Grundbegriffe der Informatik
Musterlösung zu Aufgabenblatt 13

Aufgabe 13.1 (4+4+2 Punkte)

Für $k \in \mathbb{N}_+$ sei die formale Sprache L_k über dem Alphabet $\{\mathtt{a},\mathtt{b}\}$ folgendermaßen definiert: Das k-letzte Zeichen eines Wortes $w \in L_k$ ist ein $\mathtt{a}$.

a) Bestimmen Sie alle Nerode-Äquivalenzklassen zu L_2 und geben Sie zu jeder Klasse einen regulären Ausdruck an.

b) Geben Sie einen endlichen Akzeptor A_3 an, für den gilt $L(A_3) = L_3$.

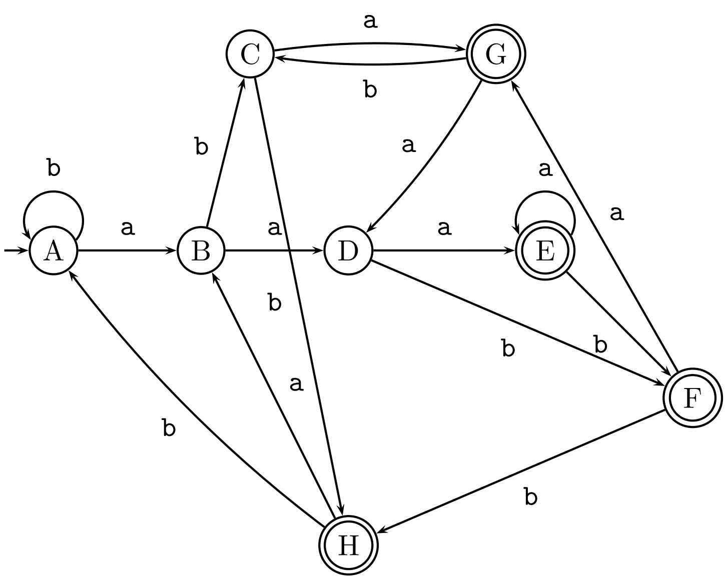
c) Wie viele Nerode-Äquivalenzklassen hat L_k?

Lösung 13.1

a) Es gibt 4 Nerode Äquivalenzklassen.

$[\mathtt{bb}\ ]$: $\langle(((\mathtt{a}|\mathtt{b}) * \mathtt{bb})|\mathtt{b}*)\rangle$ $\quad$ $[[\mathtt{ba}]]$: $\langle(((\mathtt{a}|\mathtt{b}) * \mathtt{ba})|\mathtt{a}\rangle$

$[\mathtt{ab}\ ]$: $\langle(\mathtt{a}|\mathtt{b}) * \mathtt{ab}\rangle$ $\quad$ $[[\mathtt{aa}]]$: $\langle(\mathtt{a}|\mathtt{b}) * \mathtt{aa}\rangle$



b)

c) L_k hat 2^k Nerode-Äquivalenzklassen.

Aufgabe 13.2 (4 Punkte)
Gegeben sei eine Relation $R \subseteq M \times M$. R^{-1} ist definiert als $\{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion: $\forall i \in \mathbb{N}_0 : (R \cup R^{-1})^i$ ist symmetrisch.

Lösung 13.2
Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach i.

Induktionsanfang: $i = 0 : (R \cup R^{-1})^0$ ist nach Definition gerade die Identität, welche symmetrisch ist. $\surd$

Induktionsvoraussetzung:
Für ein beliebiges, aber festes $i \in \mathbb{N}_0$ gilt: $(R \cup R^{-1})^i$ ist symmetrisch.

Induktionsschluss: Wir zeigen, dass die Eigenschaft auch für $(a,b) \in (R \cup R^{-1})^{i+1}$ gilt:

$(a,b) \in (R \cup R^{-1})^{i+1} \Leftrightarrow (a,b) \in ((R \cup R^{-1}) \circ (R \cup R^{-1})^i)$

$\Leftrightarrow \exists c \in M : (a,c) \in (R \cup R^{-1})^i \wedge (c,b) \in (R \cup R^{-1})$

$\overset{nach\, IV}{\Rightarrow} (c,a) \in (R \cup R^{-1})^i \overset{nach\, Def.}{\wedge} (b,c) \in (R \cup R^{-1})$

$\Rightarrow (b,a) \in ((R \cup R^{-1})^i \circ (R \cup R^{-1})) \iff (b,a) \in (R \cup R^{-1})^{i+1}$, also $(R \cup R^{-1})^{i+1}$ ist symmetrisch.

