Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 8

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr.
	Name des Tutors:

Ausgabe: 9. Dezember 2009

Abgabe: 18. Dezember 2009, 13:00 Uhr
im Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

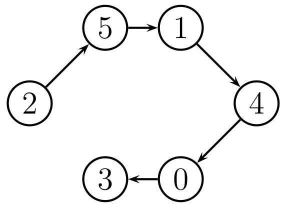
erreichte Punkte

Blatt 8:	/ 19
Blätter 1 – 8:	/ 153

Aufgabe 8.1 (4 Punkte)
Für einen Graphen $G = (\mathbb{G}_n, E)$ definieren wir

$$\begin{aligned} E_0 =& E \cup I \\ \forall k \in \mathbb{N}_0 : E_{k+1} =& E_k \cup \{(i,j) \mid (i,k) \in E_k \wedge (k,j) \in E_k\} \end{aligned}$$

Zeichnen Sie für $k \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ die Graphen $G_k = (\mathbb{G}_n, E_k)$ für folgenden Ausgangsgraphen G:



Hinweis: Sie können die Abbildungen auf Seite 3 verwenden.

Aufgabe 8.2 (2+2+1 Punkte)
Hinweis: Um eine Aussage der Form $\forall n \in \mathbb{N}_0 : n \geq k \Rightarrow A(n)$ durch Induktion zu beweisen, kann man für den Induktionsanfang den Fall $n = k$ wählen.

a) Zeigen Sie: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : n \geq 4 \Rightarrow 2n + 1 \leq 2^n$.
b) Zeigen Sie: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : n \geq 4 \Rightarrow n^2 \leq 2^n$.
c) Welche der folgenden Aussagen folgt (folgen) aus Teilaufgabe b):
$n^2 \in O(2^n), n^2 \in \Omega(2^n), n^2 \in \Theta(2^n)$?

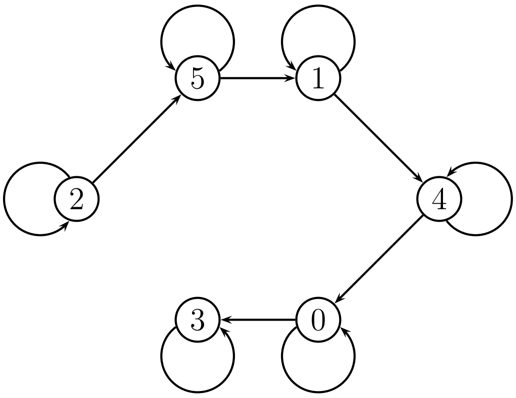
Aufgabe 8.3 (2+1+2+1 Punkte)
Gegeben sei die Funktion $T : \{2^k \mid k \in \mathbb{N}_0\} \to \mathbb{N}_0$ durch

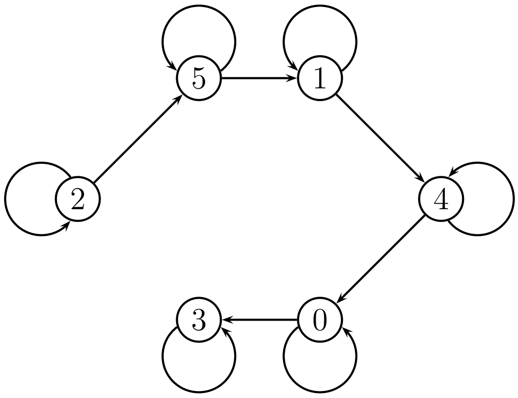
$$\begin{aligned} T(1) =& 0 \\ \forall n \in \{2^k \mid k \in \mathbb{N}_+\} : T(n) =& 8T(\frac{n}{2}) + n^3 \end{aligned}$$

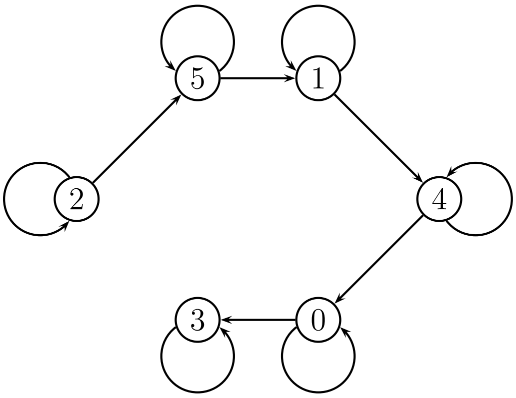
a) Berechnen Sie $T(2), T(4), T(8), T(16)$.
b) Geben Sie eine geschlossene Formel für $T(2^k)$ an.
c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass Ihre Formel aus Teilaufgabe b) korrekt ist.
d) Geben Sie für allgemeine $n \in \{2^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ eine Formel für $T(n)$ an.

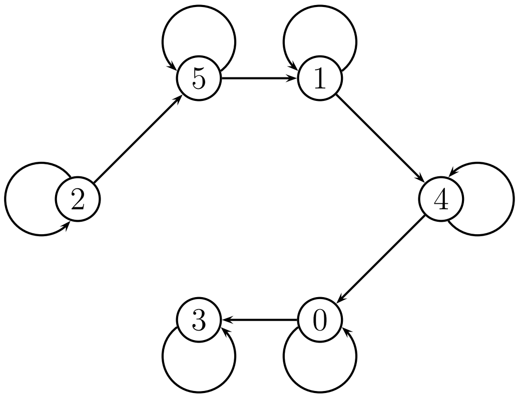
Aufgabe 8.4 (2+2 Punkte)
Eine Polynomfunktion $p : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ sei für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben durch
$p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i$ mit $\forall i \in \mathbb{G}_{d+1} : a_i \in \mathbb{Z}$ und $a_d > 0$.

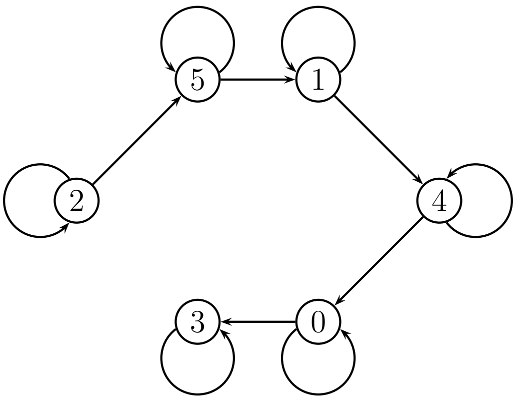
a) Geben Sie eine Zahl c an, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $p(n) \leq cn^d$.
b) Zeigen Sie, dass für Ihre Zahl c aus Teilaufgabe a) gilt: $p(n) \leq cn^d$.

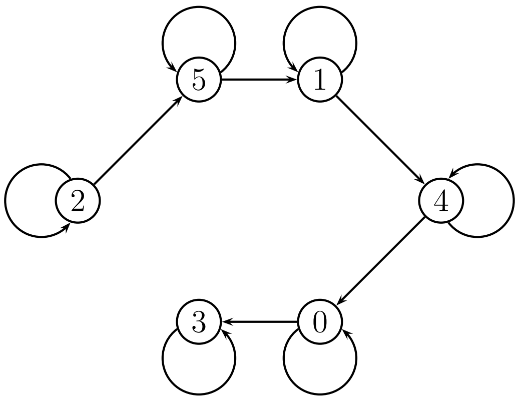

5
1
2
4
3
0


5
1
2
4
3
0


5
1
2
4
3
0


5
1
2
4
3
0


5
1
2
4
3
0


5
1
2
4
3
0