Lösungsvorschläge und Erläuterungen

Klausur zur Vorlesung
Grundbegriffe der Informatik
15. September 2016

Klausur-nummer			

Nachname:
Vorname:
Matr.-Nr.:

Diese Klausur ist mein ☐ 1. Versuch ☐ 2. Versuch in GBI

Email-Adr.:

nur falls 2. Versuch

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	7	7	8	6	5	6	6
tats. Punkte							

Gesamtpunktzahl:		Note:	

/ 7

Aufgabe 1 (1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 = 7 Punkte)

/1

a) Geben Sie die Zweierkomplement-Darstellung der Zahl -1 mit 7 Bits an.

Antwort: `1111111`

/1

b) Ein gerichteter Graph G enthalte zwei verschiedene Knoten x und y mit der Eigenschaft, dass es in G einen Pfad von x nach y gibt und auch einen Pfad von y nach x. Ist G stets streng zusammenhängend?

Antwort: Nein

/1

c) Ist $2^{(\sqrt{n})^2} \in O(n^3)$?

Antwort: Nein

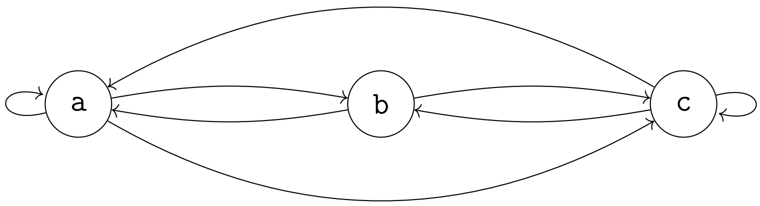
/1

d) Ist $2^{2n} \in O(2^n)$?

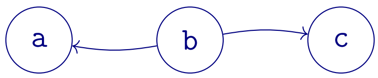
Antwort: Nein

/2

e) Ein Teilgraph H eines Graphen G heißt *aufspannender Baum von* G, wenn H ein Baum ist und dieselbe Knotenmenge wie G hat. Geben Sie graphisch einen aufspannenden Baum des folgenden Graphen an:

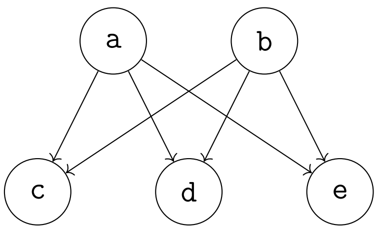


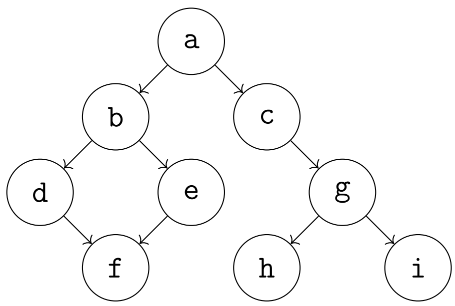
Antwort:

Es gibt viele Möglichkeiten; z.B.: 

/1

f) Welche der zwei folgenden Graphen sind Bäume?





Antwort: Keiner

Erläuterungen:

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Zweierkomplementdarstellung von -1 mit n Bits gerade 1^n.

b) ...

c) $2^{(\sqrt{n})^2}$ ist gleich 2^n, wächst also exponentiell und damit asymptotisch schneller als n^3, welches polynomiell wächst.

d) $\frac{2^{2n}}{2^n}$ ist gleich 2^n, divergiert für $n \to \infty$ also gegen ∞. Somit ist 2^{2n} nicht asymptotisch durch 2^n beschränkt.

e) ...

f) Der linke Graph ist kein Baum, da es keinen Knoten gibt mit der Eigenschaft, dass es von diesem zu jedem anderen genau einen Pfad gibt. Salopp ausgedrückt: Es gibt keine Wurzel.

