Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 10

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr.
	Name des Tutors:

Ausgabe: 7. Januar 2015

Abgabe: 16. Januar 2015, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 10:	/ $17 + 4$
Blätter 1 – 10:	/ $171 + 21$

Aufgabe 10.1 (1+1+2=4 Punkte)

a) Für welche $a \in \mathbb{R}_+$ ist $2^n \in O(a^n)$?

b) Für welche $a \in \mathbb{R}_+$ ist $2^n \in \Omega(a^n)$?

c) Beweisen Sie Ihre Aussage aus Teil a).

Lösung 10.1

a) für $a \geq 2$

b) für $a \leq 2$

c) Zum einen ist für $a \geq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ natürlich $2^n \leq 1 \cdot a^n$.
Zum anderen wachsen für $a < 2$ die Werte $2^n/a^n$ über alle Schranken. Für diese a kann also 2^n *nicht* durch $c \cdot a^n$ beschränkt werden.

Aufgabe 10.2 (3 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie: Für alle Funktionen $f_1 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ und $f_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ gilt:

$$\Omega(f_1) + \Omega(f_2) = \Omega(f_1 + f_2)$$

Lösung 10.2

Vorgehen ähnlich zum Beweis für die analoge Aussage für O:

„$\subseteq$": wenn für $n \geq n_{01}$ gilt: $g_1(n) \geq c_1 f_1(n)$ und
wenn für $n \geq n_{02}$ gilt: $g_2(n) \geq c_2 f_2(n)$, dann
für $n \geq n_0 = \max(n_{01}, n_{02})$ und $c = \min(c_1, c_2)$:

$$\begin{aligned} g_1(n) + g_2(n) &\geq c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) \\ &\geq c f_1(n) + c f_2(n) \\ &= c(f_1(n) + f_2(n)) \end{aligned}$$

„$\supseteq$": zu $g \in \Omega(f_1 + f_2)$ finde $g_1 \in \Omega(f_1)$ und $g_2 \in \Omega(f_2)$ mit $g = g_1 + g_2$. Für alle $n \geq n_0$ gelte $g(n) \geq c(f_1(n) + f_2(n))$.

$$\text{definiere} \qquad g_1(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n < n_0 \\ c f_1(n) & \text{falls } n \geq n_0 \end{cases}$$

$$\text{und} \qquad g_2(n) = g(n) - g_1(n)$$

Dass $g = g_1 + g_2$ ist, ist klar.

Dass $g_1 \in \Omega(f_1)$ ist, ist klar.

Für $n \geq n_0$ ist $g_2(n) = g(n) - g_1(n) \geq c(f_1(n) + f_2(n)) - c f_1(n) = c f_2(n)$, also ist auch $g_2 \in \Omega(f_2)$.

Aufgabe 10.3 (1+2+3+2+1+1 = 10 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{Z}_{n+1}$ sei $B(n,k)$ definiert als die Anzahl verschiedener Teilmengen der Größe k, die man von einer endlichen Menge mit n Elementen bilden kann.

Es sei M eine Menge, die genau n Elemente enthält.

a) Welche Teilmengen von M der Größe 0 gibt es? Welche Teilmengen von M der Größe n gibt es?

b) Begründen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $1 \le k \le n-1$ gilt:

$$B(n,k) = B(n-1,k-1) + B(n-1,k)$$

Hinweis: Sie müssen nicht unbedingt vollständige Induktion machen. Eine Argumentation, die direkt auf obige Definition Bezug nimmt, ist auch möglich.

c) Geben Sie eine geschlossene Formel für die Funktion $B2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 : n \mapsto B(n,2)$ an und zeigen Sie: $B2(n) \in \mathrm{O}\left(n^2\right)$.

d) Beweisen Sie: Für die Funktion $Bm : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 : k \mapsto B(2k,k)$ gilt: $Bm(k) \in \Omega\left(2^k\right)$.

e) Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $P_n = (V_n, E_n)$ der gerichtete Graph mit $V_n = \mathbb{Z}_{n+1} \times \mathbb{Z}_{n+1}$ und $E_n = (V_n \times V_n) \cap \{((i,j),(i+1,k)) \mid k = j \vee k = j+1\}$.
Zeichnen Sie P_4 so, dass der Knoten $(0,0)$ am weitesten oben auf dem Papier ist und die Pfeile für die Kanten (senkrecht oder diagonal) nur „nach unten" zeigen.

f) Wieviele Pfade gibt es in P_n im allgemeinen von Knoten $(0,0)$ zu einem Knoten $(i,j) \in V_n$?

