Name: Matr.-Nr.:

Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zur Klausur am 5.3.2012

Lösungsvorschlag:

a) Eine Menge M ist unendlich, wenn es eine injektive Abbildung von M in eine echte Teilmenge von M gibt.

wahr

b) Wenn eine Relation nicht symmetrisch ist, ist sie antisymmetrisch.

falsch

c) Sei R eine beliebige Relation auf einer nicht-leeren Menge M.
R ist transitiv $\Rightarrow R \circ R \subseteq R$.

wahr

d) Sei R eine beliebige Relation auf einer nicht-leeren Menge M.
$R \circ R \subseteq R \Rightarrow R$ ist transitiv.

wahr

e) Das leere Wort ϵ ist eine surjektive Abbildung: $\{\} \to \{\}$.

wahr

f) Seien L_1 und L_2 formale Sprachen. $L_1^* = L_2^* \Rightarrow L_1 = L_2$.

falsch

g) $\sqrt{n} \in O(2^{\sqrt{\log_2(n)}})$

falsch

h) $\sqrt{n} \in \Theta(2^{\sqrt{\log_2(n)}})$

falsch

i) $\sqrt{n} \in \Omega(2^{\sqrt{\log_2(n)}})$

wahr

j) Gegeben seien zwei reguläre Ausdrücke $R_1 = \emptyset$`* | 0(0|1)* | (0|1)*00(0|1)*`
und $R_2 =$ `((0*1)*01*)*`
Es gilt: $\langle R_1 \rangle = \langle R_2 \rangle$.

falsch

k) Die Funktion $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ gibt als Funktionswert die größte Primzahl p zurück, für die gilt: $\exists k \in \mathbb{N}_+ : n = k \cdot p$
Es gilt $f(n) \in O(\sqrt{n})$.

falsch

l) Die aussagenlogische Formel $(A \Rightarrow \neg B) \vee ((B \wedge \neg C) \wedge (C \vee D)) \vee A$ ist äquivalent zu $A \vee \neg A$

wahr

Name: Matr.-Nr.:

Lösungsvorschlag

1. (a) $\{\mathtt{a}, \mathtt{a}^3\}$ sind nicht in L.

   (b) Für alle $w_1, w_2 \in A^*$ ist $w_1 \equiv_L w_2 \iff \forall w \in A^* : w_1 w \in L \iff w_2 w \in L$

   (c)
   - $[\epsilon] = \langle\emptyset *\rangle$
   - $[\mathtt{a}] = \langle\mathtt{a}\rangle$
   - $[\mathtt{aa}] = \langle\mathtt{aa}\rangle$
   - $[\mathtt{aaa}] = \langle\mathtt{aaa}\rangle$
   - $[\mathtt{aaaa}] = \langle\mathtt{aaaaa*}\rangle$

2. (a) Sei $x \in D$ beliebig.
   $x = (a, b)$, mit $a \in A, b \in B, f(a) = g(b)$
   $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(h(a, b)) = f(a) = g(b) = g(k(a, b)) = g(k(x)) = (g \circ k)(x)$.

   (b) $D = \{(2c^2, 2c) | c \in \mathbb{Z})$

3. Es gibt 5 verschiedene Äquivalenzrelationen auf einer drei-elementigen Menge.

   Sei $M = \{a, b, c\}$. Dann gibt es folgende fünf Möglichkeiten:

   - $[a], [b], [c]$
   - $[ab], [c]$
   - $[a], [bc]$
   - $[ac], [b]$
   - $[abc]$

Lösungsvorschlag:

a)

f(x,y)	**y=0**	**y=1**	**y=2**	**y=3**	**y=4**
x=0	0	1	2	3	4
x=1	1	0	3	2	5
x=2	2	3	0	1	6
x=3	3	2	1	0	7
x=4	4	5	6	7	0

b) **Induktionsanfang:** Für $n = 0 : f(0, 0) = 0$,
für $n = 1 : f(0, 1) = f(1, 0) = 1 \neq 0\surd$.

