichst genau im $\mathcal{O}$-Kalkül an. Vereinfachen Sie so weit wie möglich.

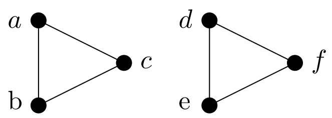
Lösung

(a)

$$\frac{n^2 + 2n}{5n^2} \in F \qquad (n + \sqrt[3]{n})^2 \in E \qquad n^{0.4} \log(n) \in C \qquad n\sqrt{n} \in A$$

(b) Der Algorithmus gibt die Menge $\{a, b, d, e\}$ aus.

(c) Der Algorithmus hat kein eindeutiges Ergebnis für alle Graphen, die mehrere größte Cliquen haben. Zum Beispiel hat der folgende Graph zwei mögliche Ausgaben, nämlich das Dreieck $\{a, b, c\}$ und das Dreieck $\{d, e, f\}$.



(d) Der Algorithmus führt für jede Teilmenge von V – also insgesamt $|2^V| = 2^n$ mal – IstClique(G, C) aus. IstClique(G, C) hat Laufzeit $\mathcal{O}(|V|^2) = \mathcal{O}(n^2)$. Also hat Algorithmus $\mathcal{A}$ Laufzeit $\mathcal{O}(2^n n^2)$.

(e) $\textsc{IstClique}(G, C)$ hat Laufzeit $\mathcal{O}(|C|^2) \subseteq \mathcal{O}(6^2) \subseteq \mathcal{O}(1)$. Der Algorithmus führt für jede Teilmenge von V mit höchstens 6 Elementen konstant viele Operationen aus, die alle Laufzeit $\mathcal{O}(1)$ haben. Es gibt insgesamt $\Pi_{i=0}^{5}(|V| - i) \leq |V|^6$ solche Teilmengen. Algorithmus $\mathcal{B}$ hat also Laufzeit $\mathcal{O}(n^6)$.