Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1.1 (3+1+2+1 Punkte)
Gegeben sei die Menge $\mathbb{G}_3 = \{0, 1, 2\}$.

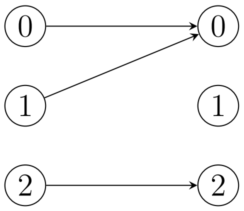
a) Geben Sie graphisch eine Relation $R \subseteq \mathbb{G}_3 \times \mathbb{G}_3$ an, die linkstotal und rechtseindeutig, aber nicht rechtstotal und nicht linkseindeutig ist.

b) Geben Sie in Mengenschreibweise eine andere Relation $R_2 \subseteq \mathbb{G}_3 \times \mathbb{G}_3$ an, die linkstotal und rechtseindeutig, aber nicht rechtstotal und nicht linkseindeutig ist.

c) Wie viele solcher Relationen R gibt es?

d) Wie viele bijektive Abbildungen von $\mathbb{G}_3$ nach $\mathbb{G}_3$ gibt es?

Lösung 1.1

a) 

Hinweis: pro korrekter Eigenschaft 0,5 Punkte

b) $R_b = \{(0, 1), (1, 1), (2, 2)\}$

c) Es gibt 21 solche Relationen R.

$3 \cdot 3 \cdot 2$ Möglichkeiten für die "Struktur" aus Teilaufgabe a) und 3 weitere Möglichkeiten, bei denen $0, 1$ und 2 auf ein einzelnes Element abgebildet werden.

(Alternativer Rechenweg: Alle Abbildungen auf einer 3-elementigen Menge (das sind 27) abzüglich der bijektiven Abbildungen).

Hinweis: wenn nur einzelne Möglichkeiten vergessen wurden, gibt es dennoch Teilpunkte. Z.B. 1 Punkt für die Antwort "18 Möglichkeiten".

d) Es gibt 6 bijektive Abbildungen.

Aufgabe 1.2 (1+2 Punkte)

Gegeben seien zwei beliebige, nichtleere, endliche Mengen A und B, sowie eine injektive Abbildung $f : A \to B$.

a) Was muss für die Anzahl der Elemente der Menge B gelten?

b) Geben Sie eine surjektive Abbildung $g : B \to A$ an.

Lösung 1.2

a) Die Anzahl der Elemente der Menge B muss mindestens so groß wie die Anzahl der Elemente der Menge A sein.

b) $g(x) = \begin{cases} a & \text{, falls } f(a) = x \\ a' & \text{, sonst} \end{cases}$

mit $a' \in A$

Alternativ auch Angabe als Menge möglich:
$\{(b, a) \mid (a, b) \in f\} \cup \{(b, a') \mid \neg\exists a \in A : (a, b) \in f\}$

Aufgabe 1.3 (3 Punkte)

Anne Ackermann, Bea Bernoulli, Cindy Chomsky, Dorothea Dijkstra und Eva Euler sind die fünf Mitglieder des Karlsruher Pferdefreundeclubs. Jede von ihnen besitzt genau ein Pferd. Dieses ist nach genau einem Ehemann der anderen Frauen benannt.
Annes Pferd heisst Georg, Cindys Pferd heisst Joachim und Evas Pferd heisst Igor. Fritz gehört Dorothea und ist nach Annes Ehemann benannt. Georgs Ehefrau gehört das Pferd, welches nach Beas Ehemann benannt ist. Hans Chomsky ist der einzige der Ehemänner, der reiten kann.
Geben Sie eine Tabelle mit passenden "Ehefrau-Ehemann-Pferd" Zugehörigkeiten an.
Hinweis: Ehemann und Ehefrau haben jeweils den selben Nachnamen. Es gibt keine Polygamie!

Lösung 1.3

Frau	*Pferd*	*Mann*
A	G	F
B	H	I
C	J	H
D	F	J
E	I	G

Aufgabe 1.4 (3+3 Punkte)
Zeigen oder widerlegen Sie jeweils. Für beliebige Mengen A, B, C, D gilt:

a) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

b) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$

Lösung 1.4

a) $(A \times B) \cap (C \times D) = \{(x, y) \mid (x, y) \in (A \times B) \text{ und } (x, y) \in (C \times D)\}$
$= \{(x, y) \mid x \in A \text{ und } y \in B \text{ und } x \in C \text{ und } y \in D\}$
$= \{(x, y) \mid x \in A \text{ und } x \in C \text{ und } y \in B \text{ und } y \in D\}$
$= \{(x, y) \mid x \in A \cap C \text{ und } y \in B \cap D\}$
$= (A \cap C) \times (B \cap D)$

b) Widerlegen durch Gegenbeispiel: $A = \{0\}, B = \{1\}, C = \{2\}, D = \{3\}$
$(A \times B) \cup (C \times D) = \{(0, 1), (2, 3)\}$
$(A \cup C) \times (B \cup D) = \{0, 2\} \times \{1, 3\} = \{(0, 1), (2, 1), (0, 3), (2, 3)\}$