Der rechte Graph ist kein Baum, da der Knoten `a` der einzige ist, der als Wurzel in Frage käme, es von `a` nach `f` jedoch zwei Pfade gibt, einer der über `d` und ein anderer der über `e` läuft, und somit `a` keine Wurzel ist. Da kein anderer Knoten als Wurzel in Frage kommt, ist der Graph also kein Baum.

Korrekturhinweise:

a) Für die Antwort `1111111` gibt es 1 Punkt, ansonsten 0 Punkte, insbesondere für nicht explizite Antworten wie $\mathrm{Zkl}_7(-1)$ und ähnliches.

b) Für die Antwort „Nein“ (und sinngleiches) gibt es 1 Punkt, für die Antwort „Ja, wenn der Graph nur aus diesen beiden Knoten besteht“ gibt es 0.5 Punkte, ansonsten gibt es 0 Punkte.

c) Für die Antwort „Nein“ (und sinngleiches) gibt es 1 Punkt, ansonsten gibt es 0 Punkte.

d) Für die Antwort „Nein“ (und sinngleiches) gibt es 1 Punkt, ansonsten gibt es 0 Punkte.

e) Für einen aufspannenden Baum gibt es 2 Punkte. Für fehlende Pfeilspitzen wird 1 Punkt abgezogen.

f) Für die Antwort „keiner“ (und sinngleiches) gibt es 1 Punkt. Für eine der Antworten „der Linke“ oder „der Rechte“ (und sinngleiches) gibt es 0.5 Punkte. Für die Antwort „beide“ (und sinngleiches) gibt es 0 Punkte.

/ 7

Aufgabe 2 (4 + 1 + 2 = 7 Punkte)

Für ein Wort $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}\}^*$ hat sich bei der Huffman-Codierung folgende Abbildung ergeben:

x	a	b	c	d	e
$h(x)$	01	0000	001	1	0001

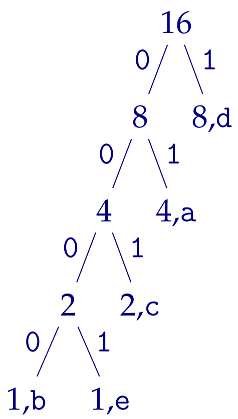
a) Zeichnen Sie einen Huffman-Baum (einschließlich aller Beschriftungen und Häufigkeiten), aus dem diese Codierung abgelesen werden kann.

b) Zeichnen Sie einen Baum ohne Knoten- und Kantenbeschriftungen, der *niemals* als Struktur eines Huffman-Baumes entstehen kann.

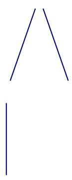
c) Geben Sie eine Bedingung an, die notwendig und hinreichend dafür ist, dass ein Baum die Struktur eines Huffman-Baumes sein kann.

Lösung 2

a)



b)



c) Jeder innere Knoten hat Ausgangsgrad 2.

Oder als prädikatenlogische Formel ausgedrückt:

$$\forall v \in V : (\ d^+(v) = 2\ ) \vee (\ d^+(v) = 0\ ).$$

Korrekturhinweise:

a) Für einen Huffman-Baum mit Kantenbeschriftungen, Knotenbeschriftungen und Häufigkeiten gibt es 4 Punkte. Für fehlende oder falsche Häufigkeiten gibt es 1 Punkt Abzug. Für fehlende oder falsche Kantenbeschriftungen gibt es 1 Punkt Abzug. Für fehlende oder falsche Knotenbeschriftungen gibt es 1 Punkt Abzug.

b) Für einen *Baum* mit der gewünschten Eigenschaft gibt es 1 Punkt, ansonten gibt es 0 Punkte, insbesondere wenn der angegebene Graph kein Baum ist.

c) Ist die Bedingung notwendig gibt es 1 Punkt, ist sie hinreichend gibt es 1 Punkt und ist sie beides gibt es 2 Punkte. Für triviale notwendige Bedingungen, wie beispielsweise „ist ein Baum“, gibt es nur 0.5 Punkte.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 2:

