Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 6

Matr.nr.:

Nachname:

Vorname:

Tutorium: Nr. Name des Tutors:

Ausgabe: 27. November 2013

Abgabe: 6. Dezember 2013, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengetackert

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 6: / 20

Blätter 1 – 6: / 112

Aufgabe 6.1 (2+3+2=7 Punkte)

In dieser Aufgabe geht es um die Zahlendarstellung mit Hilfe der Ziffern aus dem Alphabet $Z = \{\mathtt{\bar{1}}, \mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ mit den Wertigkeiten

- $\mathrm{num}(\mathtt{\bar{1}}) = -1$, • $\mathrm{num}(\mathtt{0}) = 0$, • $\mathrm{num}(\mathtt{1}) = 1$

und den Festlegungen

- $\mathrm{Num}(\varepsilon) = 0$ und • $\forall w \in Z^* \, \forall x \in Z \colon \mathrm{Num}(wx) = 3 \cdot \mathrm{Num}(w) + \mathrm{num}(x)$

Auf den Vorlesungsfolien wurde die „schriftliche Addition“ zweier solcher Zahlen etwas ungenau vorgeführt.

Gegeben sei die Funktion $\bar{S} \colon Z^3 \to M$ mit $M = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ und $\bar{S}(a, b, c) = \mathrm{num}(a) + \mathrm{num}(b) + \mathrm{num}(c)$ für alle $a, b, c \in Z$.

a) Geben Sie die Wertetabellen für zwei Funktionen $\mathbf{S}' \colon M \to Z$ und $\mathbf{C}' \colon M \to Z$, so dass für die Funktionen $\mathbf{S} = \mathbf{S}' \circ \bar{S}$ und $\mathbf{C} = \mathbf{C}' \circ \bar{S}$ beim schriftlichen Addieren gilt:

$$\begin{array}{cc}
\text{Stelle} & \text{Stelle} \\
p-1 & p \\
 & \\
 & a_p \\
 & b_p \\
\mathbf{C}(a_p, b_p, c_p) & c_p \\
\hline
 & \mathbf{S}(a_p, b_p, c_p)
\end{array}$$

Dabei sind a_p und b_p die beiden mit dem Übertrag c_p von der nächsten Stelle weiter rechts zu addierenden Ziffern, $\mathbf{S}(a_p, b_p, c_p)$ die Ziffer, die man unter den Strich schreibt, und $\mathbf{C}(a_p, b_p, c_p)$ ist der Übertrag für die nächste Stelle weiter links.

Wir nehmen nun an, dass x und y zwei Wörter *gleicher Länge* n seien. Gehen Sie davon aus, dass die ersten Ziffern von x und y $\mathtt{0}$ sind, also $x, y \in \{\mathtt{0}\} \cdot Z^{n-1}$.

Fassen Sie x und y wie am Anfang der Vorlesung als Abbildungen mit Definitionsbereich $\mathbb{G}_n$ auf. Dann ist zum Beispiel $x(0)$ das erste Symbol links in x und $y(n-1)$ das letzte Symbol rechts in y.

b) Ergänzen Sie die Lücken im folgenden Algorithmus so, dass am Ende im Wort $z \in Z^*$ die eine Repräsentation der Zahl $\mathrm{Num}(x) + \mathrm{Num}(y)$ steht. Benutzen Sie die Funktionen $\mathbf{S}$ und $\mathbf{C}$ aus Teilaufgabe a).

$\langle$*Eingabe sind Wörter* $x = x(0) \cdots x(n-1)$ *und* $y = y(0) \cdots y(n-1)$ $\rangle$

$z \gets \boxed{}$

$c \gets \boxed{}$

$p \gets \boxed{}$ $\langle$*betrachtete Position*$\rangle$

for $i \gets 0$ **to** $n-1$ **do**

  $z \gets \boxed{} \cdot \boxed{}$ $\langle$*Konkatenation*$\rangle$

  $c \gets \boxed{}$

  $p \gets \boxed{}$

od

c) Warum wurde vorausgesetzt, dass x und y mit einer führenden $\mathtt{0}$ beginnen? Welche Anweisung muss man nach Ende der Schleife ergänzen, damit diese Voraussetzung nicht mehr nötig ist?

Aufgabe 6.2 (5 Punkte)
Es sei $h : A^* \to B^*$ ein Homomorphismus. Beweisen Sie

$$\forall w_1 \in A^*\colon \forall w_2 \in A^*\colon h(w_1 w_2) = h(w_1)h(w_2)$$

Hinweis: vollständige Induktion über die Länge von w_2.

Aufgabe 6.3 (4 Punkte)
Es sei A das Alphabet $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und $f\colon A^* \to A^*$ die Abbildung

$$f(\varepsilon) = \varepsilon$$
$$\forall w \in A^*\ \forall x \in A\colon f(wx) = xf(w)x$$

a) Ist f surjektiv?
b) Beweisen Sie Ihre Behauptung aus Teilaufgabe a).
c) Ist f ein Homomorphismus?
d) Beweisen Sie Ihre Behauptung aus Teilaufgabe c).

Aufgabe 6.4 (2+2=4 Punkte)

a) Konstruieren Sie den Huffman-Baum für das Wort $w = \mathtt{dadbdadcdadbdad}$.

b) Geben Sie an, welche Huffman-Codierungen für die in w vorkommenden Symbole man aus dem Baum in Teilaufgabe a) ablesen kann.