Lösung 10.3

a) einzige Teilmenge der Größe 0 ist die leere Menge, einzige Teilmenge der Größe n ist M selbst.

b) Es sei x ein beliebiges Element von M. Es gibt zwei Arten von Teilmengen von M der Größe k:
   - solche, die x enthalten und
   - solche, die x nicht enthalten,

   und die beiden Fälle schließen sich offensichtlich aus.
   Zu jeder Teilmenge $T \subseteq M$ der Größe k, die x enthält, korrespondiert genau eine Teilmenge der Größe $k-1$, die x nicht enthält, nämlich $T \setminus \{x\}$, also mit anderen Worten eine Teilmenge der Größe $k-1$ der $n-1$ elementigen Menge $M \setminus \{x\}$. Also gibt es $B(n-1,k-1)$ Teilmengen der Größe k, die x enthalten.
   Jede Teilmenge $T \subseteq M$ der Größe k, die x nicht enthält, ist de facto eine Teilmenge der Größe k der Grundmenge $M \setminus \{x\}$ der Größe $n-1$. Also gibt es $B(n-1,k)$ Teilmengen der Größe k, die x nicht enthalten.
   Also ist $B(n,k) = B(n-1,k-1) + B(n-1,k)$.

c) $B2(n) = B(n,2) = \frac{n(n-1)}{2}$.
   Für alle $n \ge 0$ ist $n(n-1)/2 \le n(n-1) \le 1 \cdot n^2$, also ist $B2(n) \in \mathrm{O}\left(n^2\right)$.

d) Wir zeigen, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt: $Bm(k) \ge 2^k$. Dann ist man fertig.

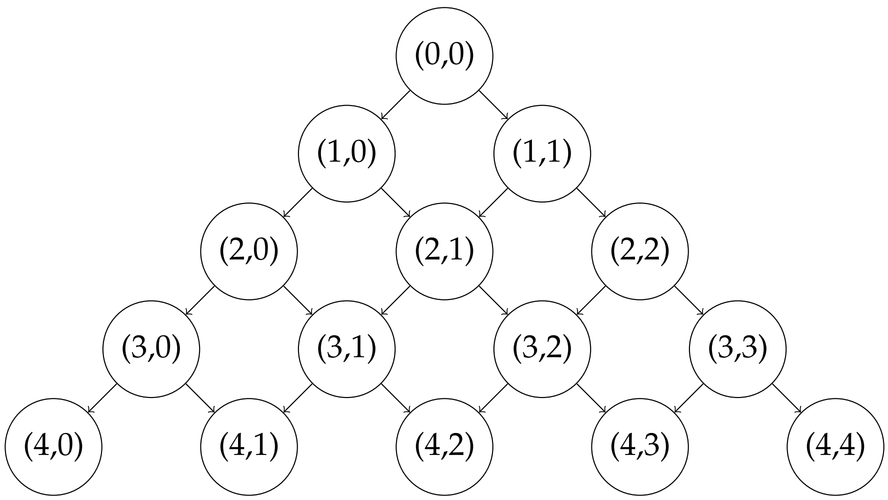
   IA: $Bm(0) = B(0,0) = 1 \le 2^0$.

