Willkommen zur vierzehnten Saalübung!

Aufgabe 1

Alphabet A.

Funktion $f : A^* \to A^*$ mit

$f(\epsilon) = \epsilon$
$\forall x \in A \forall w \in A^* : f(xw) = xxf(w)$.

Zu zeigen: $|f(w)| = 2|w|$

Aufgabe 1

Induktionsanfang: $|w| = 0 : |f(\epsilon)| = |\epsilon| = 0 = 2 \cdot 0 = 2|\epsilon|$.

Induktionsvoraussetzung: Behauptung gilt für alle Wörter der Länge n.

Induktionsschritt: Sei $w \in A^{n+1}$. Dann gibt es $x \in A, w' \in A^n$ mit $w = xw'$.

$|f(w)| = |f(xw')| = |xxf(w')| = 2 + |f(w')| \stackrel{IV}{=} 2 + 2|w'| = 2 + 2n = 2(n+1) = 2|w|$.

Damit ist die Behauptung gezeigt.

Aufgabe 2

Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei F_k definiert durch:

$F_0 = 0, F_1 = 1$
$\forall n \in \mathbb{N}_0 : F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$

Zu zeigen: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n).$

Aufgabe 2

Wir zeigen: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$ und $F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1})$.

Induktionsanfang: $n = 0 : \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^0 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1 - 1) = 0 = F_0$

und $\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}-(1-\sqrt{5})}{2}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{2}) = 1 = F_1$.

Aufgabe 2

Induktionsvoraussetzung: Für festes n gilt $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$ und $F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1})$.

Induktionsschritt: $F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \overset{IV}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n) + F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}) = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}) - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}))$

Aufgabe 2

Wir zeigen: $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1$ und $(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1$:

$(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = frac3 + \sqrt{5}2 = frac1 + \sqrt{5}2 + 1.$

$(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = frac3 - \sqrt{5}2 = frac1 - \sqrt{5}2 + 1.$

Aufgabe 2

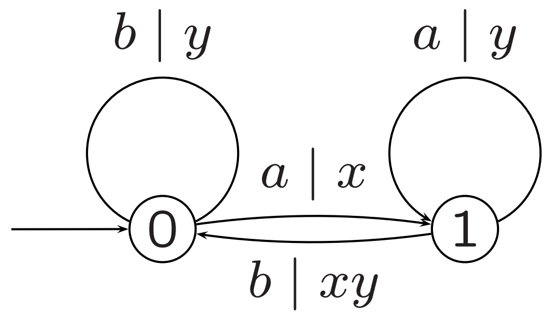
Somit gilt:

$F_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}) - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2})) = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2) = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2})$.

Dass $F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1})$ gilt, folgt direkt aus der Induktionsvoraussetzung.

Aufgabe 3

Umwandeln von Mealy-Automat in Moore-Automat:



Beweisen, dass beide Automaten die gleiche Ausgabe g^{**} erzeugen.

Aufgabe 3

Umwandeln von Mealy-Automat in Moore-Automat:

Idee: Zu jeder möglichen Ausgabe $u \in \{g(z,v) : z \in \{0,1\}, v \in \{a,b\}\} \cup \{\epsilon\}$ und zu jedem Zustand $z \in \{0,1\}$ haben wir einen Zustand (z,u), der die Ausgabe u erzeugt und in den der Automat bei Eingabe eines Zeichens t übergeht, wenn er vorher in einem Zustand (z',u') war und gilt:

$$f(z',t) = z \wedge g(z',t) = u.$$

Die Ausgabe wird also von den Kanten in aufgespaltene Zustände übertragen. Der Startzustand wäre dann $(0,\epsilon)$.

Aufgabe 3

Umwandeln von Mealy-Automat in Moore-Automat:

	a	b
$(0, \epsilon)$	$(1, x)$	$(0, y)$
$(0, x)$	$(1, x)$	$(0, y)$
$(0, y)$	$(1, x)$	$(0, y)$
$(0, xy)$	$(1, x)$	$(0, y)$
$(1, \epsilon)$	$(1, y)$	$(0, xy)$
$(1, x)$	$(1, y)$	$(0, xy)$
$(1, y)$	$(1, y)$	$(0, xy)$
$(1, xy)$	$(1, y)$	$(0, xy)$

Aufgabe 3

Lässt man alle Zustände fort, die nicht der Startzustand sind und nicht erreicht werden können, ergibt sich:

	a	b
$(0, \epsilon)$	$(1, x)$	$(0, y)$
$(0, y)$	$(1, x)$	$(0, y)$
$(0, xy)$	$(1, x)$	$(0, y)$
$(1, x)$	$(1, y)$	$(0, xy)$
$(1, y)$	$(1, y)$	$(0, xy)$

Aufgabe 3

Den Beweis der Korrektheit führen wir allgemein.

Sei $A_1 = (Z, z_0, X, f, Y, g)$ ein Mealy-Automat.

Sei $G = \{g(z, x) \mid z \in Z \wedge x \in X\} \cup \{\epsilon\}$.

Dann definieren wir den entsprechenden Moore-Automaten durch $A_2 = (Z \times G, (z_0, \epsilon), X, f_1, Y, h)$ mit

$\forall z \in Z \forall u \in G \forall x \in X : f_1((z, u), x) = (f(z, x), g(z, x))$

und $\forall z \in Z \forall u \in G : h((z, u)) = u$.

Aufgabe 3

Wir beweisen jetzt durch Induktion:

$\forall n \in \mathbb{N}_0 \forall w \in X^n : g^{**}(z_0, w) = g^{**}((z_0, \epsilon), w)$ und $\exists u \in G :$ $f_1^*((z_0, \epsilon), w) = (f^*(z_0, w), u)$.

Induktionsanfang: $n = 0 : g^{**}(z_0, \epsilon) = \epsilon = g^{**}((z_0, \epsilon), \epsilon)$ und $f_1^*((z_0, \epsilon), \epsilon) = (z_0, \epsilon) = (f^*(z_0, \epsilon), \epsilon)$.

Induktionsvoraussetzung: Für festes n gilt die Behauptung.

Induktionsschritt: Sei $w \in X^{n+1}$. Dann gibt es $w' \in X^n, x \in X$ mit $w = w'x$.

Aufgabe 3

$f_1^*((z_0,\epsilon), w'x) = f_1(f_1^*((z_0,\epsilon), w'), x)$.

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es $u \in G$ mit $f_1^*((z_0,\epsilon), w') = (f^*(z_0, w'), u)$.

Es folgt: $f_1^*((z_0,\epsilon), w'x) = f_1((f^*(z_0, w')u), x) = (f(f^*(z_0, w'), x), g(f^*(z_0,$
$(f^*(w'x), g(f^*(z_0, w'), x))$.

Damit ist der zweite Teil der Behauptung gezeigt.

Aufgabe 3

$g^{**}((z_0,\epsilon),w'x) = g^{**}((z_0,\epsilon),w')h(f_1^*((z_0,\epsilon),w'x))$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $g^{**}((z_0,\epsilon),w') = g^{**}(z_0,w')$ und wegen der Rechnung auf letzter Folie gilt $f_1^*((z_0,\epsilon),w'x) = (f^*(w'x), g(f^*(z_0,w'),x))$.

Es folgt:

$g^{**}((z_0,\epsilon),w'x) = g^{**}(z_0,w')h((f^*(w'x), g(f^*(z_0,w'),x))) = g^{**}(z_0,w')g(f^*(z_0,w'),x) = g^{**}(z_0,w'x)$

Damit ist die Behauptung gezeigt.