Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 2

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr.
	Name des Tutors:

Ausgabe: 4. November 2015

Abgabe: 13. November 2015, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 2:	/ 17	(Physik: 14)
Blätter 1 – 2:	/ 30	(Physik: 27)

Mit **[nicht Physik]** gekennzeichnete Aufgaben werden von Studenten der Physik bitte nicht bearbeitet.

Aufgabe 2.1 (3 Punkte) [nicht Physik]
Es sei Var_{AL} eine Menge von Aussagevariablen und es sei For_{AL} die Menge aller aussagenlogischen Formeln über Var_{AL}. Beweisen Sie, dass für alle $G, H \in For_{AL}$ die aussagenlogische Formel

$$(G \rightarrow H) \rightarrow (\neg H \rightarrow \neg G)$$

eine Tautologie ist.

Aufgabe 2.2 (2 Punkte)
Es sei A ein Alphabet, und für jede formale Sprache $L \subseteq A^*$ und jede formale Sprache $S \subseteq A^*$ sei

$$L \cdot S = \{u \cdot v \mid u \in L \text{ und } v \in S\}.$$

Es seien ferner L_1, L_2 und L_3 drei formale Sprachen über A. Beweisen Sie, dass gilt:

$$L_1 \cdot (L_2 \cdot L_3) \subseteq (L_1 \cdot L_2) \cdot L_3.$$

Aufgabe 2.3 (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 Punkte)
Es sei A ein Alphabet.

a) Geben Sie eine injektive Abbildung $f\colon A^* \to A^*$ an, die nicht surjektiv ist.
b) Geben Sie eine surjektive Abbildung $g\colon A^* \to A^*$ an, die nicht injektiv ist.
c) Geben Sie eine bijektive Abbildung $h\colon A^* \to A^*$ an, die nicht die identische Abbildung $A^* \to A^*, w \mapsto w$, ist.
d) Geben Sie eine Abbildung $\varphi\colon A^* \to A^*$ so an, dass für jedes $w \in A^*$ gilt:

$$|\varphi(w)| = 2^{|w|} \cdot |w|^{|w|}.$$

e) Geben Sie eine Abbildung $\psi\colon 2^{A^*} \to 2^{A^*}$ so an, dass für jedes $L \in 2^{A^*}$ gilt:

$$\{|w| \mid w \in \psi(L)\} = \{3 \cdot |w| \mid w \in L\}.$$

f) Geben Sie eine Abbildung $\xi\colon 2^{A^*} \to 2^{A^*}$ so an, dass für jedes $L \in 2^{A^*}$ und für jedes $w \in A^*$ gilt:

$$w \in L \text{ genau dann, wenn } w \notin \xi(L).$$

Aufgabe 2.4 (1,5 + 1,5 + 3 = 6 Punkte)
Sind X und Y zwei Mengen und $f\colon X \to Y$ eine bijektive Abbildung, so ist die Relation

$$R_f = \{(f(x), x) \mid x \in X\}$$

eine bijektive Abbildung von Y nach X, die wir mit f^{-1} bezeichnen, *Umkehrabbildung von f* oder *Inverse von f* nennen, und für die für jedes $x \in X$ und jedes $y \in Y$ gilt:

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ und } f(f^{-1}(y)) = y.$$

Es sei A das Alphabet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, es sei γ die bijektive Abbildung

$$\begin{aligned} \gamma\colon \mathbb{Z}_3 &\to A, \\ 0 &\mapsto \mathtt{a}, \\ 1 &\mapsto \mathtt{b}, \\ 2 &\mapsto \mathtt{c}, \end{aligned}$$

und es sei $\odot$ die binäre Operation

$$\begin{aligned} \odot\colon A^* \times A^* &\to A^*, \\ (u, v) &\mapsto \begin{cases} u, & \text{falls } u = \epsilon \;\text{ oder }\; v = \epsilon, \\ \gamma((\gamma^{-1}(x) + \gamma^{-1}(y)) \bmod 3) \cdot (\mu \odot \kappa), & \text{falls } u = x \cdot \mu \;\text{ und }\; v = y \cdot \kappa \\ & \text{für }\; x, y \in A \;\text{ und }\; \mu, \kappa \in A^*, \end{cases} \end{aligned}$$

wobei für jede nicht-negative ganze Zahl z der Ausdruck $z \bmod 3$ den Rest der ganzzahligen Division von z mit 3 bezeichne und bei Bedarf Zeichen in A als Wörter der Länge 1 in A^1 aufzufassen sind.

a) Berechnen Sie die Wörter $\mathtt{baac} \odot \mathtt{aaaa}$, $\mathtt{baac} \odot \mathtt{bbbbbb}$ und $\mathtt{baac} \odot \mathtt{cc}$.

b) Es sei

$$\begin{aligned} \delta\colon A &\to A, \\ \mathtt{a} &\mapsto \mathtt{a}, \\ \mathtt{b} &\mapsto \mathtt{c}, \\ \mathtt{c} &\mapsto \mathtt{b}. \end{aligned}$$

Geben Sie für jedes $u \in A^*$ ein $v \in A^*$ so an, dass $u \odot v = \mathtt{a}^{|u|}$ gilt.

c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\text{Für jedes } w \in A^n\colon w \odot \mathtt{a}^n = w.$$