Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1.1 (2 Punkte)
Schreiben Sie die Definitionen von Injektivität und Surjektivität einer Funktion als prädikatenlogische Formeln auf.

Lösung 1.1

- Injektivität bedeutet, dass eine Funktion $f : A \to B$ linkseindeutig ist:

  $$\forall (a_1, b_1) \in f \; \forall (a_2, b_2) \in f : a_1 \neq a_2 \Rightarrow b_1 \neq b_2 \; .$$

  Äquivalent ist die Aussage, dass keine zwei verschiedenen Elemente aus A auf das gleiche Element aus B abgebildet werden:

  $$\forall a \in A \; \forall a' \in A : a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$$

- Surjektivität bedeutet, dass eine Funktion $f : A \to B$ rechtstotal ist:

  $$\forall b \in B \; \exists a \in A : f(a) = b \; .$$

Aufgabe 1.2 (1+2 Punkte)

a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Wahrheitswerten der beiden aussagenlogischen Formeln $A \Rightarrow B$ und $\neg B \Rightarrow \neg A$?

b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Wahrheitswerten der beiden aussagenlogischen Formeln $A \Rightarrow B$ und $\neg A \Rightarrow \neg B$?

Lösung 1.2

a) Zur Beantwortung der Frage stellen wir die Wahrheitstabelle für $A \Rightarrow B$ und $\neg B \Rightarrow \neg A$ auf:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Als Ergebnis erhalten wir:

Die Wahrheitswerte von $A \Rightarrow B$ und $\neg B \Rightarrow \neg A$ sind immer gleich.

b) Wir stellen wieder die Wahrheitstabelle auf:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A \Rightarrow \neg B$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Ergebnis: Die Wahrheitswerte von $A \Rightarrow B$ und $\neg A \Rightarrow \neg B$ können nicht beide *falsch* sein. (Mehr Zusammenhang gibt es nicht.)

Aufgabe 1.3 (3+1+1+1+1 Punkte)

a) Beweisen Sie: Jede surjektive Abbildung $f : M \to M$ einer *endlichen* Menge M auf sich selbst ist auch injektiv. (Hinweis: Aufgabe 1.2)
b) Gilt auch die Umkehrung? (ohne Begründung)
c) Geben Sie eine Abbildung $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ an, die injektiv aber nicht surjektiv ist.
d) Geben Sie eine Abbildung $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ an, die surjektiv aber nicht injektiv ist.
e) Geben Sie eine unendliche Menge M und eine Abbildung $f : M \to M$ an, die injektiv und surjektiv ist.

Lösung 1.3

a) Wegen 1.2 ist diese Aussage äquivalent zu der Aussage: f nicht injektiv $\Rightarrow$ f nicht surjektiv.

Wenn $f : M \to M$ nicht injektiv ist folgt daraus, dass es Elemente $x_1, x_2 \in M$ gibt für die $f(x_1) = f_(x_2)$ und $x_1 \neq x_2$ gilt.

Sei $M' = M \setminus \{x_1, x_2\}$. Dann ist $|M'| = |M| - 2$.

$f(M) = f(M') \cup f(\{x_1, x_2\}) = f(M') \cup f(\{x_1\})$

$|f(M)| \leq |f(M')| + |f(\{x_1\})| \leq |M| - 2 + 1 = |M| - 1$.

Wenn $f : M \to M$ surjektiv ist gilt $\forall y \in M \exists x \in M : f(x) = y$. Dies bedeutet $M \subseteq \{y | \exists x \in M : f(x) = y\} = f(M)$, woraus man $|M| \leq |f(M)|$ folgern kann.

Da für eine nicht injektive Funktion $f : M \to M$
$|f(M)| \leq |M| - 1$ gilt, kann nicht mehr $|M| \leq |f(M)|$ gelten.

Somit kann $f : M \to M$ nur dann (höchstens dann) surjektiv sein, wenn f auch injektiv ist.

Daraus folgt die Behauptung.

b) Ja.

Auch wennes nicht verlangt war, hier ein Beweis zum Üben vollständiger Induktion.

Sei $f : M \to M$ eine injektive Abbildung.

Wir beweisen zuerst für alle $M' \subseteq M$ durch Induktion über $|M'|$ dass für $f(M') = \{y \in M \mid \exists x \in M' : f(x) = y\}$ gilt: $|f(M')| = |M'|$.

Induktionsanfang:

- $|M'| = 0$: Es gilt offensichtlich $f(\{\}) = \{\}$ und $|f(M')| = |M'|$ gilt.
- $|M'| = 1$: Sei $M' = \{x\}$. Dann gilt wegen $f(\{x\}) = \{f(x)\}$ und $|f(M')| = |M'|$ gilt.

Induktionsschritt:

Induktionsannahme: Für ein festes $k < |M|$ gilt für alle Teilmengen M' von M, die höchstens k Elemente enthalten, die Behauptung $|f(M')| = |M'|$.

