Grundbegriffe der Informatik
Lösungsvorschläge Aufgabenblatt 9

Matr.nr.:							

Nachname:

Vorname:

Tutorium: Nr. Name des Tutors:

Ausgabe: 18. Dezember 2013

Abgabe: 10. Januar 2014, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengetackert

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 9: / 19

Blätter 1 – 9: / 167

Aufgabe 9.1 (3 Punkte)
Gegeben sei der folgende Algorithmus:

$x \leftarrow 0$
for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
  for $j \leftarrow 0$ **to** $i-1$ **do**
    for $k \leftarrow j$ **to** $n-1$ **do**
      $x \leftarrow x+1$
    od
  od
od

Es bezeichne $f(n)$ den Wert der Variablen x nach Beendigung der Schleife in Abhängigkeit von n.

a) Beweisen Sie, dass $f(n) \in O(n^3)$ ist.
b) Beweisen Sie, dass $f(n) \in \Omega(n^3)$ ist.

Lösung 9.1

a) Man betrachte den folgenden Algorithmus:

$x \leftarrow 0$
for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
  for $j \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
    for $k \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
      $x \leftarrow x+1$
    od
  od
od

Jede Schleife wird im Vergleich zum Original mindestens genauso oft durchlaufen. Und jede Schleife wird, wenn sie betreten wird, jeweils genau n mal durchlaufen. Also hat x am Ende den Wert n^3, also ist $f(n) \in O(n^3)$.

b) Betrachte den folgenden Algorithmus:

$x \leftarrow 0$
for $i \leftarrow \lfloor n/2 \rfloor$ **to** $n-1$ **do**
  for $j \leftarrow 0$ **to** $\lceil n/2 \rceil$ **do**
    for $k \leftarrow \lfloor n/2 \rfloor$ **to** $n-1$ **do**
      $x \leftarrow x+1$
    od
  od
od

Jede Schleife wird im Vergleich zum Original höchstens genauso oft durchlaufen. Und jede Schleife wird, wenn sie betreten wird, jeweils mindestens

$n/2$ mal durchlaufen. Also hat x am Ende einen Wert größer oder gleich $\lfloor n/2 \rfloor^3$, also ist $f(n) \in \Omega(n^3)$.

Aufgabe 9.2 (4 Punkte)
Betrachten Sie folgende kleine Variante des Algorithmus von Warshall, der eine Folge von Matrizen W_0, W_1, usw. bis W_n berechnet:

for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
  for $j \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
    $W_0[i,j] \leftarrow \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ A[i,j] & \text{falls } i \neq j \end{cases}$
  od
od

for $k \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
  for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
    for $j \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
      $W_{k+1}[i,j] \leftarrow \max(\, W_k[i,j], \min(W_k[i,k], W_k[k,j])\,)$
    od
  od
od

Der Algorithmus soll angewendet werden auf den Graphen $G = (\mathbb{G}_6, E)$ mit Kantenmenge $E = \{(0,1),(0,3),(1,2),(1,4),(2,0),(2,5)\}$

a) Geben Sie W_0 nach Ausführung des Algorithmus an.
b) Geben Sie W_1 nach Ausführung des Algorithmus an.
c) Für welchen Wert m der Laufvariable k ergibt sich im Algorithmus für den Beispielgraphen G zum letzten Mal eine Matrix W_m, die sich von der „vorhergehenden" Matrix M_{m-1} unterscheidet?
d) Geben Sie alle weiteren Matrizen W_2 bis W_m an (für den Wert m aus der vorangegangenen Teilaufgabe).

Lösung 9.2

a) $W_0 = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$

b) Änderung gegenüber W_0 grau hinterlegt

$$W_1 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \boxed{1} & 1 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

c) $m = 3$

d) Änderungen grau hinterlegt:

$$W_2 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \boxed{1} & 1 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$W_3 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & 1 & 1 & \boxed{1} & 1 & \boxed{1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Aufgabe 9.3 (5 Punkte)
Geben Sie für jede der nachfolgend definierten Funktionen $f_i \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ jeweils explizit eine Funktion $g_i : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ an, so dass $f_i(n) \in \Theta(g_i(n))$ ist.
Die Funktionen g_i müssen explizit angegeben werden und dürfen nicht rekursiv definiert sein. Antworten der Form „$g_1 = f_1$“ sind also unzulässig.

a) $f_1(0) = 1$ und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei $f_1(n+1) = \frac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)^{n+1}} f_1(n)$.

b) $f_2(0) = 2$ und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei $f_2(n+1) = 1 + (-1)^{f_2(n)/2}$.

c) $f_3(0) = 4711$ und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei $f_3(n+1) = \lceil \log_2(1 + f_3(n)) \rceil$.

d) $f_4(0) = 0$ und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei $f_4(n+1) = f_4(n) + 2n + 1$.

e) $f_5(0) = 1$ und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei $f_5(n+1) = f_5(n) + \lceil \log_2(n+1) \rceil$.

