**Grundbegriffe der Informatik**
**Musterlösung zu Aufgabenblatt 13**

**Aufgabe 13.1 (3 Punkte)**
Gegeben sei die Relation $R = \{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{N}_0^2 \times \mathbb{N}_0^2 \mid a+d = b+c\}$.
Ist $R$

- reflexiv?
- symmetrisch?
- transitiv?

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

**Lösung 13.1**

- Die Relation ist reflexiv: $(a,b)R(a,b) \iff a+b = b+a$, was nach Kommutativität der Addition gegeben ist.
- Die Relation ist symmetrisch: $(a,b)R(c,d) \iff a+d = b+c \iff c+b = d+b \iff (c,d)R(a,b)$.
- Die Relation ist transitiv:

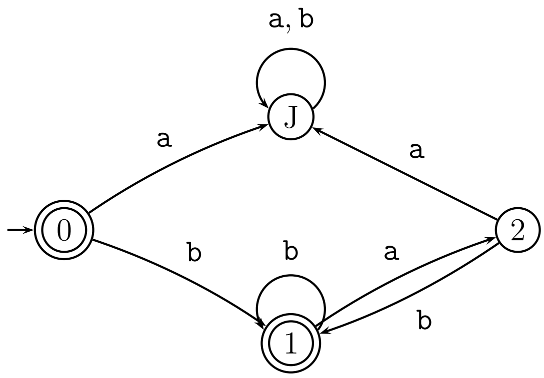
$$\begin{aligned}
(a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(e,f) &\iff \\
a+d = b+c \wedge c+f = d+e &\iff \\
a+d+f = b+c+f \wedge b+c+f = b+d+e &\iff \\
a+d+f = b+d+e &\iff \\
a+f = b+e \iff (a,b)R(e,f)
\end{aligned}$$

**Aufgabe 13.2 (3+4 Punkte)**
Sei $L \in \{a,b\}^*$ folgendermaßen definiert: Wenn in $w \in L$ ein $a$ vorkommt, befindet sich unmittelbar vor und nach diesem $a$ ein $b$.
*Hinweis:* Ein Wort, das kein $a$ enthält, erfüllt diese Bedingung und ist daher in $L$.

a) Geben Sie einen endlichen Akzeptor $A$ an, für den gilt $L(A) = L$.

b) Bestimmen Sie alle Nerode-Äquivalenzklassen zu $L$ und geben Sie zu jeder Klasse einen regulären Ausdruck an.

**Lösung 13.2**




a)

b) Es gibt 4 Nerode Äquivalenzklassen.

$[\varepsilon\ ]$: $\langle \varnothing * \rangle$

$[\mathtt{b}\ ]$: $\langle \mathtt{b}(\mathtt{b}|\mathtt{ab})* \rangle$

$[\mathtt{ba}\ ]$: $\langle \mathtt{b}(\mathtt{b}|\mathtt{ab}) * \mathtt{a} \rangle$

$[\mathtt{a}\ ]$: $\langle (\mathtt{a} \mid \mathtt{b}(\mathtt{b}|\mathtt{ab}) * \mathtt{aa})(\mathtt{a}|\mathtt{b})* \rangle$

**Aufgabe 13.3 (2+3+3 Punkte)**

Gegeben sei ein Alphabet $A$. Für alle $x, y \in A$ und alle $w \in A^*$ seien die Funktionen $f_x : A^* \to A^*$ und $f : A^* \to A^*$ definiert:

$f_x(\varepsilon) = x$,
$f_x(xw) = f_x(w)$,
$f_x(yw) = x f_y(w)$, für $x \neq y$ und $y \in A$

$f(\varepsilon) = \varepsilon$,
$f(xw) = f_x(w)$

a) Es sei $A = \{0, 1\}$. Bestimmen Sie $f(0001011)$ und geben Sie die einzelnen Schritte an.

b) Zeigen Sie: $\forall x \in A, \forall w \in A^* : |f_x(w)| \leq |w| + 1$.

c) Zeigen Sie, dass für alle $w \in A^*$ gilt: $f_x(w)$ enthält kein Teilwort der Form $zz$, mit beliebigem $z \in A$.

**Lösung 13.3**

a) $f(0001011) = f_0(001011) = f_0(01011) = f_0(1011) = 0f_1(011) = 01f_0(11) = 010f_1(1) = 010f_1(\varepsilon) = 0101$

b) Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach $|w|$.

**Induktionsanfang:** $w = \varepsilon : f_x(\varepsilon) = x \Rightarrow |f_x(\varepsilon)| = |x| = 1 \leq |\varepsilon| + 1$ $\surd$

**Induktionsvoraussetzung:**
Für ein beliebiges, aber festes $w$, mit $|w| = n$, $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\forall x \in A : |f_x(w)| \leq |w| + 1$.

**Induktionsschluss:** Wir zeigen, dass die Eigenschaft auch für $w' = y \cdot w$, mit $|w'| = n+1$, $y \in A$ gilt und unterscheiden dabei:

$y \neq x$: $|f_x(w')| = |f_x(yw)| = |x \cdot f_y(w)| = |f_y(w)| + 1 \overset{nach\,IV}{\leq} |w| + 1 + 1 = |w'| + 1$.

$y = x$: $|f_x(w')| = |f_x(xw)| = |f_x(w)| \overset{nach\,IV}{\leq} |w| + 1 \leq |w'| + 1$.

c) Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach $|w|$.

**Induktionsanfang:** $w = \varepsilon : f_x(\varepsilon) = x \Rightarrow$ kein Teilwort der Form $zz$, mit $z \in A$. $\surd$

**Induktionsvoraussetzung:**
Für ein beliebiges, aber festes $w$, mit $|w| = n$, $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\forall x \in A : f_x(w)$ enthält kein Teilwort der Form $zz$, mit beliebigem $z \in A$.

**Induktionsschluss:** Wir zeigen wieder, dass die Eigenschaft auch für $w' = y \cdot w$, mit $|w'| = n+1$, $y \in A$ gilt und unterscheiden dabei:

$y \neq x$: $f_x(w') = f_x(yw) = x \cdot f_y(w) \overset{nach\,IV}{\Rightarrow} f_y(w)$ enthält kein Teilwort der Form $zz$. Aus der Definition der Funktion $f_x$ folgt, dass $f_x$ mit $x$ beginnt bzw $f_y$ mit $y$ beginnt. Aus $x \neq y$ folgt: $f_x(w')$ enthält kein Teilwort der Form $zz$

$y = x$: $f_x(w') = f_x(xw) = f_x(w) \overset{nach\,IV}{\Rightarrow} f_x(w)$ enthält kein Teilwort der Form $zz$.