Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 11

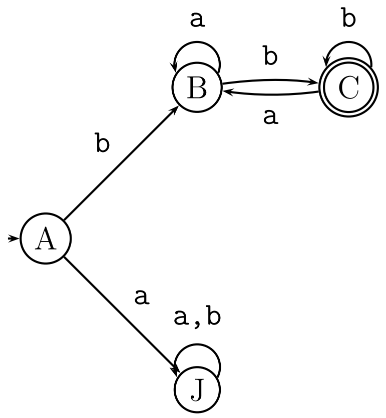
Aufgabe 11.1 (2+2 Punkte)
Geben Sie zu folgendem regulären Ausdruck $R =$ `(b|ba)(a|b)*(ab|b)`

a) eine kurze, möglichst präzise Beschreibung für $\langle R \rangle$ in eigenen Worten und

b) einen endlichen Akzeptor $A = (Z, s, \{\texttt{a,b}\}, f, F)$ an, so dass gilt: $L(A) = \langle R \rangle$

Lösung 11.1

a) Der reguläre Ausdruck beschreibt alle Wörter über dem Alphabet $\{\texttt{a,b}\}$ der Länge ≥ 2, die mit einem b beginnen und mit einem b enden.



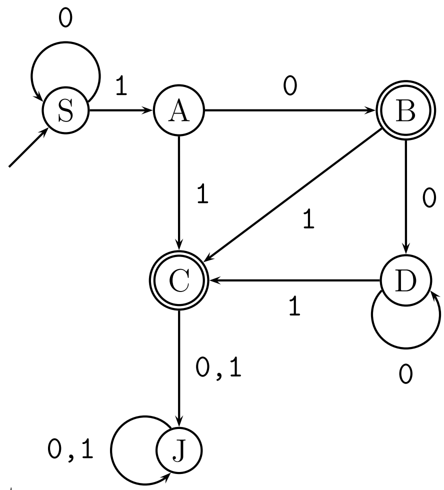
b)

Aufgabe 11.2 (5+6 Punkte)
Geben Sie für die folgenden Sprachen L_i jeweils einen endlichen Akzeptor A_i, einen regulären Ausdruck R_i und eine rechtslineare Grammatik G_i an, so dass für $i \in \{1, 2\}$ gilt: $L(A_i) = \langle R_i \rangle = L(G_i) = L_i$.
Hinweis: Benutzen Sie für Ihren Akzeptor jeweils möglichst wenig Zustände.

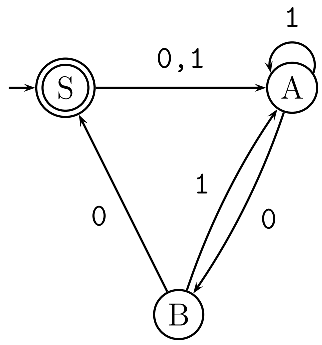
a) $L_1 = \{w \in \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^* \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 : Num_2(w) = 2^k + 1\}$.

b) $L_2 = \{\texttt{0}^{3m}\} \cup \{w\texttt{10}^{3n+2} \mid w \in \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^*\}$, mit $m, n \in \mathbb{N}_0$.

Lösung 11.2



a)
- Akzeptor:
- regulärer Ausdruck: `0*10 | 0*10*1`
- rechtslineare Grammatik: $G = (\{S, A\}, \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}, S, \{S \to \mathtt{0}S \mid \mathtt{10} \mid \mathtt{1}A,$
  $A \to \mathtt{0}A \mid \mathtt{1}\})$



b)
- Akzeptor:
- regulärer Ausdruck: `(000)* | (0|1)*100(000)*`
- rechtslineare Grammatik: $G = (\{S, A, B, C\}, \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}, S, \{S \to \mathtt{000}S \mid A \mid \varepsilon,$
  $A \to \mathtt{0}A \mid \mathtt{1}A \mid B,$
  $B \to \mathtt{100}C,$
  $C \to \mathtt{000}C \mid \varepsilon\})$

Hinweis: Punkteverteilung bei a) Akzeptor: 2 Punkte; regEx und Grammatik je 1,5 Punkte. Bei b) alles jeweils 2 Punkte

Aufgabe 11.3 (1 Punkte)
Gegeben sei folgender regulärer Ausdruck $R =$ `c*(∅*|a(a|b|c)*|(a|b|c)*b)c*`

Gilt $\langle R\rangle = \{\texttt{a,b,c}\}^*$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung 11.3
Nein, `ba` ist z.B. nicht durch den regulären Ausdruck abgedeckt.

Aufgabe 11.4 (4 Punkte)
Die Funktion $f : Z \times X \to Z$ bezeichnet wie in der Vorlesung definiert die Zustandsüberführungsfunktion eines endlichen Akzeptors $A = (Z, z_0, X, f, F)$.
Gegeben ist die Definition der erweiterten Zustandsüberführungsfunktion $f^* : Z \times X^* \to Z$

$$f^*(z, \varepsilon) = z$$
$$\forall z \in Z : \forall w \in X^* : \forall x \in X : f^*(z, xw) = f^*(f(z, x), w)$$

Beweisen Sie für alle $x \in X, w \in X^*, z \in Z$:

$$f^*(z, wx) = f(f^*(z, w), x)$$

per Induktion über $|w|$.

Lösung 11.4
Induktionsanfang: Für $w = \varepsilon$ gilt: $f^*(z, \varepsilon x) = f^*(z, x\varepsilon) = f^*(f(z, x), \varepsilon) = f(z, x) = f(f^*(z, \varepsilon), x)\surd$.
Induktionsvoraussetzung:
Für alle Wörter w' mit beliebiger, aber fester Länge $n \in \mathbb{N}_0$ gelte: $\forall z \in Z : \forall x \in X : f^*(z, w'x) = f(f^*(z, w'), x)$.
Induktionsschritt: Gezeigt wird, dass die Behauptung auch für Wörter w der Länge $n + 1$ gilt. $x, y \in X$.
$f^*(z, wx) = f^*(z, yw'x) = f^*(f(z, y), w'x) \overset{\text{IV}}{=} f(f^*(f(z, y), w'), x) \overset{\text{nach Def.}}{=} f(f^*(z, yw'), x) = f(f^*(z, w), x)$.
Hinweis: 1.5 Punkte für IA, 0.5 Punkte für IV und 2 Punkte für IS.