Induktionsvoraussetzung:

Für alle $x + y \leq n$ und beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gelte: für $x \neq y$ ist $f(x, y) \neq 0$ und für $x = y$ ist $f(x, y) = 0$.

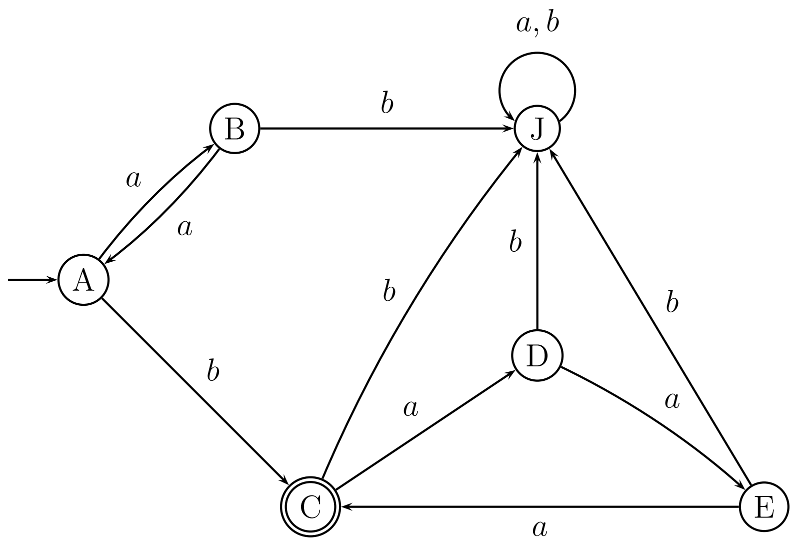
Induktionsschritt: Sei $\hat{x} + y = n + 1$: Ist $\hat{x} > y$, so ist nach IV und Definition der Funktion $f(\hat{x}, y) \neq f(y, y) = 0$.
Ist $\hat{x} < y$, so ist nach IV und Definition der Funktion $f(\hat{x}, y) \neq f(y, y) = 0$.

Ist nun $\hat{x} = y$, so ist $f(\hat{x}, y) = \min\{z \mid \forall x' < \hat{x} : z \neq f(x', y) \text{ und } \forall y' < y : z \neq f(\hat{x}, y')\}$.

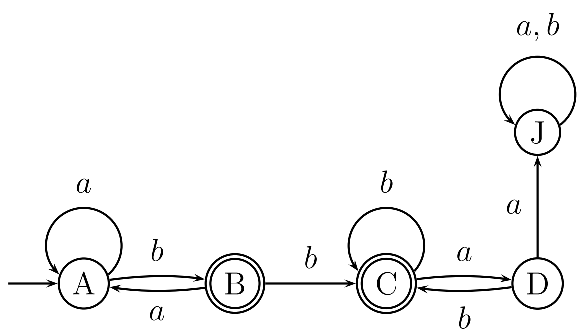
Nach IV sind alle Elemente, die betrachtet werden ungleich Null, woraus folgt, dass für $\hat{x} = y$ gilt: $f(\hat{x}, y) = 0$.

Da nach Aufgabenbeschreibung gilt: $\forall x, y \in \mathbb{N}_0 : f(x, y) = f(y, x)$, gilt die Aussage für alle x, y.

