Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 3

Aufgabe 3.1 (2+3+1+2 Punkte)

Gegeben sei ein Alphabet A und ein Symbol $x \in A$. Wir definieren $\delta_x : A \to \mathbb{N}_0$, wie folgt: $\forall y \in A : \delta_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = y \\ 0 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$.

a) Definieren Sie für $x \in A$ induktiv die Funktion $N_x : A^* \to \mathbb{N}_0$, die jedem Wort w aus A^* die Anzahl der Vorkommen des Zeichens x in w zuordnet. Verwenden Sie hierzu die Funktion δ_x.

$N_x(\epsilon) = 0$
$\forall w \in A^* \forall y \in A : N_x(wy) = N_x(w) + \delta_x(y)$

b) Geben Sie einen Algorithmus an, für den bei Eingabe eines Wortes $w \in A^*$ die Variable r am Ende des Algorithmus den Wert N_x hat. Verwenden Sie die Notation aus der Vorlesung.

$v \leftarrow w$
$r \leftarrow 0$
$j \leftarrow 0$
for $i \leftarrow 0$ **to** $|v| - 1$ **do**
$\quad r \leftarrow r + \delta_x(v(i))$
$\quad j \leftarrow j + 1$
od

c) Die Funktion $P : A^* \times \mathbb{N}_0 \to A^*$ sei induktiv definiert durch

$$\forall w \in A^* : P(w, 0) = \epsilon$$
$$\forall w \in A^* : \forall i \in \mathbb{N}_0 : P(w, i+1) = \begin{cases} P(w,i) \cdot w(i) & \text{falls } i < |w| \\ P(w,i) & \text{sonst} \end{cases}$$

Finden Sie eine Schleifeninvariante für Ihren Algorithmus aus Teilaufgabe b), die den wesentlichen Aspekt der Arbeit Ihres Algorithmus widerspiegelt.

Es gilt immer zu Beginn und Ende eines Schleifendurchlaufs:
$r = N_x(P(w, j))$

d) Weisen Sie nach, dass Ihre Aussage aus c) tatsächlich Schleifeninvariante ist.

Für $n \in \mathbb{G}_{|w|}$ sei r_n der Wert der Variablen r zu Beginn des Schleifendurchlaufs, bei dem i den Wert n hat, und j_n der Wert der Variablen j zu Beginn des Schleifendurchlaufs, bei dem i den Wert n hat.
Entsprechend sind dann r_{n+1} und j_{n+1} die Werte der Variablen r und j am Ende des Schleifendurchlaufs, bei dem i den Wert n hat.
Wir zeigen durch Induktion: Wenn es einen Schleifendurchlauf gibt, für den die Variable i den Wert n hat, gilt $r_n = N_x(P(w, j_n)) \wedge j_n = n$.

Induktionsanfang: $n = 0$:

$j_0 = 0 \wedge r_0 = 0 = N_x(\epsilon) = N_x(P(w, 0)) = N_x(P(w, j_0))$ $\checkmark$.

Induktionsvoraussetzung: Für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: Wenn es einen Schleifendurchlauf gibt, bei dem i den Wert n hat, gilt
$r_n = N_x(P(w, j_n)) \wedge j_n = n$

Induktionsschritt: Wir zeigen, dass dann auch gilt
$r_{n+1} = N_x(P(w, j_{n+1})) \wedge j_n = n$.

Nach Algorithmus gilt $j_{n+1} = j_n + 1 \overset{IV}{=} n + 1$ und es gilt:

$r_{n+1} = r_n + \delta_x(v(n)) \overset{IV}{=} N_x(P(w, j_n)) + \delta_x(v(j_n)) \overset{Def}{=} N_x(P(w, j_n) \cdot v(j_n)) =$
$N_x(P(w, j_n) \cdot w(j_n)) \overset{Def}{=} N_x(P(w, j_n + 1)) = N_x(P(w, j_{n+1}))$

Damit ist die Behauptung gezeigt, und damit auch die Schleifeninvariante.

Aufgabe 3.2 (4+1+3 Punkte)

Für Zahlen $a, b \in \mathbb{N}_0$ mit $a + b \geq 1$ sei $ggt(a, b)$ der *größte gemeinsame Teiler* von a und b, d. h. die größte Zahl $t \in \mathbb{N}_0$, die sowohl a als auch b ohne Rest teilt.
Weiterhin seien für natürliche Zahlen $a, b \in \mathbb{N}_0$ die Zahlen $\min(a, b)$ als die kleinere und $\max(a, b)$ als die größere der beiden Zahlen definiert. Falls $a = b$ ist, ist auch $\min(a, b) = \max(a, b)$.

a) Seien $k, g \in \mathbb{N}_0$ natürliche Zahlen mit $k \leq g$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

- $\forall t \in \mathbb{N}_0 : t$ teilt $k \wedge t$ teilt $g \Rightarrow t$ teilt $g - k$

  t teilt $g \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}_0 : tn_1 = g$.
  t teilt $k \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N}_0 : tn_2 = k$.
  $\Rightarrow t(n_1 - n_2) = g - k$.
  Da $g - k \geq 0$ und $t \geq 0$ gilt, folgt $n_1 - n_2 = \frac{g-k}{t} \geq 0$.
  Da$n_1 - n_2$ weiterhin eine Differenz von zwei ganzen Zahlen ist, muss $n_1 - n_2$ eine Zahl aus $\mathbb{N}_0$ sein.
  Damit gibt es $n_3 = n_1 - n_2 \in \mathbb{N}_0 : tn_3 = g - k$, womit die Behauptung gezeigt wäre.

