Willkommen zur fünfzehnten Saalübung!

Aufgabe 1

$G = (\{S, X\}, \{a, b\}, S, \{$
$S \to aSa \mid bSb \mid aXb \mid bXa$
$X \to aX \mid bX \mid \epsilon\}).$

Zu zeigen: $L(G)$ enthält keine Palindrome.

Aufgabe 1

Induktion über Länge der Ableitung:

$\forall n \in \mathbb{N}_0 : (S \Rightarrow^n w) \Rightarrow$

(I) falls w ein Palindrom ist, gibt es $w_1 \in \{a,b\}^*$ mit $w = w_1 S R(w_1)$.

(II) falls w kein Palindrom ist, gibt es $w_1, w_2 \in \{a,b\}^*$ und $\bar{w} \in \{a,b,S,X\}^*$ mit $|w_1| = |w_2|, w_1 \neq w_2$ und $w = w_1 \bar{w} R(w_2)$.

Aufgabe 1

$G = (\{S, X\}, \{a, b\}, S, \{$
$S \to aSa \mid bSb \mid aXb \mid bXa$
$X \to aX \mid bX \mid \epsilon\})$.

Induktionsanfang: Klar.

Induktionsannahme (IA): Klar.

Schritt:

a) Wort nach n Ableitungsschritten ist kein Palindrom.

b) Wort nach n Ableitungsschritten ist Palindrom.

Aufgabe 1

$G = (\{S, X\}, \{a, b\}, S, \{$
$S \rightarrow aSa \mid bSb \mid aXb \mid bXa$
$X \rightarrow aX \mid bX \mid \epsilon\})$.

Kein Palindrom: Nach IA gibt es Zerlegung $w' = w_1\bar{w}R(w_2)$ wie in (II) beschrieben.

Ersetzung in $\bar{w}$ führt zu $\tilde{w}$.

Zerlegung $w = w_1\tilde{w}R(w_2)$ ist möglich, w kein Palindrom.

Aufgabe 1

$G = (\{S, X\}, \{a, b\}, S, \{$
$S \rightarrow aSa \mid bSb \mid aXb \mid bXa$
$X \rightarrow aX \mid bX \mid \epsilon\})$.

Palindrom: Nach IA gibt es Zerlegung $w' = w_1 S R(w_1)$ wie in (I) beschrieben.

Ersetzung führt zu $(w_1 a) S R(w_1 a)$, $(w_1 b) S R(w_1 b)$, $(w_1 a) X R(w_1 b)$, $(w_1 b) X R(w_1 a)$.

In jedem Fall gewünschte Zerlegung möglich.

Aufgabe 2

$G = (\{S, X, U\}, \{a, b\}, S, \{$
$S \rightarrow abX \mid bS \mid aU,$
$X \rightarrow bX \mid baS,$
$U \rightarrow aS \mid bU \mid a\})$

Akzeptor konstruieren.

Aufgabe 2

$$G = (\{S, X, U\}, \{a, b\}, S, \{$$
$$S \to abX \mid bS \mid aU,$$
$$X \to bX \mid baS,$$
$$U \to aS \mid bU \mid a\})$$

Idee: Welche Zeichen können bei Erzeugen hinter letztem Zeichen stehen?

Aufgabe 2

$$G = (\{S, X, U\}, \{a, b\}, S, \{$$
$$S \rightarrow abX \mid bS \mid aU,$$
$$X \rightarrow bX \mid baS,$$
$$U \rightarrow aS \mid bU \mid a\})$$

	a	b
S	(bX, U)	S
(bX, U)	(S, ϵ)	(X, U)
(S, ϵ)	(bX, U)	S
(X, U)	(S, ϵ)	(X, aS)
(X, aS)	S	(X, aS)

Aufgabe 3

Gegeben Menge M, Äquivalenzrelation $R \subseteq M \times M$, Operation $\circ : M \times M \to M$ mit

$\forall x, y \in M : (x \circ y) R (y \circ x)$. (I)

Zu Zeigen: Falls $\forall x, y, z \in M : xRy \Rightarrow (x \circ z) R (y \circ z)$ gilt, ist $\circ$ verträglich mit R.

Gilt das auch, wenn (I) nicht gilt?

Aufgabe 3

Es seien $x_1 R x_2$ und $y_1 R y_2$.

Dann gilt: $(x_1 \circ y_1) R (x_2 \circ y_1)$ und
$(x_2 \circ y_1) R (y_1 \circ x_2)$ und
$(y_1 \circ x_2) R (y_2 \circ x_2)$ und
$(y_2 \circ x_2) R (x_2 \circ y_2)$ und damit wegen Transitivität
$(x_1 \circ y_1) R (x_2 \circ y_2)$.

Aufgabe 3

$M = \mathbb{N}_0, xRy \iff x - y$ ist durch 5 teilbar, $x \circ y = x^y$.

Es gilt $\forall x, y, z \in \mathbb{N}_0 : xRy \Rightarrow x \circ z = y \circ z$,

aber $(2^0, 2^5) = (1, 32) \notin R$ obwohl $(0, 5) \in R$ und $(2, 2) \in R$ gilt.