/ 8

Aufgabe 3 (3 + 2 + 3 = 8 Punkte)

Es sei A ein Alphabet, für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei V_n die Menge $\bigcup_{i=0}^{n} A^i$, für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ sei $E_{n,k}$ die Menge

$$\{ (v, w) \in V_n \times V_n \mid (v \text{ ist ein Präfix von } w) \text{ und } (|v| + 1 \leq |w|) \text{ und } (|w| \leq |v| + k) \}$$

und es sei $G_{n,k}$ der gerichtete Graph $(V_n, E_{n,k})$.

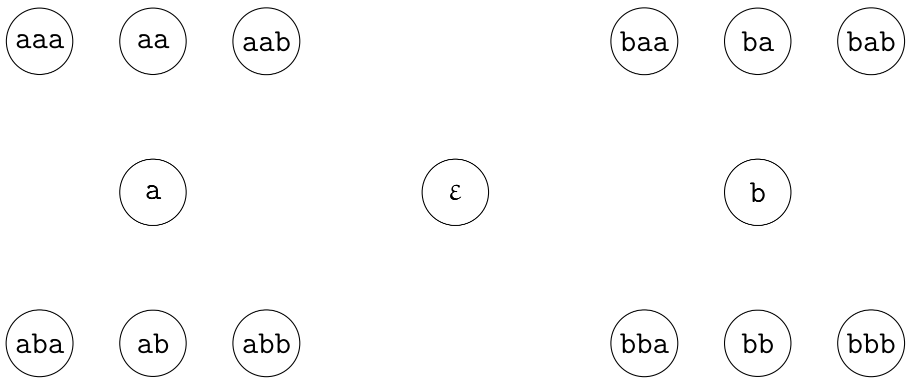
a) In dieser Teilaufgabe sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.

/1.5

(i) Zeichnen Sie die Graphen $G_{1,1}$, $G_{2,1}$ und $G_{3,1}$.

/1

(ii) Ergänzen Sie die folgende Zeichnung um die Kanten des Graphen $G_{3,2}$:



/0.5

(iii) Ist der Graph aus Teilaufgabe (ii) planar?

Hinweis: Ein Graph ist genau dann *planar*, wenn er so in der Ebene gezeichnet werden kann, dass sich keine Kanten kreuzen.

/2

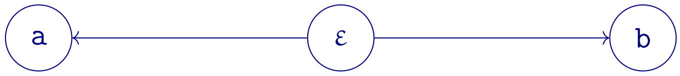
b) Beweisen Sie, dass für jedes $(m, j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ und jedes $(n, k) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$ und $j \leq k$ der Graph $G_{m,j}$ ein Teilgraph von $G_{n,k}$ ist.

/3

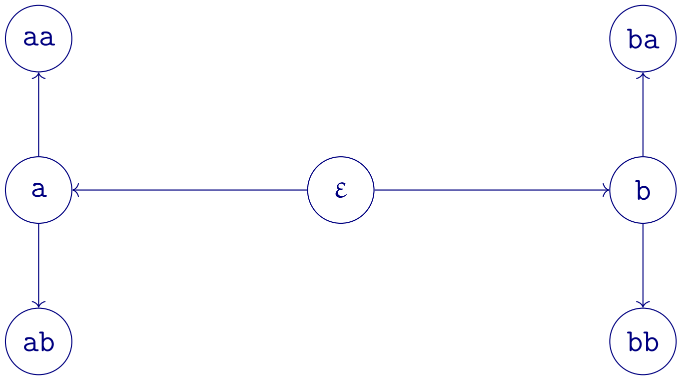
c) Geben Sie jedes Tupel $(n, k) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ an, für welches der Graph $G_{n,k}$ ein gerichteter Baum ist.

