Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 2

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr.
	Name des Tutors:

Ausgabe: 29. Oktober 2014

Abgabe: 7. November 2014, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 2:	/ $17 + 2$
Blätter 1 – 2:	/ $32 + 5$

Aufgabe 2.1 (4 Punkte)
Die Sprache L enthalte genau jene Worte aus $\{\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c}\}^*$, bei denen auf ein $\mathtt{b}$ kein $\mathtt{a}$ folgt und auf ein $\mathtt{c}$ weder ein $\mathtt{a}$ noch ein $\mathtt{b}$.

a) Geben Sie die Sprache L in der Form $\{w \in \{\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c}\}^* \mid \dots\}$ an.
b) Geben Sie drei Sprachen L_1, L_2 und L_3 so an, dass jede der drei Sprachen unendlich viele Worte enthält und $L = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3$ gilt.
c) Geben Sie zwei Sprachen L_1 und L_2 so an, dass $L = L_1 \cdot L_2$ sowie $L = L_2 \cdot L_1$ gelten.

Lösung 2.1

a) z. B. $L = \{w \in \{\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c}\}^* \mid \exists x \in \{\mathtt{a}\}^* \exists y \in \{\mathtt{b}\}^* \exists z \in \{\mathtt{c}\}^* \colon x \cdot y \cdot z = w\}$
b) naheliegend: $L_1 = \{\mathtt{a}\}^*$, $L_2 = \{\mathtt{b}\}^*$ und $L_3 = \{\mathtt{c}\}^*$
es geht aber z. B. auch $L_1 = \{\mathtt{a}\}^*$, $L_2 = \{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}^*$ und $L_3 = \{\mathtt{b}\}^*\{\mathtt{c}\}^*$
c) $L_1 = \{\epsilon\}$ und $L_2 = L$. Alternative: $L_1 = L$ und $L_2 = \{\epsilon\}$.

Aufgabe 2.2 (4 Punkte)
Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ganzer Zahlen sei definiert durch die Festlegungen

$$x_0 = 1,$$
$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \colon x_{n+1} = (-1)^{n+1}2^n - x_n.$$

Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \colon x_n = (-2)^n.$$

Lösung 2.2
Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt $x_n = x_0 = 1 = (-2)^0 = (-2)^n$.

Induktionsvoraussetzung: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest und derart, dass $x_n = (-2)^n$ gilt.

Induktionsschluss: Es gilt

$$(-1)^{n+1}2^n = (-1)(-1)^n2^n = -(-2)^n$$

und damit

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (-1)^{n+1}2^n - x_n \\ &= (-1)^{n+1}2^n - (-2)^n \\ &= -(-2)^n - (-2)^n \\ &= -2(-2)^n \\ &= (-2)^{n+1}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2.3 (1+4+1=6 Punkte)
Es sei $A = \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}$. Eine Abbildung $f \colon A^* \to A^*$ sei induktiv wie folgt definiert:

$$f(\varepsilon) = \varepsilon,$$
$$\forall v \in A^* \; \forall x \in A \colon f(xv) = f(v)xf(v).$$

a) Geben Sie $f(\mathtt{ab})$ und $f(\mathtt{aba})$ an.
b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \; \forall w \in A^n \colon |f(w)| = 2^{|w|} - 1.$$

c) Wie viele Kilometer Platz bräuchte man ungefähr, um das Wort $f(f(f(f(\mathtt{ab}))))$ hinzuschreiben, wenn man für jedes Zeichen 1 mm benötigt? Die Angabe von 3 signifikanten Stellen genügt.

Lösung 2.3

a) Es gilt $f(\mathtt{b}) = f(\epsilon)\mathtt{b}f(\epsilon) = \epsilon\mathtt{b}\epsilon = \mathtt{b}$. Damit gilt $f(\mathtt{ab}) = f(\mathtt{b})\mathtt{a}f(\mathtt{b}) = \mathtt{bab}$. Genauso sieht man $f(\mathtt{ba}) = \mathtt{aba}$. Somit gilt $f(\mathtt{aba}) = f(\mathtt{ba})\mathtt{a}f(\mathtt{ba}) = \mathtt{abaaaba}$.

b) *Induktionsanfang:* Für $n = 0$ und jedes Wort $w \in A^0$ gilt $w = \epsilon$, also $f(w) = \epsilon$ und damit

$$|f(w)| = |\epsilon| = 0 = 2^0 - 1 = 2^{|w|} - 1.$$

Induktionsvoraussetzung: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest und derart, dass gilt:

$$\forall w \in A^n \colon |f(w)| = 2^{|w|} - 1.$$

Induktionsschluss: Es sei $w \in A^{n+1}$ beliebig aber fest. Dann gibt es ein $x \in A$ und ein $v \in A^n$ so, dass $xv = w$. Damit gilt

$$f(w) = f(xv) = f(v)xf(v).$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} |f(w)| &= |f(v)| + 1 + |f(v)| \\ &= (2^{|v|} - 1) + 1 + (2^{|v|} - 1) \\ &= 2 \cdot 2^{|v|} - 1 \\ &= 2^{|v|+1} - 1 \\ &= 2^{|w|} - 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 2.4 (3 Punkte)

Es sei A ein Alphabet. Für jedes Wort $w \in A^*$ ist sein *Spiegelbild* das Wort $\widetilde{w} \in A^*$, für welches gilt:

(i) $|\widetilde{w}| = |w|$;
(ii) $\forall i \in \{0, 1, \dots, |w| - 1\} \colon \widetilde{w}_i = w_{|w|-i-1}$.

