

Probeklausur zur Vorlesung Grundbegriffe der Informatik

1. Februar 2013

Hinweis: Diese Probeklausur wurde von Tutoren erstellt. Die An-/Abwesenheit bestimmter Aufgabentypen oder auch deren Schwierigkeit in der Probeklausur sagt nichts über die richtige Klausur aus. Diese Probeklausur wurde vor allem weder vom Übungsleiter noch von der Professorin konzipiert. Sie dient nur Übungszwecken.

Name:
Vorname:
Matr.-Nr.:
Tut.-Nr.:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
max. Punkte	5	12	4	6	8	7
tats. Punkte						

Gesamtpunktzahl:

Note:

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Kreuzen Sie für die folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch sind. Hinweis: Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Wenn Sie kein Kreuz setzen, bekommen Sie weder Plus- noch Minuspunkt, für das Ankreuzen beider Möglichkeiten wird ein Punkt abgezogen. Die gesamte Aufgabe wird mit mindestens 0 Punkten bewertet.

- (a) Das leere Wort ϵ ist definiert als die Abbildung

$$\epsilon : \{\} \rightarrow \{\} .$$

☐ wahr ☐ falsch

- (b) Es gilt $\{\}^* = \{\}$.

☐ wahr ☐ falsch

- (c) Die Menge der Produktionen bei kontextfreien Grammatiken ist endlich.

☐ wahr ☐ falsch

- (d) Die Relation $=$ auf den natürlichen Zahlen ist eine Äquivalenzrelation.

☐ wahr ☐ falsch

- (e) Die Abbildung

$$f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 : x \mapsto \begin{cases} x - 1 & \text{wenn } x > 0 \\ x + 1 & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

ist bijektiv.

☐ wahr ☐ falsch

Aufgabe 2 (2+3+4+3 Punkte)

Sei das Alphabet A die Menge aller 3-Vektoren über $\{0, 1\}$. Die Zeichen sind also zum Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in A$$

Sei

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in A^*.$$

Jede Zeile für sich lässt sich als Wort über $\{0, 1\}$ interpretieren. Die erste Zeile entspricht dann 011001.

- (a) Überführen Sie jede Zeile von w in eine Zahl im Dezimalsystem. Sie können zum Beispiel die in der Vorlesung definierte Funktion Num_2 benutzen.

- (b) Analog zu Zahlen im Dezimalsystem lassen sich Zahlen zur Basis 2 von rechts nach links addieren:

Zahl 1	0	1	0	1	0	10
Zahl 2	0	1	1	0	0	12
Übertrag	1	0	0	0	0	
Ergebnis	1	0	1	1	0	22

Sei

$$L_{\text{Add}} = \{w \in A^* \mid \text{Die dritte Zeile ist die Summe der ersten und zweiten Zeile}\}$$

Geben Sie 3 unterschiedliche Wörter der Sprache L_{Add} an, welche mindestens die Länge 4 haben.

-
- (c) Konstruieren Sie einen Automaten, der L_{Add} akzeptiert. Gehen sie dabei davon aus, dass ihr Automat die Zeichen in umgekehrter Reihenfolge erhält. (Den letzten 3-Vektor zuerst usw.). Tipp: Verwenden Sie drei Zustände. Gehen Sie vor, wie bei der schriftlichen Addition.
- (d) Geben sie zu L_{Add} einen regulären Ausdruck an. Gehen sie wieder davon aus, dass die Zeichen aus A in umgekehrter Reihenfolge angeordnet sind.

Name:

Matr.-Nr.:

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 2:

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Die Menge $M \subset \mathbb{Z}^2$ sei definiert durch:

- $(1, 1) \in M$
- Wenn $(m, n) \in M$, dann auch $(m + n + 1, n + 1) \in M$
- Keine anderen Elemente liegen in M .

Zeigen Sie durch strukturelle Induktion, dass für alle Elemente $(m, n) \in M$ gilt:

$$\frac{2m}{n} = n + 1$$

Name:

Matr.-Nr.:

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 3:

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Zu einer beliebigen Zahl b sei $b_k b_{k-1} \dots b_1 b_0$ die Binärdarstellung. Es sei folgender Algorithmus zum Berechnen von $a^b \bmod n$ gegeben:

```
 $d \leftarrow 1$ 
for  $i \leftarrow k$  to 0 do
   $d \leftarrow (d \cdot d) \bmod n$ 
  if  $b_i = 1$ 
    then  $d \leftarrow (d \cdot a) \bmod n$ 
  fi
rof
```

Beweisen Sie die Korrektheit des Algorithmus, indem Sie die Korrektheit der Schleifeninvariante

$$d_i = a^{(b_k \dots b_i)} \bmod n \quad \text{falls } k \geq i \geq 0$$

durch vollständige Induktion über i (von k nach unten) beweisen. Sie können dabei benutzen, dass für eine beliebige Zahl x gilt:

$$(x \bmod n)^2 \bmod n = x^2 \bmod n$$

Name:

Matr.-Nr.:

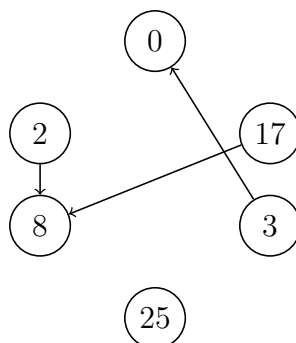
Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 4:

Aufgabe 5 (1+2+2+3 Punkte)

Gegeben sei folgende Adjazenzmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Ist der zugehörige Graph gerichtet oder ungerichtet?
- (b) Zeichnen Sie den Graphen, welcher die Adjazenzmatrix A besitzt.
- (c) Geben Sie die Wegematrix W an.
- (d) Gegeben sei folgender Graph. Ergänzen Sie die Kanten so, dass die Kantenrelation eine Äquivalenzrelation ist. Ergänzen Sie möglichst wenig Kanten.



Name:

Matr.-Nr.:

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 5:

Aufgabe 6 (7 Punkte)

Geben Sie eine Turingmaschine an, welche zu einer Zahl $n \in \mathbb{N}, n > 0$ ihren Rest bei der Division durch $m \in \mathbb{N}, m > 0$ berechnet: $n \bmod m$. Die eingegebenen Zahlen sind durch n bzw. m Einsen auf dem Band kodiert. Getrennt sind die beiden Zahlen durch ein $|$, also zum Beispiel

$$\dots \square 1111 | 111 \square \dots$$

bedeutet $4 \bmod 3$. Außerhalb der Zahlen stehen nur $\square$. Der Kopf steht über der letzten Eins. Als Ausgabe soll die Turingmaschine das Ergebnis wieder durch Einsen auf dem Band angeben. Die Eingabe soll nicht erhalten bleiben. Benutzen Sie als Bandalphabet $A = \{1, 0, \square, |\}$. Dabei steht 1 für die eingegebenen Zeichen, 0 ist ein mögliches Ersetzungszeichen, $|$ ist das Trennzeichen und $\square$ das Leerzeichen. Turingmaschinen mit mehr als 10 Zuständen werden nicht gewertet.

Name:

Matr.-Nr.:

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 6:

Notizen

Name:

Matr.-Nr.:

Notizen