Aufgabe 13.3 (3+1 Punkte)
Die Relation $S \subseteq \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+$ sei gegeben durch:

$$nSm \iff n \text{ ist Primzahl} \wedge m \text{ ist Primzahl} \wedge \mathrm{Repr}_{10}(n) = R(\mathrm{Repr}_{10}(m))$$

a) Überprüfen Sie S jeweils auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.

b) Für welche nichtleere Grundmenge M ist $S \subseteq M \times M$ eine Äquivalenzrelation?

Hinweis: Zur Erinnerung: $R(\varepsilon) = \varepsilon$, $\forall w \in A^* : \forall x \in A : R(xw) = R(w)x$

Lösung 13.3

a)
- Die Relation ist nicht reflexiv, da $\exists n \in \mathbb{N}_+ : (n,n) \notin S$, z.B. $(8,8) \notin S$.

- Die Relation ist symmetrisch: $(n,m) \in S \iff n$ ist Primzahl$\wedge m$ ist Primzahl$\wedge$ $\text{Repr}_{10}(n) = R(\text{Repr}_{10}(m))$.

  Trivial: Wenn n und m Primzahlen sind, dann sind auch m und n Primzahlen $\Rightarrow$ "Reihenfolge egal"

  $\text{Repr}_{10}(n) = R(\text{Repr}_{10}(m)) \iff R(\text{Repr}_{10}(n)) = R(R(\text{Repr}_{10}(m))) \iff$ $\text{Repr}_{10}(m) = R(\text{Repr}_{10}(n))$

  $\Rightarrow (n,m) \in S \Rightarrow (m,n) \in S$
- Die Relation ist nicht transitiv: $(13,31) \in S \wedge (31,13) \in S$ jedoch $(13,13) \notin S$, da $\text{Repr}_{10}(13) \neq R(\text{Repr}_{10}(13)$

b) S ist z.B. für die Grundmenge der einstelligen Primzahlen $\{2,3,5,7\}$ eine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 13.4 (4 Punkte)
Gegeben sei die folgende Turingmaschine T:

- Zustandsmenge ist $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$.
- Anfangszustand ist z_0.
- Bandalphabet ist $X = \{\square, \texttt{a}, \texttt{b}\}$.
- Die Arbeitsweise ist wie folgt festgelegt:

	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
a	$(z_1, \square, 1)$	$(z_1, \texttt{a}, 1)$	$(z_3, \texttt{a}, -1)$	-	$(z_4, \texttt{a}, -1)$	$(z_5, \texttt{b}, 1)$
b	$(z_5, \texttt{a}, 1)$	$(z_2, \texttt{b}, 1)$	$(z_2, \texttt{b}, 1)$	$(z_4, \texttt{a}, -1)$	$(z_4, \texttt{b}, -1)$	$(z_5, \texttt{a}, 1)$
$\square$	-	-	$(z_3, \square, -1)$	-	$(z_0, \square, 1)$	$(z_4, \square, -1)$

Der Kopf der Turingmaschine stehe zu Beginn auf dem ersten Symbol von $w \in \{\texttt{a}, \texttt{b}\}^*$ (sofern w nicht das leere Wort ist).
Geben Sie für die Eingabe `aabbbb` die Anfangskonfiguration, die Endkonfiguration und jede weitere Konfiguration an, die sich während der Berechnung nach einer Änderung der Bandbeschriftung ergibt.

Lösung 13.4
Anfangskonfiguration: $z_0\texttt{aabbbb}$
Zwischenkonfigurationen:
$z_1\texttt{abbbb} \Rightarrow \texttt{abb}z_4\texttt{ba} \Rightarrow z_1\texttt{bbba} \Rightarrow \texttt{b}z_4\texttt{baa} \Rightarrow \texttt{a}z_5\texttt{baa} \Rightarrow \texttt{aa}z_5\texttt{aa} \Rightarrow \texttt{aab}z_5\texttt{a} \Rightarrow \texttt{aabb}z_5\square \Rightarrow z_1\texttt{abb} \Rightarrow \texttt{a}z_4\texttt{ba} \Rightarrow z_1\texttt{ba} \Rightarrow z_4\square\texttt{aa} \Rightarrow z_1\texttt{a}$
Endkonfiguration: $\texttt{a}z_1\square$