# Grundbegriffe der Informatik
# Aufgabenblatt 1

Matr.nr.: | | | | | | |

Nachname:

Vorname:

Tutorium: Nr. Name des Tutors:

Ausgabe: 26. Oktober 2016

Abgabe: 10. November 2016, 16:00 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

---

*Vom Tutor auszufüllen:*

erreichte Punkte

| | | |
|---|---|---|
| Blatt 1: | / 19 | (4 ECTS: 19) |
| Blätter 1 – 1: | / 19 | (4 ECTS: 19) |

---

**Aufgabe 1.1  (0,5 + 0,5 + 0,5 = 1,5 Punkte)**
Es seien 5 verschiedene Nachrichten möglich; die Nachrichten kommen gleichverteilt bei der Verarbeitung vor. Geben Sie den Informationsgehalt einer Nachricht in jeweils den folgenden drei Einheiten auf fünf Nachkommastellen genau an:

a) natural units (nat)
b) Hartley (Hart)
c) Shannon (Sh)

**Lösung 1.1**

a) $\ln 5$ nat $\approx 1,60944$ nat
b) $\log 5$ Hart $\approx 0,69897$ Hart
c) $\operatorname{ld} 5$ Sh $\approx 2,32193$

**Aufgabe 1.2  (0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5= 2 Punkte)**
Gegeben seien die folgenden Mengen: $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{4,5,6,7,8,9,10,11\}$, $C = \{6,7,8,9,10,11\}$
Geben Sie an:

a) $|A \cup C|$
b) $|A \cup B|$
c) $|A \cap B|$
d) $|A \cap C|$

**Lösung 1.2**

a) $|A \cup C| = 11$
b) $|A \cup B| = 11$
c) $|A \cap B| = 2$
d) $|A \cap C| = 0$

**Aufgabe 1.3  (2 Punkte)**
Es seien $A$, $B$ und $C$ Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie:

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$$

**Lösung 1.3**
Beweis durch Gegenbeispiel: Sei $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4,5\}$, $C = \{3\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \{1,2,3\} \setminus (\{3,4,5\} \setminus \{3\}) = & \ \{1,2,3\} \setminus \{4,5\} = \{1,2,3\} \\ \neq & \\ & \qquad \{1,2\} = \{1,2\} \setminus \{3\} = (\{1,2,3\} \setminus \{3,4,5\}) \setminus \{3\} \end{aligned}$$

**Aufgabe 1.4  (2 Punkte)**

Beweisen Sie die Idempotenz von $\cap$.

**Lösung 1.4**
Beweis wie in der VL für Idempotenz von $\cup$.

Es sei $A$ eine Menge.

Zeige: $A = A \cap A$

Wann sind diese beiden Mengen gleich? Wenn

a) $A \subseteq A \cap A$
   - Jedes Element $x \in A$ ist auch Element von $A \cap A$.

b) $A \cap A \subseteq A$
   - Jedes Element $x \in A \cap A$ ist auch Element von $A$.

Beweis von 1.

- *Es sei* $x \in A$.
- *Dann ist* $x \in A$ *und* $x \in A$.
- *Also ist* $x \in A \cap A$.

Beweis von 2.

- *Es sei* $x \in A \cap A$.
- *Dann ist* $x \in A$ *und* $x \in A$.
- *Also ist* $x \in A$.

**Aufgabe 1.5 (3 Punkte)**
Es sei $M$ eine Menge und es seien $A \subseteq M$ und $B \subseteq M$. Beweisen Sie:

$$M \setminus (A \cap B) = (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$$

**Lösung 1.5**

**$\subseteq$:** Es sei $x \in M \setminus (A \cap B)$. Dann ist $x \in M$, und $x \notin A \cap B$. Also ist $x \in M$, und $x \notin A$ oder $x \notin B$. Somit ist

- $x \in M$ und $x \notin A$ oder
- $x \in M$ und $x \notin B$.

Damit ist $x \in M \setminus A$ oder $x \in M \setminus B$. Folglich ist $x \in (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$.

**$\supseteq$:** Es sei $x \in (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$. Dann ist $x \in M \setminus A$ oder $x \in M \setminus B$. Also gilt

- $x \in M$ und $x \notin A$, oder
- $x \in M$ und $x \notin B$

Also ist $x \in M$, und $x \notin A$ oder $x \notin B$. Dann ist $x \in M$ und $x \notin A \cap B$. Folglich ist $x \in M \setminus (A \cap B)$.

**Aufgabe 1.6 (0.5 + 1.5 + 3 = 5 Punkte)**

a) Nichtnegative ganze Zahlen $x_i$, $i \in \mathbb{N}_0$, seien wie folgt definiert:

$$x_0 = 25\ ,$$
$$\text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0\colon\ x_{n+1} = x_n + 2n + 11\ .$$

Geben Sie die Zahlenwerte von $x_1$, $x_2$, $x_3$ und $x_4$ an.

b) Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ einen arithmetischen Ausdruck $E_n$, in dem kein $x_i$ vorkommt, so an, dass gilt: $x_n = E_n$.

c) Geben Sie die induktive Definition für ganze Zahlen $y_i$, $i \in \mathbb{N}_0$, so an, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$y_n = \begin{cases} 2n, & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \\ -2n, & \text{falls } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

*Hinweis:* In der Definition von $y_{n+1}$ müssen Sie $y_n$ sinnvoll benutzen. „Scheinbenutzungen" wie $\cdots y_n - y_n \cdots$ sind nicht ausreichend.