Hinweis: $\lceil x \rceil$ bedeute „aufrunden“ von x auf die nächstgrößere ganze Zahl; für $x \in \mathbb{N}_0$ sei $\lceil x \rceil = x$.

Lösung 9.3
Zum Beispiel:

a) $g_1(n) = (n+1)^{n+1}$

b) Achtung: $\Theta(1)$ ist falsch. Es tut

$$g_2(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 2 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

c) $g_3(n) = 1$

d) $g_4(n) = n^2$

e) $g_5(n) = n \log n$ (die Basis des Logarithmus ist wegen asymptotischer Betrachtung gleichgültig)

Aufgabe 9.4 (3 Punkte)
Alle nachfolgend benutzten Funktionen seien von der Form $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$. Beweisen Sie: Wenn $g_1 \preceq f_1$ ist, und wenn $g_1 \asymp g_2$ und $f_1 \asymp f_2$, dann gilt auch $g_2 \preceq f_2$.

Lösung 9.4
Die Voraussetzungen bedeuten:

$$\exists c \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : g_1(n) \leq c f_1(n)\ .$$

$$\exists c_f, c'_f \in \mathbb{R}_+ : \exists n_f \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_f : c_f f_1(n) \leq f_2(n) \leq c'_f f_1(n)\ .$$

$$\exists c_g, c'_g \in \mathbb{R}_+ : \exists n_g \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_g : c_g g_1(n) \leq g_2(n) \leq c'_g g_1(n)\ .$$

Dann gilt für alle $n \geq \max(n_0, n_f, n_g)$

$$g_2(n) \leq c'_g g_1(n) \leq c'_g c f_1(n) \leq \frac{c'_g c}{c_f} f_2(n)\ .$$

Aufgabe 9.5 (4 Punkte)
Die Funktion $\log_2^*\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ ist wie folgt definiert:

$$\log_2^* n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \leq 1 \\ 1 + \log_2^*(\log_2 n) & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Berechnen Sie $\log_2^*(65536)$ und geben Sie $\log_2^*(65537)$ an.
b) Wieviele Ziffern hat die Dezimaldarstellung der kleinsten Zahl $m \in \mathbb{N}_0$ mit $\log_2^*(m) = 6$?
c) Definieren Sie eine Funktion $\exp_2^*\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\log_2^*(\exp_2^*(n)) = n$.
d) Beweisen Sie, dass $\log_2^* n \notin O(1)$ ist.

Lösung 9.5

a) $\log_2^*(65536) = 1 + \log_2^*(16) = 2 + \log_2^*(4) = 3 + \log_2^*(2) = 4 + \log_2^*(1) = 4$
$\log_2^*(65537) = 5$

b) Die hat Zahl 19729 Dezimalstellen.
Nicht geforderte Erklärung: Die gesuchte Zahl ist $m = 1 + 2^{65536}$ und $\log_{10}(2^{65536}) \approx 19728.30179583\ldots$

c) Definiere

$$\exp_2^*(0) = 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N}_0\colon\ \exp_2^*(n+1) = 2^{\exp_2^*(n)}$$

d) In Teilaufgabe c) hat man gesehen, dass es für jedes n eine Zahl $\exp_2^*(n)$ gibt mit $\log_2^*(\exp_2^*(n)) = n$. Also nimmt $\log^* n$ unbeschränkt große Funktionswerte an.
Wäre $\log_2^* n \in O(1)$, dann gäbe es eine Konstante $c > 0$, so dass ab einem n_0 für alle $n \geq n_0$ gelten würde: $\log^* n \leq c$. Damit wären aber alle Funktionswerte beschränkt durch $c + \max\{\log^* n \mid n < n_0\}$.