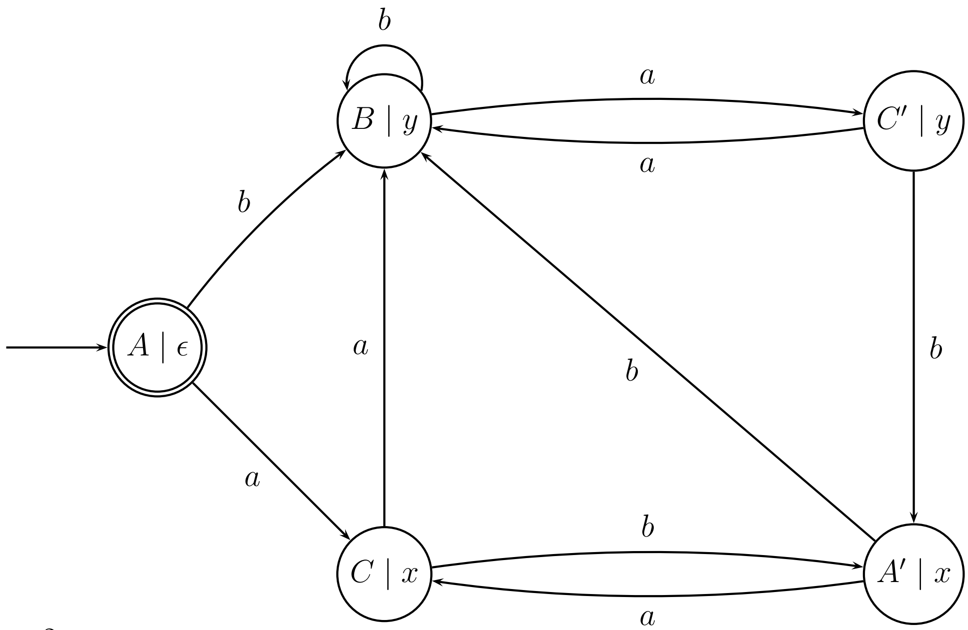
Lösungsvorschlag:



1. a)



b)



2.

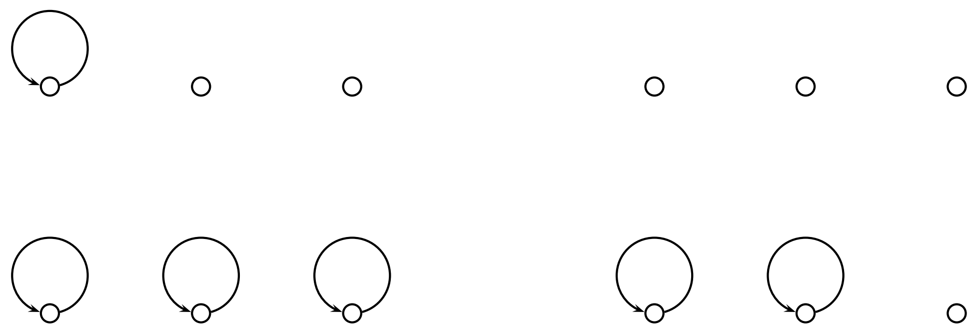
Lösungsvorschlag:

a) $G = (\{S, X, Y, A, B\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}, S, P\}$ mit
$P = \{S \to Y\mathtt{d} \mid \mathtt{ab}B\mathtt{d},$
$X \to \mathtt{c}X \mid \epsilon,$
$Y \to Y\mathtt{d} \mid \mathtt{ab}A\mathtt{c},$
$A \to \mathtt{ab}A\mathtt{c} \mid \epsilon,$
$B \to \mathtt{ab}B\mathtt{d} \mid \mathtt{c}X\}.$

b)
- `ababccd`
- `ababcdd`
- `abccccd`
- `abcdddd`

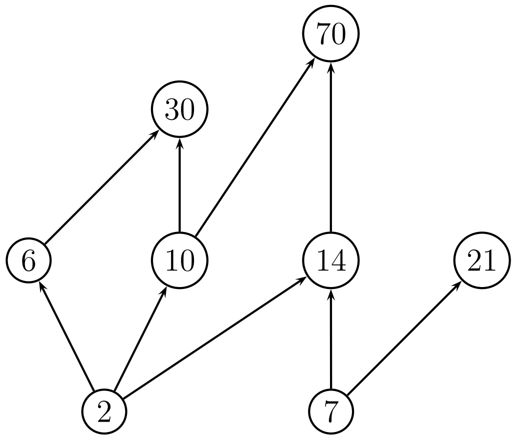
Lösungsvorschlag:

