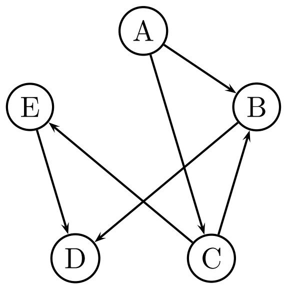
Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 8

Aufgabe 8.1 (2+6 Punkte)
A, B, C, D und E sind beste Freundinnen. Nur die Frage, wer denn nun die Hübscheste von ihnen sei, bringt die fünf immer wieder dazu sich zu streiten. Um das Problem ein für alle Male zu lösen, fragen sie den objektiven F, der folgende Aussagen tätigt: E ist hübscher als D, C ist hübscher als E und B, A ist hübscher als B, B ist hübscher als D und eigentlich ist A auch hübscher als C. Keine ist hübscher als eine andere, wenn F das nicht ausdrücklich sagt.

a) Stellen Sie das Aussehen der Freundinnen als gerichteten Graphen dar. Die Relation, welche durch die Kanten dargestellt wird, soll aufgefasst werden als "ist hübscher als".

b) Wenden Sie den Warshall-Algorithmus an, um herauszufinden, wer die hübscheste ist. Geben Sie dabei die Matrix W an, die sich nach Abschluss der Initialisierung ergeben hat, sowie die Matrizen W_0 , W_1 , W_2 , W_3 , W_4 die sich jeweils nach dem ersten, zweiten, dritten, vierten und fünften Durchlauf der äußeren Schleife beim zweiten Teil des Algorithmus ergeben.

Lösung 8.1

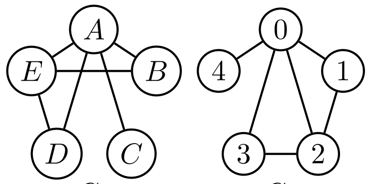
a) 

G

b) $$W = \begin{pmatrix} 1&1&1&0&0\\ 0&1&0&1&0\\ 0&1&1&0&1\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&1 \end{pmatrix} W_0 = \begin{pmatrix} 1&1&1&0&0\\ 0&1&0&1&0\\ 0&1&1&0&1\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&1 \end{pmatrix} W_1 = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&0\\ 0&1&0&1&0\\ 0&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&1 \end{pmatrix}$$

$$W_2 = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1\\ 0&1&0&1&0\\ 0&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&1 \end{pmatrix} W_3 = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1\\ 0&1&0&1&0\\ 0&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&1 \end{pmatrix} W_4 = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1\\ 0&1&0&1&0\\ 0&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.2 (2 Punkte)
Geben Sie alle Isomorphismen zwischen G_0 und G_1 an.



G_0 G_1

Lösung 8.2

1.

G_0 :	A	B	C	D	E
G_1 :	0	1	4	3	2

2.

G_0 :	A	B	C	D	E
G_1 :	0	3	4	1	2

Aufgabe 8.3 (3 Punkte)
Die Höhe eines Baumknotens x ist die Länge des Weges von der Wurzel zu x. Es sei $T = (\mathbb{G}_n, E)$ ein ungerichteter binärer Baum. H_b ist die Summe der Höhen aller Blattknoten, H_i ist die Summe der Höhen der inneren Knoten. Finden Sie Konstanten a, b, so dass die Gleichung

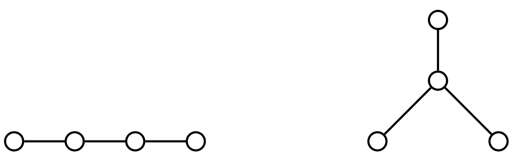
$$H_b + 1 = a \cdot H_i + b \cdot n$$

stimmt, oder zeigen Sie, dass es keine solchen Konstanten a und b gibt.

Lösung 8.3
Es gibt keine solchen Konstanten a und b.
Betrachten wir einen Baum mit 1 Knoten (davon gibt es nur einen). Für die gegebene Gleichung gilt dann:

$$0 + 1 = a \cdot 0 + b \cdot 1$$

Daraus folgt, dass gelten muss $b = 1$.
Betrachten wir nun folgende Bäume mit 4 Knoten.



G_0 G_1

Für G_1 gilt nach der gegebenen Gleichung dann:

$$4 + 1 = a \cdot 1 + b \cdot 4$$

Daraus folgt, dass gelten muss $a = 1$.
Für G_0 lässt sich die Gleichung jedoch für $a = 1, b = 1$ nicht erfüllen:

$$\begin{aligned} &3 + 1 = a \cdot 3 + b \cdot 4 \text{ bzw. je nach Wahl der Wurzel} \\ &3 + 1 = a \cdot 1 + b \cdot 4 \end{aligned}$$

Aufgabe 8.4 (2+2+3 Punkte)
Für $n \in \mathbb{N}_+$ sei der Graph $G_n = (V_n, E_n)$ gegeben durch

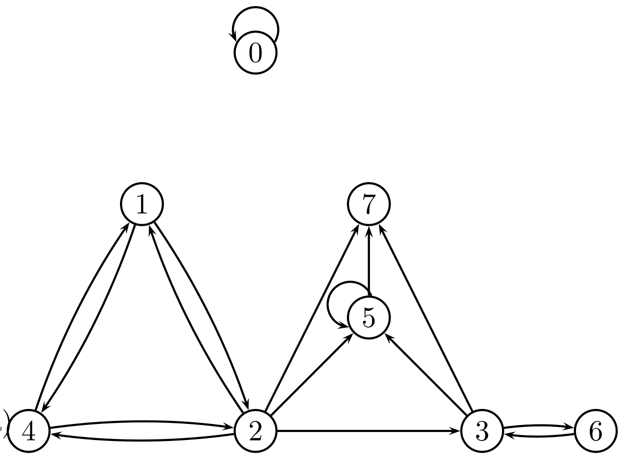
$$\begin{aligned} V_n =& \{x \in \mathbb{N}_0 \mid x < 2^n\} \\ E_n =& \{(x, y) \in V_n \times V_n \mid (\exists w_1, w_2 \in \{0,1\}^* : x = \mathrm{Num}_2(w_1 0 w_2) \wedge y = \mathrm{Num}_2(w_2 0 w_1)) \vee \\ & (x \text{ ist Primzahl} \wedge y \text{ ist Primzahl} \wedge x < y)\} \end{aligned}$$

a) Zeichnen Sie G_3.
b) Geben Sie die Adjazenzmatrix von G_3 an.
c) Geben Sie die Wegematrix von G_3 an.
(**Hinweis**: Suchen Sie im Graphen nach den Pfaden; verwenden Sie keinen der vorgestellten Algorithmen.)

Hinweis: Wir gehen davon aus, dass 1 keine Primzahl ist.

Lösung 8.4

a)



b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$