Lösung 3

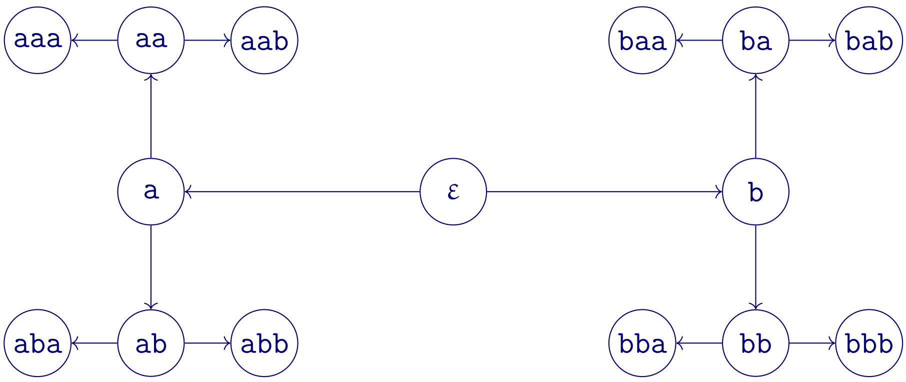
a) (i) $G_{1,1}$:



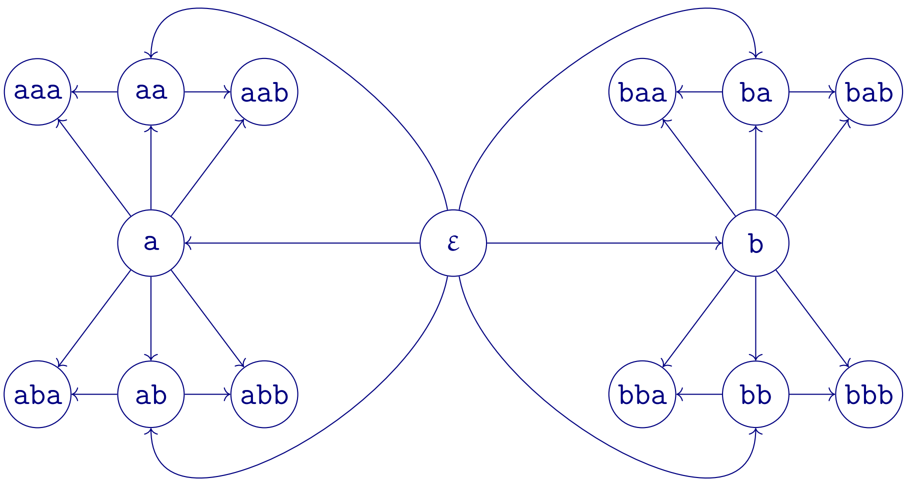
$G_{2,1}$:



$G_{3,1}$:



(ii)



(iii) Ja. Siehe Lösung der vorangegangenen Teilaufgabe.

b) Es seien $(m, j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ und $(n, k) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ so, dass $m \leq n$ und

$j \leq k$ gilt. Dann ist

$$V_n = \bigcup_{i=0}^{n} A^i = \left(\bigcup_{i=0}^{m} A^i\right) \cup \left(\bigcup_{i=m+1}^{n} A^i\right) = V_m \cup \left(\bigcup_{i=m+1}^{n} A^i\right).$$

Also ist $V_m \subseteq V_n$.

Außerdem gilt für jedes $(v, w) \in E_{m,j}$, dass v ein Präfix von w ist und dass $|v| + 1 \leq |w| \leq |v| + j \leq |v| + k$ gilt, also ein Element von $E_{n,k}$ ist. Somit ist $E_{m,j} \subseteq E_{n,k}$.

Insgesamt ist $G_{m,j}$ ein Teilgraph von $E_{n,k}$.

c) Die Graphen $G_{0,k}$, für $k \in \mathbb{N}_0$, haben nur einen Knoten, sind also gerichtete Bäume.

