Willkommen zur dreizehnten Saalübung!

Aufgabe 1

Gegeben ein Endlicher Akzeptor $A = (Z, z_0, X, f, F)$.

Wir definieren eine Relation $R \subseteq Z \times Z$ wie folgt:

- $(z_1, z_2) \notin R$ falls $z_1 \in F \wedge z_2 \notin F$ oder $z_2 \in F \wedge z_1 \notin F$.
- $(z_1, z_2) \notin R$ falls $\exists x \in X : (f(z_1, x), f(z_2, x)) \notin R$

$\rightarrow$ "Definition" sagt nicht, was in R enthalten ist.

Aufgabe 1

Gegeben ein Endlicher Akzeptor $A = (Z, z_0, X, f, F)$.

Wir definieren für $i \in \mathbb{N}_0$ Relationen $R_i \subseteq Z \times Z$ wie folgt:

- $(z_1, z_2) \in R_0$ falls $z_1 \in F \wedge z_2 \in F$ oder $z_1 \notin F \wedge z_2 \notin F$.
- $\forall i \in \mathbb{N}_= : (z_1, z_2) \in R_{i+1}$ falls $(z_1, z_2) \in R_i \wedge \forall x \in X : (f(z_1, x), f(z_2), x) \in R_i$

Zu zeigen: $\exists i \in \mathbb{N} : R_i = R_{i+1}$.

Aufgabe 1

Aufgrund der Definiton gilt stets $R_{i+1} \subseteq R_i$. Wenn $R_{i+1} \neq R_i$ gilt, bedeutet das, dass $|R_{i+1}| < |R_i|$ gilt.

Da $|R_0| \leq |Z|^2$ gilt, kann nur höchstens $|Z|^2$ mal der Fall $R_{i+1} \neq R_i$ eintreten.

Aufgabe 1

Gegeben ein Endlicher Akzeptor $A = (Z, z_0, X, f, F)$.

Wir definieren für $i \in \mathbb{N}_0$ Relationen $R_i \subseteq Z \times Z$ wie folgt:

- $(z_1, z_2) \in R_0$ falls $z_1 \in F \wedge z_2 \in F$ oder $z_1 \notin F \wedge z_2 \notin F$.
- $\forall i \in \mathbb{N}_= : (z_1, z_2) \in R_{i+1}$ falls $(z_1, z_2) \in R_i \wedge \forall x \in X :$ $(f(z_1, x), f(z_2), x) \in R_i$

Zu zeigen: R_∞ ist Äquivalenzrelation und für alle $x \in X$ verträglich mit $f_x : Z \to Z, f_x(z) = f(z, x)$.

Aufgabe 1

Wir zeigen durch Induktion, dass für $i \in \mathbb{N}_0$ gilt: R_i ist Äquivalenzrelation.

Induktionsanfang: $i = 0$: Offensichtlich (F und $Z \setminus F$ sind die zwei Äquivalenzklassen bezüglich R_0.)

Induktionsschritt: R_{i+1} ist reflexiv, falls R_i reflexiv ist:

Da R_i nach Induktionsvoraussetzung reflexiv ist, gilt für alle $z \in Z$ und für alle $x \in X$: $(z, z) \in R_i$ und $(f(z, x), f(z, x)) \in R_i$.

Damit folgt nach Definition $(z, z) \in R_{i+1}$.

Aufgabe 1

Induktionsschritt: R_{i+1} ist symmetrisch, falls R_i symmetrisch ist:

Sei $(z_1, z_2) \in R_{i+1}$.

Dann gilt nach Definition: $(z_1, z_2) \in R_i$ und $\forall x \in X : (f(z_1, x), f(z_2, x)) \in R_i$.

Da R_i nach Induktionsvoraussetzung symmetrisch ist, folgt:

$(z_2, z_1) \in R_i$ und $\forall x \in X : (f(z_2, x), f(z_1, x)) \in R_i \Rightarrow (z_2, z_1) \in R_i$.

Aufgabe 1

Induktionsschritt: R_{i+1} ist transitiv, falls R_i transitiv ist:

Seien $(z_1, z_2) \in R_{i+1}$ und $(z_2, z_3) \in R_{i+1}$.

Dann gilt nach Definition: $(z_1, z_2) \in R_i$ und $\forall x \in X$: $(f(z_1, x), f(z_2, x)) \in R_i$ und $(z_2, z_3) \in R_i$ und $\forall x \in X$: $(f(z_2, x), f(z_3, x)) \in R_i$.

Da R_i nach Induktionsvoraussetzung transitiv ist, folgt:

$(z_1, z_3) \in R_i$ und $\forall x \in X$: $(f(z_1, x), f(z_3, x)) \in R_i \Rightarrow (z_1, z_3) \in R_i$.