Induktionsschluss: Wenn die Induktionsannahme gilt, dann gilt die Behauptung auch für alle Teilmengen M' von M, die $k+1$ Elemente enthalten:
Sei $M' \subseteq M$ eine Teilmenge von M, die $k+1$ Elemente enthalte, $x \in M'$ und $M'' = M' \setminus \{x\}$.
Dann gilt: $f(M') = f(M'') \cup f(\{x\}) = f(M') \cup \{f(x)\}$.
Da f injektiv ist gilt $f(x) \notin f(M'')$, nach Induktionsannahme gilt $|f(M'')| = k$ und wir erhalten
$|f(M')| = |f(M'')| + |\{f(x)\}| = k + 1 = |M'|$
Damit ist gezeigt, dass für alle Teilmengen $M' \subseteq M$ die Gleichung $|f(M')| = |M'|$ gilt; insbesondere gilt $|f(M)| = |M|$.
Da $f : M \to M$ M nach M abbildet, gilt ebenfalls $f(M) \subseteq M$, und da die einzige Teilmenge von M mit $|M|$ Elementen gerade M ist, ergibt sich $f(M) = M$.
Anders geschrieben ergibt sich:
$M = \{y \in M \mid \exists x \in M : f(x) = y\}$ und damit
$\forall y \in M \exists x \in M : f(x) = y$.
Dies bedeutet, dass f surjektiv ist.

c) Beispiel:

$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$
$n \mapsto 2n$,

da ungerade Zahlen nicht in $f(\mathbb{N}_0)$ liegen.

d) Beispiel:

$$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$$
$$n \mapsto \lfloor\frac{n}{2}\rfloor = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ falls } n \text{ gerade ist} \\ \frac{n-1}{2} & n \text{ falls } n \text{ ungerade ist} \end{cases}$$

Zur (nicht verlangten) Erläuterung: Weil z. B. $f(0) = f(1)$ ist, ist f nicht injektiv, aber f ist surjektiv, weil jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ein Urbild hat, nämlich z. B. $2n$.

e) Beispiel $M = \mathbb{Q}$ und $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} : x \mapsto 2x$

oder $M = \mathbb{N}_0$ und $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 : n \mapsto n$

Aufgabe 1.4 (2+1+2 Punkte)
In Goethes Faust heißt es in der Schülerszene:

> Das Erst wär so, das Zweite so,
> Und drum das Dritt und Vierte so;
> Und wenn das Erst und Zweit nicht wär,
> Das Dritt und Viert wär nimmermehr.

a) Formalisieren die Aussage der ersten beiden Zeilen und die der letzten beiden Zeilen als je eine aussagenlogische Formel. Verwenden Sie A_1, A_2, A_3 und A_4 als Variablen für „das Erst", usw.
b) Hätte Herr Mephistopheles recht, wenn er behaupten würde, dass aus der Wahrheit der ersten Formel die der zweiten Formel folgt?
c) Begründen Sie Ihre Antwort aus Teil b).

Lösung 1.4
a) Formalisierung der ersten beiden Zeilen:
$A_1 \wedge A_2 \Rightarrow A_3 \wedge A_4$

Da natürliche Sprache bei Verneinung von *und* oft mehrdeutig ist, ist die Formalisierung der letzten beiden Zeilen nicht klar: Zum Beispiel ginge

- $\neg(A_1 \wedge A_2) \Rightarrow \neg(A_3 \wedge A_4)$ oder
- $\neg A_1 \wedge \neg A_2 \Rightarrow \neg A_3 \wedge \neg A_4$ . . . oder
- Kombinationen daraus

b) Nein! Für jede der Interpretationen!

c) Die einfache Widerlegung von Herrn Mephistopheles benutzt Wahrheitstafeln für die beiden Formeln.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, ein „konkretes“ Gegenbeispiel anzugeben. Hier ist eines, das Sie vielleicht noch aus der Schulanalysis kennen:

- "Das Erst": Funktion f hat globales Minimum in x.
- "Das Zweite": Funktion f ist überall zweimal differenzierbar.
- "Das Dritt": $f'(x) = 0$.
- "Das Vierte": $f''(x) \geq 0$.

Wenn das Erst und Zweite sind, gilt auch das Dritt und Vierte, also gilt die erste aussagenlogische Formel.

Wir wählen nun

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$z \mapsto \begin{cases} z^2 & \text{falls } z < 1 \\ -1 & \text{falls } z \geq 1 \end{cases}$$

für f und $x = 0$:

Das Erst und Zweit ist nicht (f hat nur ein lokales Minimum in x und ist im Punkt 1 nicht zweimal differenzierbar), das Dritt und Vierte aber schon ($f'(x) = 2x = 0, f''(x) = 2 \geq 0$)!

Damit haben wir einen Beweis durch Gegenbeispiel geführt.