Der Graph $G_{1,0}$ ist unzusammenhängend, also *kein* gerichteter Baum. Die Graphen $G_{1,k}$, für $k \in \mathbb{N}_+$, sind gerichtete Bäume.

Die Graphen $G_{n,1}$, für $n \in \mathbb{N}_0$, sind gerichtete Bäume.

Die Graphen $G_{n,k}$, für $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq 2$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \geq 2$, sind *keine* gerichteten Bäume.

Erläuterungen:

a) TODO

Korrekturhinweise:

a) (i) Für jeden korrekt gezeichneten Graphen gibt es 0.5 Punkte, wobei Folgefehler zu keinem Punktabzug führen.

(ii) Für korrekt eingezeichnete Kanten gibt es 1 Punkt, wobei Folgefehler aus der vorangegangen Teilaufgabe zu keinem Punktabzug führen.

(iii) Für die richtige Antwort in Bezug auf den Graphen der vorangegangen Teilaufgabe gibt es 0.5 Punkte.

b) Für die Inklusion $V_m \subseteq V_n$ gibt es 1 Punkt und für die Inklusion $E_{m,j} \subseteq E_{n,k}$ gibt es 1 Punkt.

c) Für die Paare $(0, k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, gibt es 1 Punkt, für die Paare $(1, k)$, $k \in \mathbb{N}_+$, gibt es 1 Punkt und für die Paare $(n, 1)$, $n \in \mathbb{N}_0$, gibt es 1 Punkt.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 3:

/ 6

Aufgabe 4 (1 + 1 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Es sei L die formale Sprache aller nicht-leeren Wörter über $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, deren erstes und letztes Symbol verschieden sind, das heißt,

$$L = \{\, w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^+ \mid w_0 \neq w_{|w|-1} \,\},$$

wobei für jedes $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^+$ und jedes $i \in \mathbb{Z}_{|w|}$ der Ausdruck w_i das i-te Symbol von w bezeichne.

/1

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, die die Sprache L erzeugt.

/1

b) Geben Sie für das Wort `aabab` einen Ableitungsbaum an, der zu Ihrer Grammatik aus Teilaufgabe a) passt.

/2

c) Geben Sie eine *rechtslineare* Grammatik G' an, die die Sprache L erzeugt.

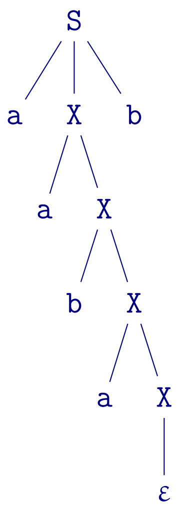
/2

d) Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl k_n der Wörter der Länge n an, die in L enthalten sind.

Lösung 4

a) $G = (N, T, S, P)$, wobei $N = \{\mathtt{S}, \mathtt{X}\}$, $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und

$$\begin{aligned} P = \{\mathtt{S} &\longrightarrow \mathtt{aXb} \mid \mathtt{bXa}, \\ \mathtt{X} &\longrightarrow \mathtt{aX} \mid \mathtt{bX} \mid \varepsilon\}. \end{aligned}$$

b) 

c) $G' = (N', T', \mathtt{S}, P')$, wobei $N' = \{\mathtt{S}, \mathtt{A}, \mathtt{B}\}$, $T' = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und

$$\begin{aligned} P' = \{\mathtt{S} &\longrightarrow \mathtt{aB} \mid \mathtt{bA}, \\ \mathtt{A} &\longrightarrow \mathtt{aA} \mid \mathtt{bA} \mid \mathtt{a}, \\ \mathtt{B} &\longrightarrow \mathtt{aB} \mid \mathtt{bB} \mid \mathtt{b}\}. \end{aligned}$$

d) $k_0 = k_1 = 0$
Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq 2$ ist $k_n = 2 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-1}$.

Erläuterungen:

a) TODO

b) TODO

c) Das einzige Wort der Länge 0 ist das leere Wort und dieses ist nach Definition nicht in L.