- $\forall t \in \mathbb{N}_0 : t$ teilt $k \wedge t$ teilt $g - k \Rightarrow t$ teilt g

  t teilt $k \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}_0 : tn_1 = k$.
  t teilt $g - k \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N}_0 : tn_2 = g - k$.
  $\Rightarrow t(n_1 + n_2) = g - k + k = g$.
  Da$n_1 + n_2$ als Summe zweier natürlicher zahlen eine natürliche Zahl ist, muss $n_1 + n_2 \in \mathbb{N}_0$ gelten.
  Damit gibt es $n_3 = n_1 + n_2 \in \mathbb{N}_0 : tn_3 = g$, womit die Behauptung gezeigt wäre.

- $ggt(k, g) = ggt(k, g - k)$.

  Sei $g_1 = ggt(k, g)$. Da g_1 sowohl k als auch g teilt, teilt g_1 auch k und $g - k$, und es folgt $g_1 \leq ggt(k, g - k)$, da $ggt(k, g - k)$ ja der **größte** gemeinsame Teiler von k und $g - k$ ist.

Sei $g_2 = ggt(k, g-k)$. Da g_2 sowohl k als auch $g-k$ teilt, teilt g_2 auch k und g, und es folgt $g_2 \leq ggt(k,g)$, da $ggt(k,g)$ ja der **größte** gemeinsame Teiler von k und g ist.
Es gilt somit $g_1 \leq g_2$ und $g_2 \leq g_1 \Rightarrow g_1 = g_2$.
Damit ist die Behauptung bewiesen.

b) Gegeben sei folgender Algorithmus mit Eingaben $a, b \in \mathbb{N}_0$ und $a + b \geq 1$:

$x \leftarrow a$
$y \leftarrow b$
for $i \leftarrow 0$ **to** $a+b+1$ **do**
  $k \leftarrow min(x,y)$
  $g \leftarrow max(x,y)$
  $x \leftarrow k$
  $y \leftarrow g - k$
od

Finden Sie eine Schleifeninvariante, die das Wesentliche dessen, was der Algorithmus macht, widerspiegelt.

$ggt(x,y) = ggt(a,b)$

c) Erklären Sie, warum nach Ablauf des Algorithmus der Inhalt der Variable y genau $ggt(a,b)$ ist.

Zuerst zeigen wir, dass die Schleifeninvariante korrekt ist.
Seien also für $i \in \mathbb{G}_{a+b+2}$ x_i, y_i die Werte von x beziehungsweise y zu Beginn des $i+1$-ten Schleifendurchlaufs.
Wir zeigen per Induktion: $ggt(x_i, y_i) = ggt(a,b)$:

Induktionsanfang: $x_0 = a \wedge y_0 = b \Rightarrow ggt(x_0, y_0) = ggt(a,b)$ $\surd$.

Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebiges, aber festes $i \in \mathbb{N}_0$ gilt:
$ggt(x_i, y_i) = ggt(a,b)$.

Induktionsschritt: Wir zeigen, dass dann auch gilt: $ggt(x_{i+1}, y_{i+1}) = ggt(a,b)$:

Falls $x_i \geq y_i$ gilt, folgt
$ggt(x_i, y_i)$
$= ggt(max(x_i,y_i), min(x_i,y_i))$
$= ggt(min(x_i,y_i), max(x_i,y_i))$
$\overset{a)}{=} ggt(min(x_i,y_i), max(x_i,y_i) - min(x_i,y_i))$
$= ggt(x_{i+1}, y_{i+1})$.
Falls $x_i < y_i$ gilt, folgt
$ggt(x_i, y_i)$
$= ggt(min(x_i,y_i), max(x_i,y_i))$
$\overset{a)}{=} ggt(min(x_i,y_i), max(x_i,y_i) - min(x_i,y_i))$
$= ggt(x_{i+1}, y_{i+1})$.
Da nach Induktionsvoraussetzung gilt $ggt(x_i, y_i) = ggt(a,b)$, folgt:
$ggt(x_{i+1}, y_{i+1}) = ggt(a,b)$.

Hinweis: Obiger Nachweis war eigentlich nicht gefordert und steht der Vollständigkeit halber hier.
Solange weder x noch y 0 sind, wird die Summe $x + y$, die anfangs $a + b$ ist, in jedem Schritt um mindestens 1 kleiner.
Nach allerspätestens $a + b$ Schleifendurchläufen muss also eine der Variablen x, y 0 sein.
Spätestens im $a + b + 1$-ten Schleifendurchlauf wird also x auf 0 gesetzt und y auf einen Wert g, so dass gilt: $ggt(0, g) = ggt(a, b)$.
Da immer $ggt(0, g) = g$ gilt, folgt $g = ggt(a, b)$.
Da wir $a + b + 2$ Schleifendurchläufe haben, gilt am Ende also: Die Variable y enthält den größten gemeinsamen Teiler von a und b.