Definieren Sie induktiv eine Abbildung $f \colon A^* \to A^*$ so, dass

$$\forall w \in A^* \colon f(w) = \widetilde{w}.$$

Lassen Sie sich dabei von der induktiven Definition der vorangegangenen Aufgabe inspirieren.

Hinweis: Wie auf den Vorlesungsfolien erwähnt schreiben wir bei einem Wort w für einzelne Symbole statt $w(i)$ gelegentlich kürzer w_i.

Lösung 2.4
Die Abbildung $f\colon A^* \to A^*$ sei induktiv definiert durch

$$f(\epsilon) = \epsilon,$$
$$\forall x \in A\ \forall v \in A^*\colon f(xv) = vx.$$

Per Induktion über die Wortlänge kann man zeigen, dass für jedes Wort $w \in A^*$ gilt: $f(w) = \widetilde{w}$.

***Aufgabe 2.5 (2 Extrapunkte)**

Hinweis zum Lesen: Bei dem nachfolgend auftretenden Symbol ω handelt es sich um ein kleines griechisches „omega“ (und nicht um ein lateinisches „w“).

Es sei A ein Alphabet. Eine Abbildung $\mu\colon \mathbb{N}_0 \to A$ heißt *ω-Wort über A*. Mit A^ω bezeichnen wir die Menge aller ω-Wörter. Eine Teilmenge L von A^ω heißt ω-Sprache. Für jedes ω-Wort μ über A, jeden Index $i \in \mathbb{N}_0$ und jeden Index $j \in \mathbb{N}_0$ mit $j \geq i$, sei $\mu_{i,j}$ das Wort $v \in A^*$ der Länge $j - i + 1$, für welches gilt:

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, |v| - 1\}\colon v_k = \mu(i + k).$$

Für jedes Wort $v \in A^*$ sei v^ω jenes ω-Wort μ über A, für das gilt:

$$\forall i \in \mathbb{N}_0\colon \mu_{i\cdot|v|,(i+1)\cdot|v|-1} = v.$$

Ein ω-Wort μ über A heißt *periodisch*, wenn es ein Wort $v \in A^*$ gibt derart, dass $\mu = v^\omega$.

a) Geben Sie die ω-Sprache aller periodischen ω-Wörter in der Form $\{v \in A^\omega \mid \ldots\}$ an.
b) Geben Sie ein ω-Wort über $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ an, das nicht periodisch ist.

Ein ω-Wort μ über A heißt *schließlich periodisch*, wenn es ein Wort $v \in A^*$ und einen Versatz $n \in \mathbb{N}_0$ gibt derart, dass gilt:

$$\forall i \in \mathbb{N}_0\colon \mu_{n+i\cdot|v|,n+(i+1)\cdot|v|-1} = v.$$

c) Geben Sie ein ω-Wort über $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ an, das schließlich periodisch ist.
d) Geben Sie ein ω-Wort über $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ an, das nicht schließlich periodisch ist.

Lösung 2.5

a) $\{v \in A^\omega \mid \exists u \in A^*\colon u^\omega = v\}$
b) Ein nicht periodisches Wort ist

$$\begin{aligned} v\colon \mathbb{N}_0 &\to A, \\ 0 &\mapsto \mathtt{a}, \\ \forall n \in \mathbb{N}_+\colon n &\mapsto \mathtt{b}. \end{aligned}$$

c) Jedes periodische ω-Wort ist insbesondere schließlich periodisch. Schließlich periodisch sind also ω-Wörter der Form v^ω für $v \in A^*$, beispielsweise $\mathtt{a}^\omega$ und $\mathtt{b}^\omega$. Aber es sind auch ω-Wörter der Form uv^ω für $u \in A^*$ und $v \in A^*$ schließlich periodisch, beispielsweise das nicht periodische Wort aus der vorangegangenen Teilaufgabe.
d) Ein nicht schließlich periodisches ω-Wort ist das ω-Wort $v \in A^\omega$, für welches gilt:

$$\begin{aligned} v_0 &= \mathtt{a}, \\ v_1 &= \mathtt{b}, \\ \forall i \in \mathbb{N}_+\colon v_{2^i} = \mathtt{b} \wedge v_{2^i+1,2^{i+1}-1} &= \mathtt{a}^{2^{i+1}-2^i-2}. \end{aligned}$$

In v steht bei jeder Zweierpotenz der Buchstabe b und ansonsten der Buchstabe a. Da die Abstände zwischen Vorkommen von b beständig größer werden, ist v nicht schließlich periodisch.