1. Es gibt folgende 4 Möglichkeiten:



2. Angenommen G und G' seien isomorph.

   $G \cup G'$ wäre (nach Definition von G') der vollständige Graph G_{voll}, also ein (schlingenfreier) Graph, in dem jeder Knoten mit jedem anderen Knoten über eine Kante verbunden ist. Die Anzahl der Kanten in G_{voll} beträgt $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$, für $n = |V|$. Da nach Annahme G und G' isomorph sind, gilt $|E| = |E'| = \frac{n \cdot (n-1)}{4}$. Für $n = 5$ müsste der Baum G also 5 Kanten haben, was nach Definition eines Baumes nicht möglich sein kann.
   Die Annahme war folglich falsch $\Rightarrow$ G und G' sind nicht isomorph.



3. (a)

   (b) Maximale Elemente: 21, 30 und 70
   Minimale Elemente: 2 und 7
   Es gibt keine kleinsten und keine größten Elemente.

Lösungsvorschlag:

1. (a) Wir schreiben den Zustand der Turingmaschine immer vor das Zeichen, auf dem sich der Kopf befindet.

   Anfangskonfiguration: S`baab`

   Zwischenkonfigurationen:

   $\#z_1$`aab`

   $B\#\#$`ab`

   $\#\#\#z_0$`b`

   $\#\#B\#\#$

   Endkonfiguration: $\#\#\#\#S\square$

   Anfangskonfiguration: S`aba`

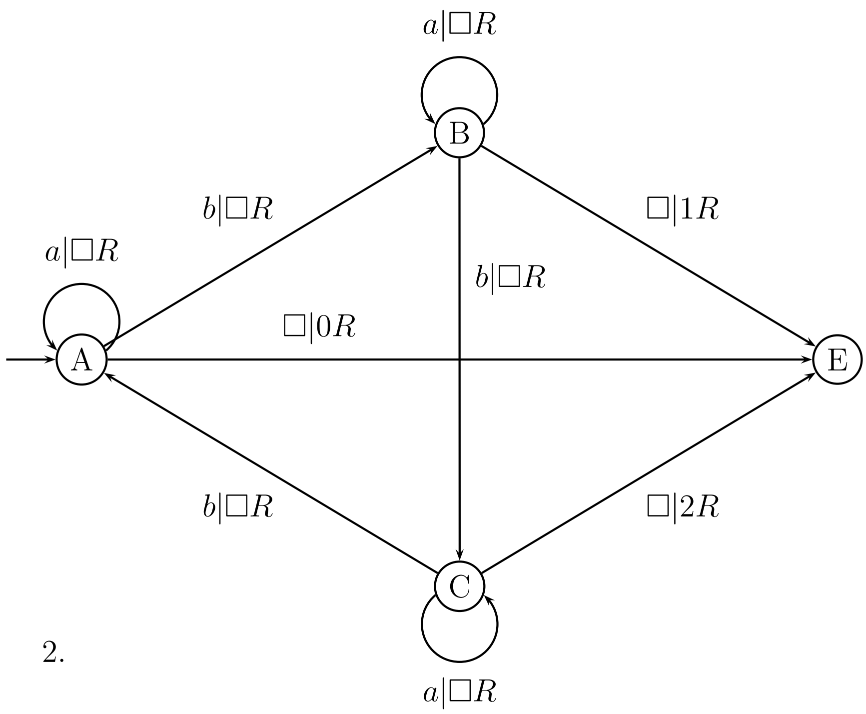
   Zwischenkonfigurationen:

   $\#z_0$`ba`

   $B\#\#$`a`

   Endkonfiguration: $\#\#\#z_0\square$

   (b) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid N_a(w) = N_b(w)\}$



2.