Die einzigen Wörter der Länge 1 sind $\mathtt{a}$ und $\mathtt{b}$ und diese sind nach Definition nicht in L.

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq 2$. Ein Wort w der Länge n ist genau dann in L, wenn es von der Gestalt $\mathtt{a}v\mathtt{b}$ oder $\mathtt{b}v\mathtt{a}$ ist, wobei v ein Wort aus $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^{n-2}$ ist. Also gibt es $2 \cdot |\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^{n-2}|$-viele Wörter der Länge n in L. Außerdem ist $|\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^{n-2}| = 2^{n-2}$.

Korrekturhinweise:

a) TODO

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 4:

/ 5

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Die Abbildung $\otimes\colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ sei wie folgt induktiv definiert:

$$\forall k \in \mathbb{N}_0\colon k \otimes 0 = k,$$
$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \;\; \forall \ell \in \mathbb{N}_0\colon k \otimes (\ell + 1) = (k \otimes \ell) + 1.$$

Beweisen Sie die folgende Aussage durch vollständige Induktion über z:

$$\forall x \in \mathbb{N}_0 \; \forall y \in \mathbb{N}_0 \; \forall z \in \mathbb{N}_0\colon (x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

Lösung 5

Es sei $x \in \mathbb{N}_0$ und es sei $y \in \mathbb{N}_0$. Nun ist durch vollständige Induktion über z folgendes zu zeigen:

$$\forall z \in \mathbb{N}_0 \colon (x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z). \tag{$*$}$$

Induktionsanfang: Nach den Basisfällen in der induktiven Definition von $\otimes$ gilt:

$$(x \otimes y) \otimes 0 = x \otimes y = x \otimes (y \otimes 0).$$

Induktionsschritt: Es sei $z \in \mathbb{N}_0$ derart, dass gilt:

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z) \qquad \text{(Induktionsvoraussetzung)}$$

Nach den Nichtbasisfällen in der induktiven Definition von $\otimes$ und der Induktionsvoraussetzung gilt:

$$\begin{aligned}(x \otimes y) \otimes (z+1) &= ((x \otimes y) \otimes z) + 1 \\ &= (x \otimes (y \otimes z)) + 1 \\ &= x \otimes ((y \otimes z) + 1) \\ &= x \otimes (y \otimes (z+1)).\end{aligned}$$

Schlussworte: Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist die Aussage $(*)$ wahr. Und da x und y beliebig gewählt waren folgt daraus die zu beweisende Aussage.

Erläuterungen:

a) TODO

Korrekturhinweise:

a) Induktionsanfang: 1.5 Punkte

b) Induktionsschritt: 1 Punkt für die Induktionsvoraussetzung und 2.5 Punkte für den Rest.

c) Ist z in der Induktionsvoraussetzung allquantifiziert, so gibt es 1 Punkt Abzug.

d) Für fehlende Quantifizierungen und ähnliches gibt es 0.5 Punkte Abzug.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 5:

/ 6

Aufgabe 6 **(2 + 1 + 2 + 1 = 6 Punkte)**

Auf einem Tisch stehen drei Kisten mit den Nummern 1, 2 und 3. Jede Kiste kann Gold enthalten oder leer sein. Für $i \in \{1, 2, 3\}$ sei

G_i die Aussage „Die Kiste i enthält Gold."

Außerdem steht auf jeder Kiste i ($i \in \{1, 2, 3\}$) eine Nachricht N_i:

N_1: „In dieser Kiste ist kein Gold."
N_2: „In dieser Kiste ist kein Gold."
N_3: „In Kiste 2 ist Gold."

a) Drücken Sie die Aussage

K_1: „In genau einer Kiste ist Gold, die beiden anderen sind leer."

durch eine aussagenlogische Formel mit den Variablen G_i aus.

