Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 9

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr. Name des Tutors:

Ausgabe: 17. Dezember 2008

Abgabe: 9. Januar 2009, 13:00 Uhr
im Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen linken Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 9:	/ 17
Blätter 1 – 9:	/ 157

Aufgabe 9.1 (2+1 Punkte)
Gegeben sei das folgende Programm:

$p \leftarrow 0$
for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
  for $j \leftarrow 1$ **to** i^2 **do**
    $p \leftarrow p + 2j - 1$
  $p \leftarrow p$ **div** i^3

a) Geben Sie eine möglichst einfache Funktion $f(n)$ (ohne Summenzeichen) an, für die die Anzahl der Ausführungen des innersten Schleifenrumpfes $p \leftarrow p + 2j - 1$ in $\Theta(f)$ liegt.
b) Geben Sie eine möglichst einfache Funktion $g(n)$ (Ohne Summenzeichen) an, für die der Wert von p nach Ablauf des Programms in $\Theta(g)$ liegt.

Aufgabe 9.2 (2+2 Punkte)

a) Gegeben sei eine Funktion $f \in O(n)$. Zeigen Sie: $(\sum_{k=0}^{n} f(k)) \in O(n^2)$.
b) Die Funktion $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ sei gegeben durch

$$g(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1 \\ \frac{3}{4}n^2 & \text{falls } \exists k \in \mathbb{N}^+ : n = 2^k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\sum_{k=0}^{n} g(k)$ in $O(n^2)$ liegt, aber $g(n)$ nicht in $O(n)$.

Aufgabe 9.3 (2+2 Punkte)

a) Finden Sie zwei monoton steigende Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ und $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$, für die weder $f \in O(g)$ noch $g \in O(f)$ gilt.
(Hinweis: Überlegen Sie sich Funktionen f und g, so dass für gerade $n \in \mathbb{N}_0$ $f(n) \geq ng(n)$ und für ungerade $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $g(n) \geq nf(n)$ gilt.)
b) Beweisen Sie, dass für Ihre Funktionen aus Teilaufgabe a) sowohl $f \notin O(g)$ als auch $g \notin O(f)$ gilt.

Aufgabe 9.4 (1+2+2+1 Punkte)
Gegeben Sei die Funktion $T : \{2^k \mid k \in \mathbb{N}_0\} \to \mathbb{R}_0^+$ durch

- $T(1) = 0$ und
- $\forall n \in \{2^k \mid k \in \mathbb{N}^+\} : T(n) = T(\frac{n}{2}) + n$

a) Berechnen Sie $T(2), T(4), T(8), T(16)$.
b) Stellen Sie eine geschlossene Formel für $T(2^k)$ auf.
c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass Ihre Formel aus Teilaufgabe b) korrekt ist.
d) Stellen Sie eine Formel für $T(n)$ in Abhängigkeit von n auf.