**Lösung 1.6**

a) $x_1 = 36$, $x_2 = 49$, $x_3 = 64$, $x_4 = 81$

b) $E_n = (n+5)^2$

c) zum Beispiel:

$$y_0 = 0$$
$$\text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0\colon y_{n+1} = 2 * (\frac{-y_n}{2} + (-1)^{n+1})$$

oder

$$y_0 = 0$$
$$\text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0\colon y_{n+1} = 2 * (\frac{y_n}{2} + (-1)^{n+1}(2n+1))$$

**Aufgabe 1.7 (0,5 + 0,5 + 0,5 + 2 = 3,5 Punkte)**

Das Gebiet der maschinellen Übersetzung beschäftigt sich mit der automatischen Übersetzung von Sätzen aus einer Quellsprache, z.B. Französich, in eine Zielsprache, z.B. Englisch. Um die Modelle, die dafür nötig sind, zu lernen, arbeitet man mit Trainingscorpora, die aus Satzpaaren bestehen: ein Satz in der Quellsprache gepaart mit dem Satz, der der Übersetzung in die Zielsprache entspricht. Zum Lernen braucht man jetzt so genannte alignments. Sei $f = f_1 f_2 \cdots f_k$ ein Satz in der Quellsprache, der aus den Wörtern $f_1, f_2$ bis $f_k$ besteht. Ferner sei $e = e_1 e_2 \cdots e_l$ der Satz, der die zugehörige Übersetzung in der Zielsprache ist.

Die Modelle, die gelernt werden, arbeiten jetzt mit einer Abbildung zwischen den Wörtern der Quell- und Zielsätze. Diese Abbildung heißt *Alignment* und bildet jedes Wort $f_i$ aus dem Quellsatz $f$ auf ein Wort $e_j$ im Zielsatz $e$ ab. Dabei muss mindestens ein $f_i$ auf jedes $e_j$ im Zielsatz abgebildet werden. Für unsere Zwecke nehmen wir an, dass die Länge von $f$ größer oder gleich der Länge von $e$ ist.

Beantworten Sie folgende Fragen und löse Sie die gestellte Aufgabe:

a) Ist die Abbildung injektiv?

b) Ist die Abbildung surjektiv?

c) Ist die Abbildung bijektiv?

d) Geben sei der Quellsatz
$f =$ Das Auto ist groß und schnell und teuer
und der Zielsatz
$e =$ The car is large and fast and expensive
Geben Sie ein mögliches Alignment aus allen möglichen Alignmenst zwischen diesem $f$ und diesem $e$ als vollständing beschriebene Abbildung an.

**Lösung 1.7**

a) Ist die Abbildung injektiv?
Nein, man darf z.B. $f_1$ auf $e_1$ abbilden und $f_2$ auf $e_1$

b) Ist die Abbildung surjektiv?
Ja, gemäß der Definition ist ein Alignment rechtstotal.

c) Ist die Abbildung bijektiv? Nein, denn sie ist nicht injektiv.

d)

$$F := \{(Das, 1), (Auto, 2), (ist, 3), (gro, 4), (und, 5), (schnell, 6), (und, 7), (teuer, 8)\}$$
$$E := \{(The, 1), (car, 2), (is, 3), (large, 4), (and, 5), (fast, 6), (and, 7), (expensive, 8)\}$$

$$alignment\colon F \mapsto E, x \mapsto \begin{cases} (The, 1) & \text{falls } x = (\text{Das}, 1) \\ (car, 2) & \text{falls } x = (\text{Auto}, 2) \\ (is, 3) & \text{falls } x = (\text{ist}, 3) \\ (large, 4) & \text{falls } x = (\text{groß}, 4) \\ (and, 5) & \text{falls } x = (\text{und}, 5) \\ (fast, 6) & \text{falls } x = (\text{schnell}, 6) \\ (and, 7) & \text{falls } x = (\text{und}, 7) \\ (expensive, 8) & \text{falls } x = (\text{teuer}, 8) \end{cases}$$

*Allgemeiner Hinweis:* In dieser Vorlesung kommen an einigen Stellen griechische Buchstaben vor. In anderen Vorlesungen wird das auch passieren. Hier ist die Liste der Kleinbuchstaben (manchmal gibt es verschiedene Schreibweisen):

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ (oder $\epsilon$), $\zeta$, $\eta$, $\theta$ (oder $\vartheta$), $\iota$, $\kappa$, $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\xi$, $o$, $\pi$, $\rho$, $\sigma$, $\tau$, $\upsilon$, $\varphi$, $\chi$, $\psi$, $\omega$

Machen Sie sich mit der Schreibweise und den Namen der Zeichen vertraut!