$(G_1 \wedge \neg G_2 \wedge \neg G_3) \vee (\neg G_1 \wedge G_2 \wedge \neg G_3) \vee (\neg G_1 \wedge \neg G_2 \wedge G_3)$

b) Drücken Sie jede der Nachrichten N_i durch eine aussagenlogische Formel mit den Variablen G_i aus.

N_1: $\neg G_1$

N_2: $\neg G_2$

N_3: G_2

c) Drücken Sie die Aussage

K_2 : „Genau eine der Nachrichten N_i ist wahr, die anderen sind falsch."

durch eine aussagenlogische Formel mit den Variablen G_i aus.

$(\neg G_1 \wedge \neg\neg G_2 \wedge \neg G_2) \vee (\neg\neg G_1 \wedge \neg G_2 \wedge \neg G_2) \vee (\neg\neg G_1 \wedge \neg\neg G_2 \wedge G_2)$

oder einfacher

$(\neg G_1 \wedge G_2 \wedge \neg G_2) \vee (G_1 \wedge \neg G_2 \wedge \neg G_2) \vee (G_1 \wedge G_2 \wedge G_2)$

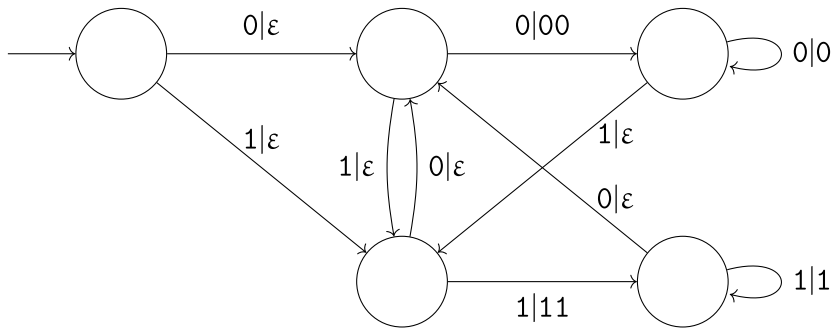
d) Geben Sie eine Belegung der Variablen G_i mit Wahrheitswerten an, für die die Aussagen K_1 aus Teilaufgabe a) und K_2 aus Teilaufgabe c) gleichzeitig wahr sind.

G_1 wahr und G_2 und G_3 falsch (das ist die einzige Möglichkeit)

/ 6

Aufgabe 7 **(2 + 2 + 2 = 6 Punkte)**

Es sei der nachfolgend dargestellte Mealy-Automat M mit Eingabealphabet $X = \{0, 1\}^*$ und Ausgabealphabet $Y = \{0, 1\}^*$ gegeben:



Es sei $g\colon Z \times X \to Y^*$ die Ausgabefunktion des Mealy-Automaten und es sei z_0 sein Anfangszustand.

a) Welche „Gesamtausgabe" $g_{**}(z_0, w)$ erzeugt der Automat für jede der folgenden Eingaben w: /

- $w = 010$ $\quad g_{**}(z_0, w) =$ ε
- $w = 0110$ $\quad g_{**}(z_0, w) =$ 11
- $w = 0010111001$ $\quad g_{**}(z_0, w) =$ 0011100

b) Für welche Eingaben $w \in X^*$ liefert der Automat als Ausgabe das leere Wort (also $g_{**}(z_0, w) = \varepsilon$)? /

c) Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der die formale Sprache /

$$L = \{g_{**}(z_0, w) \mid w \in X^*\}$$

beschreibt, also die Menge aller Wörter, die der Automat als Ausgaben für beliebige Eingaben erzeugt.

Lösung 7

a) siehe oben

b) Für genau die Wörter, in denen nirgends zwei gleiche Symbole hintereinander vorkommen. Als regulärer Ausdruck zum Beispiel:

`(1|∅*)(01)*(0|∅*)`

c) `(000*|111*)*`

Korrekturhinweise:

a) 0.5 + 0.5 + 1 Punkt

b) ?

c) ?

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 7: