Übung "Grundbegriffe der Informatik"

Karlsruher Institut für Technologie

Matthias Schulz, Gebäude 50.34, Raum 247

email: schulz@ira.uka.de

Matthias Janke, Gebäude 50.34, Raum 249

email: matthias.janke@kit.edu

Ein bisschen was zu Quantoren

$R \subseteq M \times N$ Relation

$$\exists x \in M : \forall y \in N : xRy \Rightarrow \forall y \in N : \exists x \in M : xRy$$
$$\forall x \in M : \exists y \in N : xRy \Rightarrow \exists y \in N : \forall x \in M : xRy$$

.

Ein bisschen was zu Quantoren

$R \subseteq M \times N$ Relation

$\exists x \in M : \forall y \in N : xRy \Rightarrow \forall y \in N : \exists x \in M : xRy$
$\forall x \in M : \exists y \in N : xRy \Rightarrow \exists y \in N : \forall x \in M : xRy$

Erste Formel: Irgendwie offensichtlich wahr.

.

Ein bisschen was zu Quantoren

$R \subseteq M \times N$ Relation

$$(\exists x \in M : \forall y \in N : xRy) \Rightarrow (\forall y \in N : \exists x \in M : xRy)$$
$$(\forall x \in M : \exists y \in N : xRy) \Rightarrow (\exists y \in N : \forall x \in M : xRy)$$

Erste Formel: Irgendwie offensichtlich wahr.
Zweite Formel: Falsch! (siehe $M = N = \mathbb{N}_0, R =<$)

.

Ein bisschen was zu Quantoren

$R \subseteq M \times N$ Relation

$(\exists x \in M : \forall y \in N : xRy) \Rightarrow (\forall y \in N : \exists x \in M : xRy)$

Wir gehen davon aus, dass $\exists x \in M : \forall y \in N : xRy$ wahr ist.

.

Ein bisschen was zu Quantoren

$R \subseteq M \times N$ Relation

$(\exists x \in M : \forall y \in N : xRy) \Rightarrow (\forall y \in N : \exists x \in M : xRy)$

Wir gehen davon aus, dass $\exists x \in M : \forall y \in N : xRy$ wahr ist.
Sei $x_0 \in M$ so gewählt, dass $\forall y \in N : xRy$ wahr ist.

.

Ein bisschen was zu Quantoren

$R \subseteq M \times N$ Relation

$(\exists x \in M : \forall y \in N : xRy) \Rightarrow (\forall y \in N : \exists x \in M : xRy)$

Wir gehen davon aus, dass $\exists x \in M : \forall y \in N : xRy$ wahr ist.
Sei $x_0 \in M$ so gewählt, dass $\forall y \in N : x_0Ry$ wahr ist.
Sei $y_0 \in N$ beliebig, aber fest gewählt.

.

Ein bisschen was zu Quantoren

$R \subseteq M \times N$ Relation

$(\exists x \in M : \forall y \in N : xRy) \Rightarrow (\forall y \in N : \exists x \in M : xRy)$

Wir gehen davon aus, dass $\exists x \in M : \forall y \in N : xRy$ wahr ist.
Sei $x_0 \in M$ so gewählt, dass $\forall y \in N : x_0Ry$ wahr ist.
Sei $y_0 \in N$ **beliebig, aber fest** gewählt.

.

Ein bisschen was zu Quantoren

$R \subseteq M \times N$ Relation

$(\exists x \in M : \forall y \in N : xRy) \Rightarrow (\forall y \in N : \exists x \in M : xRy)$

Wir gehen davon aus, dass $\exists x \in M : \forall y \in N : xRy$ wahr ist.
Sei $x_0 \in M$ so gewählt, dass $\forall y \in N : x_0Ry$ wahr ist.
Sei $y_0 \in N$ **beliebig, aber fest** gewählt.
Dann gilt x_0Ry_0.

.

Ein bisschen was zu Quantoren

$R \subseteq M \times N$ Relation

$(\exists x \in M : \forall y \in N : xRy) \Rightarrow (\forall y \in N : \exists x \in M : xRy)$

Wir gehen davon aus, dass $\exists x \in M : \forall y \in N : xRy$ wahr ist.
Sei $x_0 \in M$ so gewählt, dass $\forall y \in N : x_0 Ry$ wahr ist.
Sei $y_0 \in N$ **beliebig, aber fest** gewählt.
Dann gilt $x_0 R y_0 \Rightarrow \exists x \in M : xRy_0$

.

Ein bisschen was zu Quantoren

$R \subseteq M \times N$ Relation

$(\exists x \in M : \forall y \in N : xRy) \Rightarrow (\forall y \in N : \exists x \in M : xRy)$

Wir gehen davon aus, dass $\exists x \in M : \forall y \in N : xRy$ wahr ist.
Sei $x_0 \in M$ so gewählt, dass $\forall y \in N : x_0Ry$ wahr ist.
Sei $y_0 \in N$ **beliebig, aber fest** gewählt.
Dann gilt $x_0Ry_0 \Rightarrow \exists x \in M : xRy_0$
Da y_0 beliebig gewählt war, gilt $\forall y \in N : \exists x \in N : xRy$.

.

Ein bisschen was zu Quantoren

$R \subseteq M \times N$ Relation

$(\exists x \in M : \forall y \in N : xRy) \Rightarrow (\forall y \in N : \exists x \in M : xRy)$

Wir gehen davon aus, dass $\exists x \in M : \forall y \in N : xRy$ wahr ist.
Sei $x_0 \in M$ so gewählt, dass $\forall y \in N : x_0Ry$ wahr ist.
Sei $y_0 \in N$ **beliebig, aber fest** gewählt.
Dann gilt $x_0Ry_0 \Rightarrow \exists x \in M : xRy_0$
Da y_0 beliebig gewählt war, gilt $\forall y \in N : \exists x \in N : xRy$ $\square$

.

Ansage

Montag, 1. November ist **Feiertag**!

Evtl. Tutorien finden **nicht** statt!

Besuchen Sie **andere** Tutorien!

Erwarten Sie **keine** Rückgabe der korrigierten Übungsblätter!

.

Zwei Abbildungen:

$f(0) = S, f(1) = t, f(2) = u, f(3) = d, f(4) = i, f(5) = u, f(6) = m$
$g(0) = S, g(1) = t, g(2) = u, g(3) = d, g(4) = i, g(5) = u, g(6) = m$

.

Wörter, Wörter, Wörter

Zwei Abbildungen:

$f(0) = S, f(1) = t, f(2) = u, f(3) = d, f(4) = i, f(5) = u, f(6) = m$
$g(0) = S, g(1) = t, g(2) = u, g(3) = d, g(4) = i, g(5) = u, g(6) = m$

$f = g$???

.

Wörter, Wörter, Wörter

Zwei Abbildungen:

$f(0) = S, f(1) = t, f(2) = u, f(3) = d, f(4) = i, f(5) = u, f(6) = m$
$g(0) = S, g(1) = t, g(2) = u, g(3) = d, g(4) = i, g(5) = u, g(6) = m$

$f = g$???

Was **bedeutet** $f = g$ eigentlich?

.

Wörter, Wörter, Wörter

Zwei Abbildungen:

$f(0) = S, f(1) = t, f(2) = u, f(3) = d, f(4) = i, f(5) = u, f(6) = m$
$g(0) = S, g(1) = t, g(2) = u, g(3) = d, g(4) = i, g(5) = u, g(6) = m$

$f : A \to B, g : C \to D$;

$$f = g \iff A = C \land B = D \land \forall x \in A : f(x) = g(x)$$

.

Wörter, Wörter, Wörter

Zwei Abbildungen:

$f(0) = S, f(1) = t, f(2) = u, f(3) = d, f(4) = i, f(5) = u, f(6) = m$
$g(0) = S, g(1) = t, g(2) = u, g(3) = d, g(4) = i, g(5) = u, g(6) = m$

$f : \mathbb{G}_7 \to A_1, g : \mathbb{G}_7 \to A_2$, A_1 englisches Alphabet, A_2 deutsches Alphabet mit Umlauten

$\to f \neq g$

.

Wörter, Wörter, Wörter

A_1 englisches Alphabet, A_2 deutsches Alphabet mit Umlauten

$A_1^* \cap A_2^* =?$

.

Wörter, Wörter, Wörter

A_1 englisches Alphabet, A_2 deutsches Alphabet mit Umlauten

$A_1^* \cap A_2^* =?$

Wörter wie “man” oder “die” sollten in $A_1^* \cap A_2^*$ liegen.

.

Wörter, Wörter, Wörter

A_1 englisches Alphabet, A_2 deutsches Alphabet mit Umlauten

$A_1^* \cap A_2^* =?$

Wörter wie "man" oder "die" sollten in $A_1^* \cap A_2^*$ liegen.

Darum: Wörter **surjektive** Abbildungen auf Teilmengen des Alphabets, damit Wort eindeutig.

.

Wörter, Wörter, Wörter

Sind die hervorgehobenen Wörter gleich?

“**Die** Biene summt herum.”

.

Wörter, Wörter, Wörter

Sind die hervorgehobenen Wörter gleich?

“**Die** Biene summt herum.”

“**Die** Wikinger entdeckten Amerika.”

.

Wörter, Wörter, Wörter

Sind die hervorgehobenen Wörter gleich?

“**Die** Biene summt herum.”

“**Die** Wikinger entdeckten Amerika.”

“**Die** Bart **Die**”

.

Wörter, Wörter, Wörter

Sind die hervorgehobenen Wörter gleich?

“**Die** Biene summt herum.”

“**Die** Wikinger entdeckten Amerika.”

“**Die** Bart **Die**”

Alle drei das gleiche Wort (für uns Informatiker).

.

Vollständige Induktion

Und ich betrat, geführt von meinem verehrten Freunde, den vierten Kreis der Hölle, wo hintereinander eine Menge von Menschen stand, deren Anzahl mir unmöglich zu schätzen war.

.

Vollständige Induktion

Und ein Dämon trat zu dem ersten Manne der Reihe, kicherte bösartig und stieß ihn nach hinten um.

.

Vollständige Induktion

Und so brachte der erste Mann den zweiten zum Fall, dieser den dritten hinter ihm, und so weiter, und schneller, als ich es hier wiedergeben könnte, lagen die Verdammten hilflos auf ihrem Rücken, so weit meines Auges Blick reichte.

.

Vollständige Induktion

Langsam gelang es dem ersten Mann, sich wieder zu erheben, und ich trat zu ihm heran und fragte, für welche Sünde er und die anderen hinter ihm bestraft würden.

.

Vollständige Induktion

Und er weinte bitterlich, und antwortete: Oh guter Florentiner, den die Güte des Allerhöchsten hier herunter geschickt hat, unser Leiden zu sehen, wisse, dass ich, so wie jene, die hinter mir stehen, immer wieder in der Induktionsvoraussetzung von der zu beweisenden Behauptung ausgegangen sind, weswegen wir nun auf ewig dazu verdammt sind, das Grundprinzip der Induktion zu illustrieren.

.

Vollständige Induktion

Und während er das gesprochen hatte, hatten sich auch nach und nach die anderen Menschen hinter ihm erhoben, wissend, dass gleich der erste in der Reihe wieder umgestoßen werden würde, woraufhin ein jeder von ihnen nach und nach umfallen würde.

.

Vollständige Induktion

Und noch bevor der Dämon dem Manne seine Fratze erneut zeigte, bat ich Vergil, mich von diesem grausigen Ort fort zu bringen.

(Dante Alighieri, “Die Göttliche Komödie”, Inferno, 21. Gesang)

.

Vollständige Induktion

Alphabet A.

Aussage: $\forall w \in A^* : \forall n \in \mathbb{N}_0 : \forall m \in \mathbb{N}_0 : w^n w^m = w^{n+m}$.

Wähle **beliebiges, aber festes** $w \in A^*$, wähle **beliebiges, aber festes** $n \in \mathbb{N}_0$.

Induktion über m.

.

Vollständige Induktion

Zwei Schritte:

- Aussage gilt für $m = 0$.
- $\forall m \in \mathbb{N}_0$: Aussage gilt für $m \Rightarrow$ Aussage gilt für $m + 1$.

.

Vollständige Induktion

Induktionsanfang: $m = 0$: $w^n w^0 = w^n \cdot \epsilon = w^n = w^{n+0}$ ✓

.

Vollständige Induktion

$\forall m \in \mathbb{N}_0$: Aussage gilt für $m \Rightarrow$ Aussage gilt für $m+1$.

Wähle **beliebiges, aber festes** $m \in \mathbb{N}_0$.

Fall 1: Aussage gilt nicht für $m \Rightarrow$ Folgerung ist wahr.

Fall 2: Aussage gilt für $m \Rightarrow$ Dann muss Aussage auch für $m+1$ gelten, oder Folgerung ist nicht für alle $m \in \mathbb{N}_0$ wahr.

.

Vollständige Induktion

Induktionsvoraussetzung: Für ein **beliebiges, aber festes** $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $w^n w^m = w^{n+m}$.

Induktionsschluss: $m \to m + 1$: Zu zeigen: Dann gilt auch $w^n w^{m+1} = w^{n+(m+1)}$.

.

Vollständige Induktion

Induktionsvoraussetzung: Für ein **beliebiges, aber festes** $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $w^n w^m = w^{n+m}$.

Induktionsschluss: $m \to m+1$: Zu zeigen: Dann gilt auch $w^n w^{m+1} = w^{n+(m+1)}$.

$w^n w^{m+1}$

.

Induktionsvoraussetzung: Für ein **beliebiges, aber festes** $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $w^n w^m = w^{n+m}$.

Induktionsschluss: $m \to m + 1$: Zu zeigen: Dann gilt auch $w^n w^{m+1} = w^{n+(m+1)}$.

$w^n w^{m+1} \stackrel{Def}{=} w^n(w^m \cdot w)$

.

Vollständige Induktion

Induktionsvoraussetzung: Für ein **beliebiges, aber festes** $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $w^n w^m = w^{n+m}$.

Induktionsschluss: $m \to m+1$: Zu zeigen: Dann gilt auch $w^n w^{m+1} = w^{n+(m+1)}$.

$$w^n w^{m+1} \stackrel{Def}{=} w^n(w^m \cdot w) \stackrel{Assoziativ}{=} (w^n w^m) \cdot w$$

.

Vollständige Induktion

Induktionsvoraussetzung: Für ein **beliebiges, aber festes** $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $w^n w^m = w^{n+m}$.

Induktionsschluss: $m \to m+1$: Zu zeigen: Dann gilt auch $w^n w^{m+1} = w^{n+(m+1)}$.

$$w^n w^{m+1} \overset{Def}{=} w^n(w^m \cdot w) \overset{Assoziativ}{=} (w^n w^m) \cdot w$$
$$\overset{IV}{=} w^{n+m} \cdot w$$

.

Vollständige Induktion

Induktionsvoraussetzung: Für ein **beliebiges, aber festes** $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $w^n w^m = w^{n+m}$.

Induktionsschluss: $m \to m+1$: Zu zeigen: Dann gilt auch $w^n w^{m+1} = w^{n+(m+1)}$.

$$w^n w^{m+1} \stackrel{Def}{=} w^n (w^m \cdot w) \stackrel{Assoziativ}{=} (w^n w^m) \cdot w$$
$$\stackrel{IV}{=} w^{n+m} \cdot w \stackrel{Def}{=} w^{(n+m)+1}$$

.

Vollständige Induktion

Induktionsvoraussetzung: Für ein **beliebiges, aber festes** $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $w^n w^m = w^{n+m}$.

Induktionsschluss: $m \to m+1$: Zu zeigen: Dann gilt auch $w^n w^{m+1} = w^{n+(m+1)}$.

$$w^n w^{m+1} \overset{Def}{=} w^n(w^m \cdot w) \overset{Assoziativ}{=} (w^n w^m) \cdot w$$
$$\overset{IV}{=} w^{n+m} \cdot w \overset{Def}{=} w^{(n+m)+1} = w^{n+(m+1)}$$

.

Vollständige Induktion

Induktionsvoraussetzung: Für ein **beliebiges, aber festes** $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $w^n w^m = w^{n+m}$.

Induktionsschluss: $m \to m + 1$: Zu zeigen: Dann gilt auch $w^n w^{m+1} = w^{n+(m+1)}$.

$$w^n w^{m+1} \overset{Def}{=} w^n (w^m \cdot w) \overset{Assoziativ}{=} (w^n w^m) \cdot w$$
$$\overset{IV}{=} w^{n+m} \cdot w \overset{Def}{=} w^{(n+m)+1} = w^{n+(m+1)} \quad \square$$

.