Musterlösung zum Übungsblatt 4 der Vorlesung " Grundbegriffe der Informatik"

Aufgabe 4.1

a) $\mathtt{aabaaaba} \in L^*$, da $\mathtt{aabaaaba} = (\mathtt{aaba})(\mathtt{aaba})$ und $\mathtt{aaba} \in L$.

b) $\mathtt{baaaaba} \in L^*$, da $\mathtt{baaaaba} = (\mathtt{ba})(\mathtt{aaaba})$ und $\mathtt{ba} \in L$ und $\mathtt{aaaba} \in L$.

c) $\mathtt{aabba} \notin L^*$.

d) $\mathtt{aaababaaaaba} \in L^*$, da $\mathtt{aaababaaaaba} = (\mathtt{aaaba})(\mathtt{ba})(\mathtt{aaaba})$ und $\mathtt{ba} \in L$ und $\mathtt{aaaba} \in L$.

Aufgabe 4.2

Sei k die Anzahl der Vorkommen von $\mathtt{b}$ in einem Wort $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$.
Induktionsanfang: $k = 1$: In diesem Fall lässt sich das Wort w aufteilen in $w = w_1 \cdot \mathtt{b} \cdot w_2$, wobei w_1 und w_2 keine $\mathtt{b}$ enthalten und somit in $\{\mathtt{a}\}^*$ liegen.
Damit gilt $w \in \{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*$ und somit auch $w \in (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^* = L$.
Induktionsannahme: Für ein festes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass alle Wörter über $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$, die genau k mal das Zeichen $\mathtt{b}$ enthalten, in L liegen.
Induktionsschritt: Wir betrachten ein Wort w, das genau $k + 1$ mal das Zeichen $\mathtt{b}$ enthält. Dann kann man w zerlegen in $w = w_1w_2$, wobei w_1 genau einmal das Zeichen $\mathtt{b}$ enthält und w_2 genau k mal das Zeichen $\mathtt{b}$.
Wie gezeigt, liegt w_1 in $\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*$. Nach Induktionsvoraussetzung liegt w_2 in $(\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^*$, was bedeutet, dass es ein $i \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass $w_2 \in (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^i$ gilt.
Somit liegt $w = w_1w_2$ in
$(\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)(\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^i = (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^{i+1} \subseteq (\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{a}\}^*)^* = L$,
und die Behauptung ist gezeigt.

Aufgabe 4.3

a) $\{\mathtt{a}\}\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$.

b) $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\{\mathtt{a}\}\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\{\mathtt{a}\}\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\{\mathtt{a}\}\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$

c) $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\{\mathtt{baa}\}\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\{\mathtt{a}\}^* \cup \{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{b}\}^*(\{\mathtt{ab}\}\{\mathtt{b}\}^*)^* \cup \{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}\{\mathtt{b}\}^*(\{\mathtt{ab}\}\{\mathtt{b}\}^*)^*\{\mathtt{a}\}$

Aufgabe 4.4