Aufgabe 2

Finden aller Äquivalenzklassen für R_∞ für folgenden Endlichen Akzeptor:

$A = (\{0,1,2,3,4,5\}, 0, \{0,1\}, f, \{0\})$ mit $f(z,x) = (2z + x)$ mod 6.

Aufgabe 2

Folgende Paare von Zuständen sind **nicht** in R_0:

$(0,1),(1,0),(0,2),(2,0),(0,3),(3,0),(0,4),(4,0),(0,5),(5,0)$.

Folgende Paare von Zuständen sind ebenfalls **nicht** in R_1:

$(3,1),(1,3),(3,2),(2,3),(3,4),(4,3),(3,5),(5,3)$.

(Bei Eingabe von 0 ist der nächste Zustand von 3 ausgehend immer 0, bei allen anderen Zuständen außer 0 ungleich 0 und damit nicht äquivalent bezüglich R_0.)

Aufgabe 2

Folgende Paare von Zuständen sind ebenfalls **nicht** in R_2:

$(1,2),(2,1),(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(4,5),(5,4)$.

(Bei Eingabe von 1 ist der nächste Zustand von 1 und 4 ausgehend immer 3, bei 2 und 5 jeweils 5 und damit nicht äquivalent bezüglich R_1.)

Es sind somit nur noch die Paare $(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),($ in R_2.

R_3 enthält die gleichen Paare, so dass die gesuchten Äquivalenzklassen gerade $\{0\},\{1,4\},\{2,5\},\{3\}$ sind.

Aufgabe 3

Gegeben die Funktion

$f : \{a, b\}^* \to \mathbb{N}_0$ mit

- $f(\epsilon) = 0, f(a) = 1, f(b) = 0$

- $\forall v, w \in \{a, b\}^* : f(vw) = f(v) + f(w)$

Ist f wohldefiniert?

Aufgabe 3

Wir müssen (im Wesentlichen) zeigen, dass für zwei verschiedene Unterteilungen eines Wortes w in $w = v_1 w_1$ und $w = v_2 w_2$ die Werte $f(v_1) + f(w_1) = f(v_2) + f(w_2)$ gilt.

Dies setzt aber voraus, dass für kürzere Wörter u als w $f(u)$ einen wohldefinierten Wert hat; dies läuft auf eine vollständige Induktion hinaus.

Induktionsanfang: Für alle Wörter u der Länge 0 ist $f(u) = 0$ wohldefiniert.

Für alle Wörter der Länge 1 gilt:

$f(\epsilon u) = f(u\epsilon) = f(u) + 0 = f(u)$, so dass sich für jede Zerlegung des Wortes u der gleiche Wert $f(u)$ ergibt.

Aufgabe 3

Induktionsvoraussetzung: Für ein festes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: Für alle Wörter $w \in \{a, b\}^*$ mit $|w| \leq n$ ist $f(w)$ wohldefiniert.

Induktionsschritt:

Sei u ein Wort der Länge $n + 1$ und v_1, w_1, v_2, w_2 Wörter mit der Eigenschaft $u = v_1 w_1 = v_2 w_2$.

Zu zeigen: $f(v_1) + f(w_1) = f(v_2) + f(w_2)$.

Aufgabe 3

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $|v_1| \leq |v_2|$. Dann gibt es ein Wort $v \in \{a, b\}^*$ mit $v_1 u = v_2$ und $v w_2 = w_1$.

Nach Induktionsvoraussetzung sind $f(v_1), f(v)$ und $f(w_2)$ wohldefiniert.

Es folgt: $f(v_1) + f(w_1) = f(v_1) + f(vw_2) = f(v_1) + f(v) + f(w_2) = f(v_1 v) + f(w_2) = f((v_2) + f(w_2)$.

Dies beweist die Behauptung.

Aufgabe 3'

Gegeben die Funktion

$f : \{a, b\}^* \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit

- $f(\epsilon) = 1, f(a) = 3, f(b) = 1$
- $\forall v, w \in \{a, b\}^* : f(vw) = f(v)^{f(w)}$

Ist f wohldefiniert?

Aufgabe 3'

Wir betrachten das Wort aaa:

Zum einen ist $f(aa)^{f(a)} = (f(a)^{f(a)})^{f(a)} = 27^3 = 3^9$.

Zum anderen ist $f(a)^{f(aa)} = f(a)^{(f(a)^{f(a)})} = 3^27$.

Somit ist das "Ergebnis" von $f(aaa)$ abhängig von der Zerlegung von aaa in Teilwörter, und f ist nicht wohldefiniert.