   IV: Für ein beliebiges aber festes k gelte: $Bm(k) \ge 2^k$

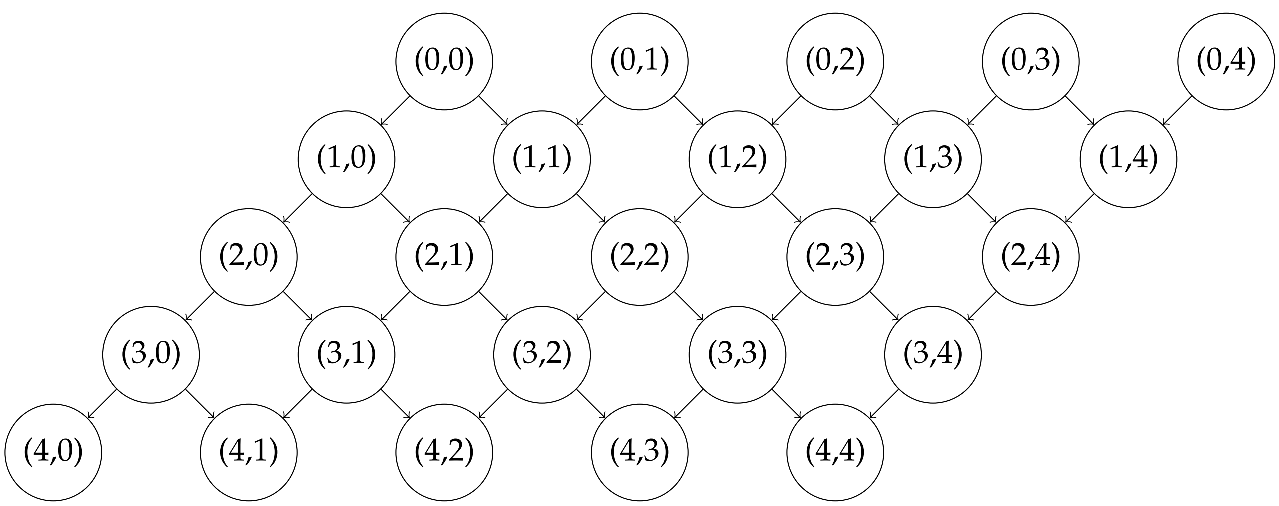
IS:

$$\begin{aligned} Bm(k+1) = B(2k+2, k+1) &= B(2k+1, k) + B(2k+1, k+1) \\ &= B(2k, k-1) + B(2k, k) + B(2k, k) + B(2k, k+1) \\ &\geq 2B(2k, k) \\ &\geq 2 \cdot 2^k = 2^{k+1} \end{aligned}$$

e) „Fehler“ in der Aufgabenstellung. Gedacht war nicht an $V_n = \mathbb{Z}_{n+1} \times \mathbb{Z}_{n+1}$, sondern nur an $\{(i, j) \in \mathbb{Z}_{n+1} \times \mathbb{Z}_{n+1} \mid i \geq j\}$. Das ergibt das folgende Bild:



Für $V_n = \mathbb{Z}_{n+1} \times \mathbb{Z}_{n+1}$ sieht der Graph so aus



f) es gibt genau $B(i, j)$ viele Pfade

***Aufgabe 10.4 (1+1+2 = 4 Extrapunkte)**

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq k \leq n$.

a) Wieviele verschiedene Pfade gibt es im Graph P_{2n} (siehe Aufgabe 10.3) von Knoten (n, k) zu Knoten $(2n, n)$?

b) Begründen Sie Ihre Antwort aus Teilaufgabe a).

c) Beweisen Sie:

$$\sum_{k=0}^{n} B(n,k)^2 = B(2n,n)$$

Lösung 10.4

a) Das sind genauso viele wie es Pfade von $(0,0$ nach (n,k) gibt, nämlich $B(n,k)$ viele

b) Das Dreieck mit den Knoten $(n,0)$, $\ldots$, (n,n) als „Grundlinie“, von dem aus die Pfeile nach unten „zusammenlaufen“ zum Knoten $(2n,n)$ ist bis auf die Pfeilrichtungen isomorph zu P_n.

c) $B(2n,n)$ ist die Anzahl Pfade von $(0,0)$ nach $(2n,n)$. Jeder solche Pfad setzt sich eindeutig zusammen aus einem Pfad von $(0,0)$ zu einem Knoten (n,k) und einem Pfad von (n,k) zum Knoten $(2n,n)$. Und zwei solche Pfad hintereinander geben einen Pfad von $(0,0)$ nach $(2n,n)$. Also ist

$$\begin{aligned}
\text{Anz.Pfade } (0,0) \rightsquigarrow (2n,n) &= \sum_{k=0}^{n} \text{Anz.Pfade } (0,0) \rightsquigarrow (n,k) \rightsquigarrow (2n,n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \text{Anz.Pfade } (0,0) \rightsquigarrow (n,k) \cdot \text{Anz.Pfade } (n,k) \rightsquigarrow (2n,n) \\
\text{also} \qquad B(2n,n) &= \sum_{k=0}^{n} B(n,k)^2
\end{aligned}$$